4. cvičení z PSt — 26. a 29.10.2020

Diskrétní náhodné veličiny, zejména vektory

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztehem $p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$. Připomeňte si, jak z ní zjistit „jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y.

1. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y.

2. Hodíme třikrát mincí. Označíme X počet rubů v prvních dvou hodech a Y počet líců v posledních dvou hodech.

(a) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y.

(b) Jsou X a Y nezávislé?

(c) Určete $P(X < Y)$.

(d) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkce $p_{X|Y}$.

3. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, ..., 4).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?

(c) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli, o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X_1)$?

Nápověda: Určete napřed $P(Y \le k)$, $P(Z \le k)$?

4. Ukažte, že pro diskrétní nezávislé n.v. X, Y platí

$$P(X \le x, Y \le y) = P(X \le x)P(Y \le y).$$

5. * Označme M počet emailů, které dostaneme za den, S počet spamů mezi nimi, H počet „hamů“ – těch, co nejsou spamy. Předpokládejme, že $M \sim Pois(\lambda)$ a že každý email má nezávisle na ostatních pravděpodobnost p, že je to spam.

(a) Vyjádřete $P(S = k)$ (jako nekonečnou sumu) pomocí sdruženého rozdělení M a S.

(b) Odvoďte, že $S \sim Pois(p\lambda)$.

(c) Odvoďte, že $H \sim Pois((1-p)\lambda)$ a také, že H, S jsou nezávislé n.v.

Spojité náhodné veličiny

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

V některých případech je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X). Pak je $P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$. Platí také $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\ f_X(t)dt$ a obecněji

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ f_X(t)dt.$$

Stejně jako pro diskrétní n.v. platí, že $var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

6. Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

(a) $X^+ = \max(0, X)$, (b) $X^- = -\min(X, 0)$, (c) $|X| = X^+ + X^-$, (d) $-X$.

7. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0, 3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 1$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte

(a) $P(1 \le X \le 2)$

(b) $P(X \leq Y)$
(c) $P(X \leq Z)$
(d) hustotní funkci f_X.
(e) distribuční funkce F_Y a F_Z.

8. Pan Chen Cheng navštívil Prahu a v uniformně náhodný čas se objeví na Staroměstském náměsstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Cheng uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut.

(b) Co když pan Cheng přijde na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

9. Házíme na terč – kruh o poloměru 1. Předpokládejme, že každý bod v terči má stejnou pravděpodobnost zásahu, přesněji, každá jeho podmnožina má pravděpodobnost úměrnou své ploše. Označme X vzdálenost od středu.

(a) Najděte distribuční funkci F_X.
(b) Najděte hustotní funkci f_X.
(c) Zjistěte $\mathbb{E}(X)$, $var(X)$, σ_X.

10. Nechť $U \sim U(0,1)$ a $p \in [0,1]$. Uvažme funkci

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x > p \\ 1 & \text{pro } x \leq p \end{cases}$$

Co můžete říct of n.v. $X = g(U)$? Spočtěte její střední hodnotu dvěma způsoby.

Bonusy

11. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.

(a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. X_1, …, X_n.
(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

12. * V tipovací hře má soutěžící na výběr n otázek, ze kterých si může postupně vybírat. U i-té otázky s pravděpodobností p_i odpoví správně, získá za to h_i korun a právo dalšího výběru. Pokud neodpoví správně, končí. Předpokládejme, že cílem je maximalizovat střední hodnotu zisku. Ukažte, že toho docílí, bude-li vybírat otázky seřazené podle hodnoty $\frac{p_i h_i}{1-p_i}$.

13. Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0,1)$). Označíme X_i indikátor jevu „i-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.

(a) Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $var(X_i)$.
(b) Položte $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $var(S_n)$.
(c) Ukažte, jak lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n.
(d) Sestavte program v libovolném jazyce a spočítejte pomocí něj hodnotu π. (Jak velké n myslíte, že bude potřeba pro pět správných číslic?)