4. seminář z Matematických dovedností

Kvantifikátory

26. října

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon y > x$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon y > x$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee y < x)$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee \exists y \in \mathbb{N} \colon y < x)$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon (x = 1 \lor y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N}\colon (x = 1 \lor \exists y \in \mathbb{N}\colon y < x)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon x = y + 1$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon (x = 1 \vee y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N}\colon (x = 1 \vee \exists y \in \mathbb{N}\colon y < x)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon x = y + 1$
6. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon x = y + 1$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon (x = 1 \vee y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N}\colon (x = 1 \vee \exists y \in \mathbb{N}\colon y < x)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon x = y + 1$
6. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N}\colon x = y + 1$
7. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\colon (y > 10 \Rightarrow y > x)$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee \exists y \in \mathbb{N} \colon y < x)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon x = y + 1$
6. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon x = y + 1$
7. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon (y > 10 \Rightarrow y > x)$
8. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \colon (y \leq x \Rightarrow x < 10)$

Příklady

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee \exists y \in \mathbb{N} \colon y < x)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon x = y + 1$
6. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon x = y + 1$
7. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon (y > 10 \Rightarrow y > x)$
8. $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} \colon (y \leq x \Rightarrow x < 10)$
9. $\forall x \in \mathbb{N}\ \big(\exists y \in \mathbb{N} \colon y \leq x\big) \Rightarrow x < 10$

Příklady s více proměnnými

$\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \colon (z > x \Rightarrow z > y)$

Příklady s více proměnnými

$\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (z > x \Rightarrow z > y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon \big(x < y \Rightarrow \exists z\colon (x < z)\ \&\ (z < y)\big)$

Příklady s více proměnnými

$\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} \colon (z > x \Rightarrow z > y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \colon \big(x < y \Rightarrow \exists z \colon (x < z)\ \&\ (z < y)\big)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \colon \ \big(\forall z \in \mathbb{R} \colon z^2 > y\big) \Rightarrow y < x$

Příklady s více proměnnými

$\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R}\colon (z > x \Rightarrow z > y)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon \big(x < y \Rightarrow \exists z\colon (x < z)\ \&\ (z < y)\big)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon\ \big(\forall z \in \mathbb{R}\colon z^2 > y\big) \Rightarrow y < x$
4. $(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\colon x < y) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{R}\ \exists w \in \mathbb{R}\colon z > w)$

Příklady

1. Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kterou

$$\forall x \in M\, \exists y \in M \colon y < x \text{ platí, ale}$$

$$\forall y \in M\, \exists x \in M \colon y < x \text{ neplatí}$$

Příklady

1. Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kterou

$$\forall x \in M\, \exists y \in M \colon y < x \text{ platí, ale}$$

$$\forall y \in M\, \exists x \in M \colon y < x \text{ neplatí}$$

2. Najděte reálnou funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0 \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ platí, ale}$$

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ neplatí.}$$

Příklady

1. Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kterou
$$\forall x \in M \, \exists y \in M \colon y < x \text{ platí, ale}$$
$$\forall y \in M \, \exists x \in M \colon y < x \text{ neplatí}$$
2. Najděte reálnou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou
$$\forall x \in \mathbb{R} \, \exists \varepsilon > 0 \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ platí, ale}$$
$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ neplatí.}$$
3. Najděte množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou tvrzení
$$(\forall x \in A \colon x > 10) \Rightarrow (\forall x \in A \colon x > 15) \text{ platí, ale}$$
$$\forall x \in A \colon \ (x > 10 \Rightarrow x > 15) \text{ neplatí.}$$

Příklady

1. Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kterou

$$\forall x \in M \, \exists y \in M \colon y < x \text{ platí, ale}$$

$$\forall y \in M \, \exists x \in M \colon y < x \text{ neplatí}$$

2. Najděte reálnou funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou

$$\forall x \in \mathbb{R} \, \exists \varepsilon > 0 \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ platí, ale}$$

$$\exists \varepsilon > 0 \, \forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ neplatí.}$$

3. Najděte množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou tvrzení

$$(\forall x \in A \colon x > 10) \Rightarrow (\forall x \in A \colon x > 15) \text{ platí, ale}$$

$$\forall x \in A \colon \; (x > 10 \Rightarrow x > 15) \text{ neplatí.}$$

4. Najděte množinu $M \subseteq \mathbb{N}$, pro kterou

$$\forall x \in M \, \exists y \in M \colon x + y \in M \text{ platí, ale}$$

$$\forall x \in M \, \forall y \in M \colon x + y \in M \text{ neplatí}$$

Příklady

1. Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kterou
$$\forall x \in M\, \exists y \in M \colon y < x \text{ platí, ale}$$
$$\forall y \in M\, \exists x \in M \colon y < x \text{ neplatí}$$
2. Najděte reálnou funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou
$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0 \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ platí, ale}$$
$$\exists \varepsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \colon f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ neplatí.}$$
3. Najděte množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou tvrzení
$$(\forall x \in A \colon x > 10) \Rightarrow (\forall x \in A \colon x > 15) \text{ platí, ale}$$
$$\forall x \in A \colon (x > 10 \Rightarrow x > 15) \text{ neplatí.}$$
4. Najděte množinu $M \subseteq \mathbb{N}$, pro kterou
$$\forall x \in M\, \exists y \in M \colon x + y \in M \text{ platí, ale}$$
$$\forall x \in M\, \forall y \in M \colon x + y \in M \text{ neplatí}$$
5. Najděte posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ takovou, že
$$\forall i \in \mathbb{N}\, \exists j \in \mathbb{N}, j > i \colon a_i = a_j \text{ platí, ale}$$
$$\exists i \in \mathbb{N}\, \forall j \in \mathbb{N}, j > i \colon a_i = a_j \text{ neplatí.}$$

Příklady

1. Najděte reálnou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou

   $\forall K > 0\, \exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\colon y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x) + K$ platí, ale

   $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\colon y > x \Rightarrow \big(\forall K > 0\colon f(y) \leq f(x) + K\big)$ neplatí.

Příklady

1. Najděte reálnou funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou

$$\forall K > 0\, \exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} \colon y > x \Rightarrow f(y) \le f(x) + K \text{ platí, ale}$$
$$\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R} \colon y > x \Rightarrow \big(\forall K > 0 \colon f(y) \le f(x) + K\big) \text{ neplatí.}$$

2. Najděte množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou

$$\forall x \in M\, \exists y \in M\, \forall z \in M \colon z > x \Rightarrow z \ge y \text{ platí, ale}$$
$$\forall y \in M\, \exists x \in M\, \forall z \in M \colon z > x \Rightarrow z \ge y \text{ neplatí.}$$

Příklady

1. Najděte reálnou funkci $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro kterou

   $\forall K > 0\, \exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\colon y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x) + K$ platí, ale
   $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\colon y > x \Rightarrow \big(\forall K > 0\colon f(y) \leq f(x) + K\big)$ neplatí.

2. Najděte množinu $M \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou

   $\forall x \in M\, \exists y \in M\, \forall z \in M\colon z > x \Rightarrow z \geq y$ platí, ale
   $\forall y \in M\, \exists x \in M\, \forall z \in M\colon z > x \Rightarrow z \geq y$ neplatí.

3. Najděte množinu přirozených čísel $M \subseteq \mathbb{N}$, pro níž

   $\forall k \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\colon (m \geq n \,\&\, m \leq n + k) \Rightarrow m \in M$ platí, ale
   $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N}\colon (m \geq n \,\&\, m \leq n + k) \Rightarrow m \in M$ neplatí.