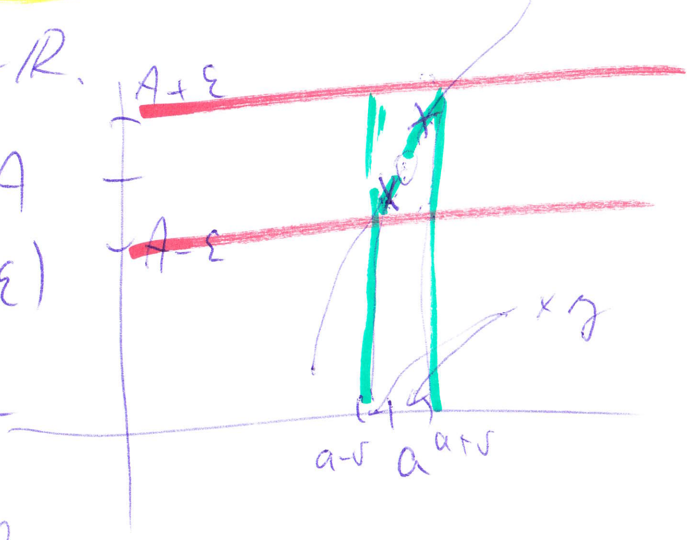
Věta T 3.8 (Bolzano – Cauchyova podmínka pro funkce)

Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a $\delta_0 > 0$. Nechť f je funkce definovaná alespoň na $P(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x \to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující (tzv. Bolzano – Cauchyova) podmínka: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in P(a,\delta): |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Dk: "$\Rightarrow$" Nechť $\varepsilon > 0$ a $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$.



Z definice limity

$\exists \delta > 0\ \ \underbrace{\forall x \in P(a,\delta)}_{y}: f(x) \in U(A,\varepsilon)$

$|f(x) - A| < \varepsilon$

Toto δ použijeme pro BC podmínku a

$\forall x, y \in P(a,\delta): |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Toto je ekvivalentní BC podmínce

"$\Leftarrow$" PŘIPOMEŇ $\boxed{V2.14}$ $\exists \lim a_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m,n \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$

Víme BC podmínku a chceme $\exists A \in \mathbb{R}\ \lim_{x \to a} f(x) = A$. 13-2

Podle Heineho věty V3.7. toto platí, právě tehdy, když

$\forall x_n \to a,\ x_n \neq a$, platí $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Nechť tedy $x_n \to a,\ x_n \neq a$. Tvrdím, že $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnost:

Nechť $\varepsilon > 0$, nalezneme $\delta > 0$ z BC podmínky pro funkci.

K tomuto $\delta > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ x_n \in P(a,\delta)$, neboť $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Tedy $\forall m,n \geq n_0$ platí $|a_n - a_m| = |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ z

Tedy $a_n = f(x_n)$ splňuje BC podmínku pro posloupnost

$\overset{V2.14}{\Longrightarrow}\ \exists \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Nyní nechť $x_n \to a,\ x_n \neq a$, a $y_n \to a,\ y_n \neq a$.

Podle předchozího $\exists A \in \mathbb{R}\ \lim f(x_n) = A$ $\exists B \in \mathbb{R}\ \lim f(y_n) = B$.

Nechť $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$ je nová posloupnost $\to a,\ \neq a$.

Tak existuje její limita $\Rightarrow A = B$ podle věty o limitě podposloupnosti

$\square$

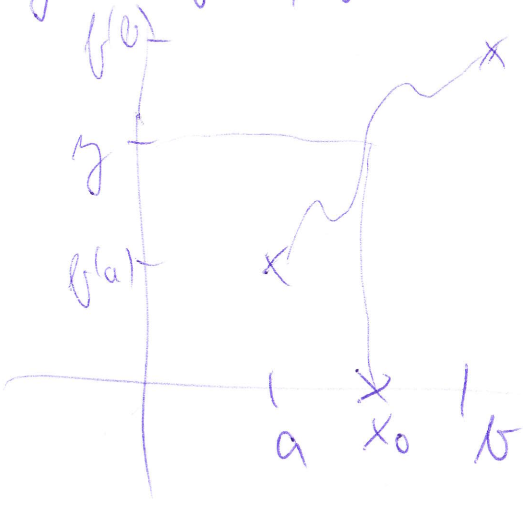
3.3. Funkce spojité na intervalu

Definice Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body z J, které nejsou krajními. ~~$[0,1)$~~

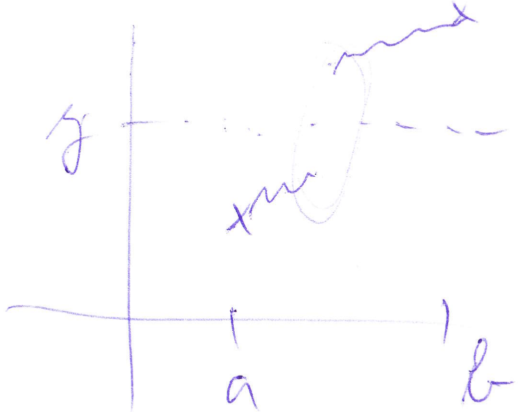
Def Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Otázka?: je $f(x) = \frac{1}{x}$ spojitá na $(0, 1]$?

Věta T 3.9 (Darboux) Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $f(x_0) = y$.



Poznámka: Pro $f(a) > f(b)$ platí analogie

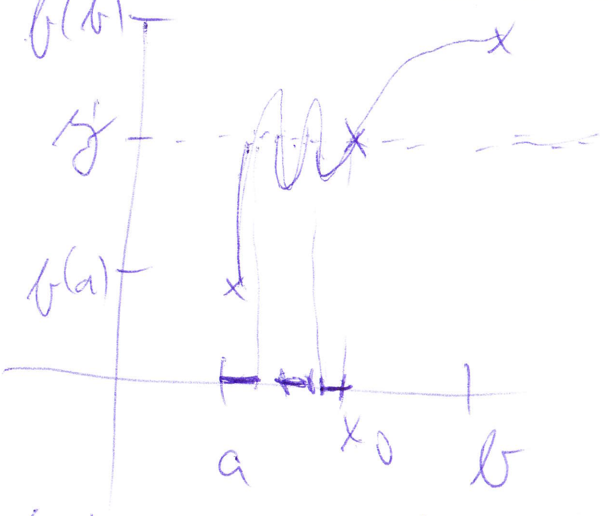


Dk. $\left(\forall y \in (f(a), f(b)) \ \exists x_0 \in (a,b) \ \ f(x_0) = y \right)$

Nech $y \in (f(a), f(b))$ a položme

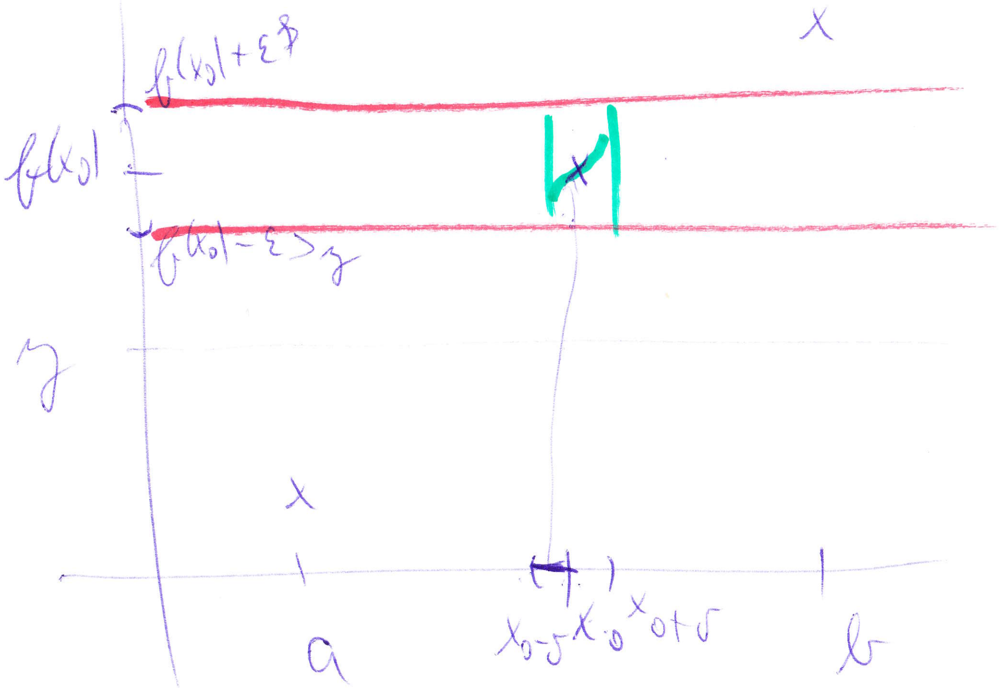
$$M = \{x \in [a,b] : f(x) < y\}$$

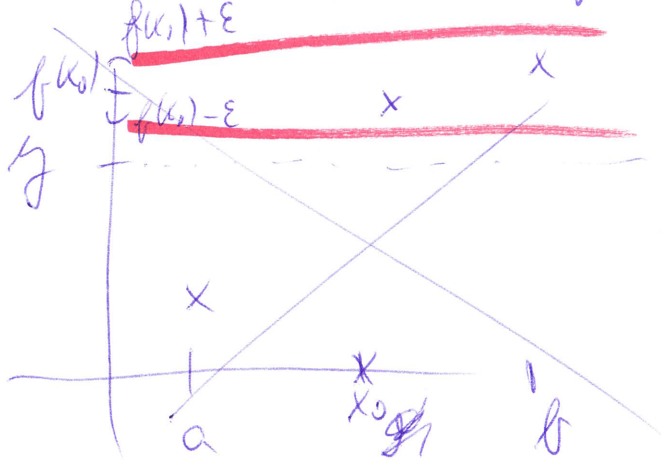
Množina M je neprázdna $(a \in M)$ a zhora ohraničená b, a teda existuje $x_0 = \sup M$. Zrejme $x_0 \in [a,b]$.



Dokážeme, že $f(x_0) = y$ vylúčením prípadu $f(x_0) > y$ a $f(x_0) < y$.

- $f(x_0) > y$



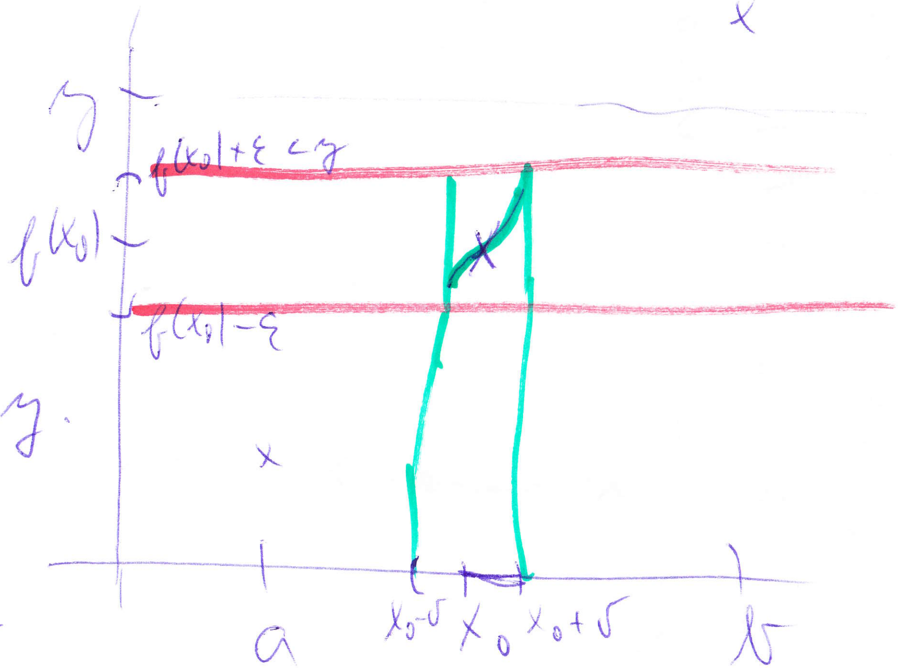


- $f(x_0) > y$. Z definice $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) > y$

nalezneme $\delta > 0$ tak, že $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ platí $f(x) > y$
(nalezneme $\varepsilon > 0$, aby $f(x_0) - \varepsilon > y$, k němu nalezneme $\delta > 0$.)
Tedy z definice M $(x_0 - \delta, x_0)$ neleží v M $\Rightarrow$ x_0 není nejmenší horní závora M. ↯

- $f(x_0) < y$.

Nalezneme $\varepsilon > 0$, aby $f(x_0) + \varepsilon < y$.
Z definice $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
nalezneme $\delta > 0$ tak, že
$\forall x \in [x_0, x_0 + \delta)$ platí $f(x) < f(x_0) + \varepsilon < y$.
Tedy $[x_0, x_0 + \delta) \subset M$, a tedy
x_0 není horní závora M ↯

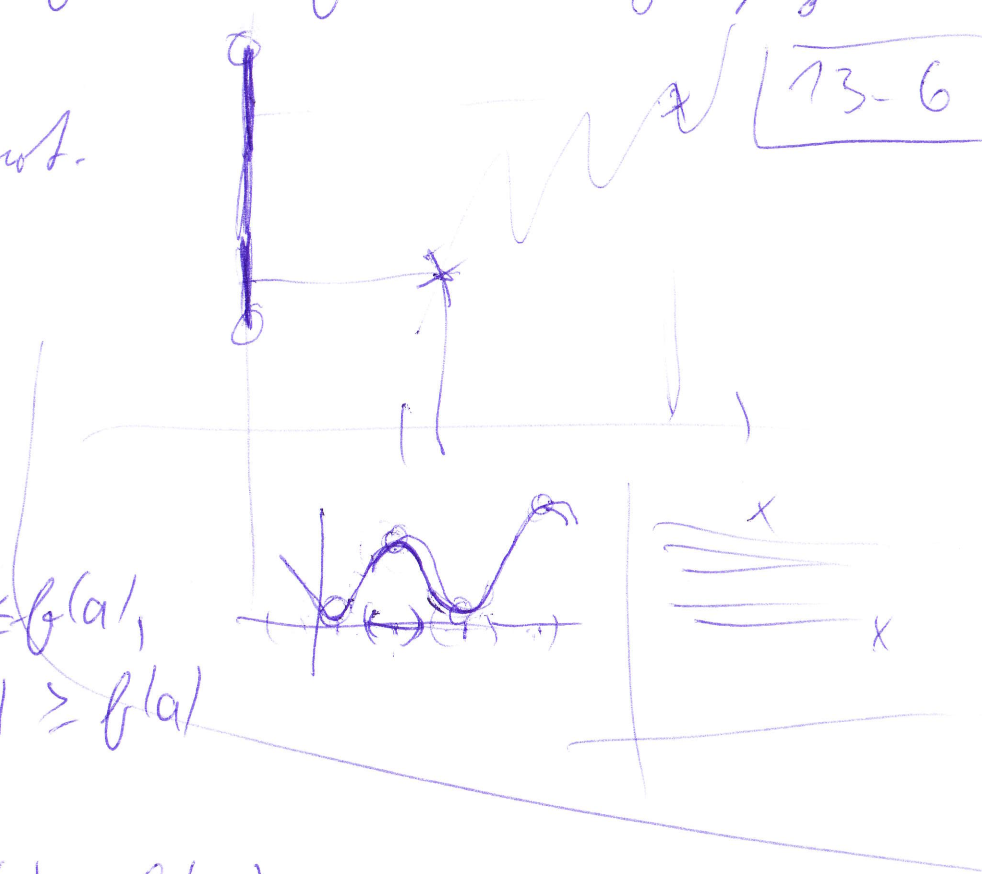


Tedy $f(x_0) = y$ $\Rightarrow$ $x_0 \neq a$ a $x_0 \neq b$ $\Rightarrow$ $x_0 \in (a, b)$. $\square$

Důsledek: Nechť J je interval a funkce $f: J \to \mathbb{R}$ je spojitá.

Pak je $f(J)$ interval.

13-6



Otázka 2: Nechť f nabývá mezihodnot.

Musí být f spojitá?

Def Nechť $f: M \to \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$.

Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$

maxima na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) \leq f(a)$,

minima na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) \geq f(a)$

ostrého maxima na M, jestliže

$\forall x \in M, x \neq a: \quad f(x) < f(a)$

ostrého minima na M jestliže

$\forall x \in M, x \neq a: \quad f(x) > f(a)$,

lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima), jestliže $\exists \delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap B(a, \delta)$ svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).