Řekneme, že *monoid* N *rozeznává množinu* $L \subseteq M$, pokud existuje homomorfismus $\varphi : M \to N$ takový, že $L = \varphi^{-1}\varphi(L)$.
Jádrem homomorfismu φ rozumíme ekvivalenci $\sim_\varphi$ definovanou:

$$u \sim_\varphi v, \text{ právě když } \varphi(u) = \varphi(v).$$

$a' \in L$

$\varphi(a') = a$

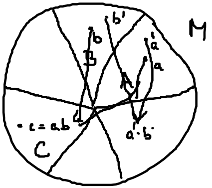
$\varphi^{-1}\underbrace{\varphi(a')}_{a} = a \quad \varphi^{-1}(a) = A$

$\varphi^{-1}\varphi(a') = [a']$

Platí, že jádro homomorfismu je vždy kongruence; a naopak, každá kongruence $\sim$ na M definuje homomorfismus (*přirozenou projekci*)

$$\varphi : M \to M/\!\sim$$

vztahem $\boxed{\varphi(u) = [u]}$, jehož jádrem je právě $\sim$ (kde $[u]$ značí třídu, ve které leží u).



$$A \cdot B = C$$
$$a \cdot b = c$$
$$[a] \cdot [b] = [c] \; ?$$
$$[a'] \quad [b'] = [a' \cdot b']$$

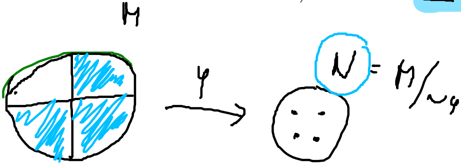
$$\boxed{\begin{array}{c} a \sim a' \\ b \sim b' \\ \Downarrow \\ a \cdot b \sim a' \cdot b' \end{array}}$$

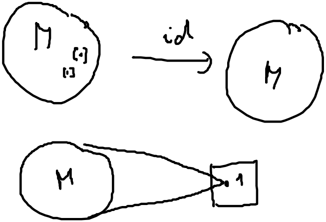
$$\varphi(a) = \varphi(a')$$
$$\varphi(b) = \varphi(b')$$
$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \overset{?}{=} \varphi(a'b') = \varphi(a')\varphi(b')$$

Je tedy vidět, že monoidy rozeznávající množinu L jsou dány kongruencemi monoidu M, pro které platí, že L se rozkládá na třídy této kongruence.

Nechť je $\sim$ taková kongruence. Pak $u \sim v$ implikuje $rus \sim rvs$ pro každé r a s, neboli

$$\forall r, s \in M : \; rus \in L \Leftrightarrow rvs \in L.$$





P je S

Petr je chytrý

Pavel je šikovný

- Pokud definujeme ekvivalenci $u \sim_L v$ vztahem

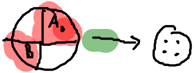
$$\forall r, s \in M : \; rus \in L \Leftrightarrow rvs \in L,$$

  dostaneme *syntaktickou kongruenci* množiny L
- monoid $\mathrm{Synt}(L) := M/\sim_L$ se nazývá *syntaktický monoid* množiny L

$$M \xrightarrow{\varphi} M/\sim_L$$

- příslušná přirozená projekce se nazývá *syntaktický homomorfismus*.

$\varphi(u) = [u]$



- z definice je vidět, že je to největší kongruence, pro kterou se množina L rozkládá na třídy. („Největší“ znamená, že má nejmenší počet tříd a všechny ostatní jsou jejím zjemněním.)
- monoid $M/_{\sim_L}$ se nazývá *syntaktický monoid* množiny L, a je to tedy nejmenší monoid rozeznávající množinu L, a to pomocí přirozené projekce $u \mapsto [u]$.