Konečné automaty

Pojem „automat“ je historicky spojen s nějakou konstruktivní, algoritmickou procedurou rozhodující nějaký problém, či abstraktněji řečeno, rozhodující o tom, zda nějaký prvek patří do dané množiny (např. zda vstupní číslo je prvočíslo nebo zda je sudé). V tomto smyslu se mluví i o „Turingově automatu“, ačkoli se dnes ustálil pojem „Turingův stroj“ a termín „konečný automat“ je rezervován pro jednodušší rozhodovací procedury, kterými se budeme zabývat zde.

Pro různé rozhodovací postupy se také objevuje rozlišení mezi determinismem a nedeterminismem. V některých případech má nedeterminismus větší sílu, v některých nikoli, v některých se to neví. V případě konečných automatů odpovídá determinismus a nedeterminismus rozlišení mezi *rozeznatelnými* a *racionálními* podmnožinami monoidu. Klíčovým výsledkem je zde ovšem Kleeneova věta, která ukazuje, že pro volný monoid nad konečnou abecedou (tedy pro monoid slov) je síla deterministických a nedeterministických automatů ekvivalentní. To je důvod, proč se v informatice často obecný rozdíl mezi racionálními a rozeznatelnými množinami ignoruje a mluví se prostě o *regulárních jazycích*. Z algebraického hlediska je ovšem rozlišení důležité a je poučné i pro jazyky nad konečnou abecedou.

Racionální podmnožiny monoidu. Nechť $(M, \cdot, 1_M)$ je monoid, tedy množina M s binární asociativní operací a neutrálním prvkem (jednotkou). Systémem racionálních podmnožin M, značíme $\mathrm{Rat}(M)$, je systém definován induktivně takto:

- $A \in \mathrm{Rat}(M)$ pro všechny konečné množiny A,
- pokud $A, B \in \mathrm{Rat}(M)$, pak také $A \cup B \in \mathrm{Rat}(M)$,
- pokud $A, B \in \mathrm{Rat}(M)$, pak také $A \cdot B \in \mathrm{Rat}(M)$,
- pokud $A \in \mathrm{Rat}(M)$, pak také $\langle A \rangle \in \mathrm{Rat}(M)$.

Součin množin přitom definujeme $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$ a uzávěrem $\langle A \rangle$ množiny A míníme nejmenší podmonoid M obsahující A.

Z induktivní definice racionálních množin plyne, že každou racionální množinu lze popsat jako posloupnost operací sjednocení, násobení a uzávěru aplikovaných na konečné množiny. Tuto posloupnost lze zapsat tzv. *regulárním výrazem*.

Regulárním výrazem nad abecedou Σ je každé správně utvořené slovo nad Σ a operačními symboly $\{\mathbf{1}, \mathbf{0}, +, \cdot, {}^*\}$, kde $\mathbf{1}$ a $\mathbf{0}$ jsou konstanty, $+$ a $\cdot$ jsou binární symboly a * je unární symbol.

Regulární výrazy jsou tedy dány následující induktivní definicí.

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$ a $a \in \Sigma$ jsou regulární výrazy (nazývané *atomické*);
- jsou-li r a s regulární výrazy, je i
  - $(r \cdot s)$
  - $(r + s)$
  - (r^*)

regulární výraz.

Symbol * se nazývá *Kleeneova hvězda*. Pokud přijmeme obvyklou přednost symbolu násobení před symbolem sčítání a přednost Kleeneovy hvězdy před symboly sčítání a násobení, můžeme vynechávat některé závorky. Symbol násobení také obvykle nahrazujeme prostým zřetězením. Výrazy $r \cdot r^*$ a $r^* \cdot r$ se obvykle zkracují na r^+ (tzv. *Kleeneovo plus*).

Rozšířený regulární výraz je definován přidáním unárního symbolu $\overline{}$ a pravidla

- je-li r regulární výraz, je i $(\overline{r})$ regulární výraz.

Jak již bylo řečeno, každou racionální podmnožinu monoidu M lze definovat regulárním výrazem nad Σ, kde $M = \langle\Sigma\rangle$. A naopak, každý regulární výraz nad Σ definuje nějakou racionální podmnožinu M.

Souvislost je dána následujícími přirozenými pravidly.

- Regulárnímu výrazu $\mathbf{0}$ odpovídá prázdá množina;
- regulárnímu výrazu $\mathbf{1}$ odpovídá množina $\{1_M\}$;
- regulárnímu výrazu $a \in \Sigma$ odpovídá množina $\{a\}$;
- regulárnímu výrazu $(r \cdot s)$, kde r je regulární výraz odpovídající množině A a s je regulární výraz odpovídající množině B, odpovídá množina $A \cdot B$;
- regulárnímu výrazu $(r + s)$, kde r je regulární výraz odpovídající množině A a s je regulární výraz odpovídající množině B, odpovídá množina $A \cup B$;
- regulárnímu výrazu r^*, kde r je regulární výraz odpovídající množině A, odpovídá množina $\langle A\rangle$.

Konečná množina $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, kde

$$m_i = a_{i,1}a_{i,2}\cdots a_{i,k_i},$$

$a_i \in \Sigma$, je přitom definována regulárním výrazem

$$a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,k_1} + a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,k_2} + \cdots + a_{n,1}a_{n,2}\cdots a_{n,k_n}.$$

Pro rozšířený regulární výraz navíc platí, že

- regulárnímu výrazu $\overline{r}$, kde r je regulární výraz odpovídající množině A, odpovídá množina $\Sigma^* \setminus A$ (tedy doplněk A v Σ^*).

Poznamenejme, že $\mathrm{Rat}(M)$ obecně není uzavřena na komplement. Z Kleeneovy věty (níže) ovšem vyplyne, že na komplement jsou uzavřeny regulární jazyky (tedy racionální množiny slov nad konečnou abecedou), protože v deterministických automatech lze získat komplement pomocí komplementu množiny přijímajících stavů. Pro jazyky nad konečnou abecedou je tedy možné uvažovat rozšířené regulární výrazy. Uvedená korespondence je rovněž důvodem, proč se racionální množiny někdy označují jako „regulární množiny“ i v obecném případě.

Nedeterministické automaty nad monoidem. *Nedeterministický M-automat* $\mathcal{A}$ je čtveřice (Q, δ, I, F), kde Q je množina *stavů*, $\delta \subseteq Q \times M \times Q$ je *přechodová relace*, $I \subseteq Q$ je *množina počátečních stavů* a $F \subseteq Q$ je množina *přijímajících stavů*. Automat se nazývá *konečný*, pokud je δ konečná množina.

Prvek $(q, m, q') \in \delta$ si typicky představujeme jako šipku vedoucí ze stavu q do stavu q' a označenou popiskou m a celý automat jako orientovaný graf s ohodnocenými hranami. Automat *přijímá* prvek $m \in M$, pokud v takto definovaném grafu existuje cesta z počátečního stavu do nějakého přijímajícího stavu jejíž ohodnocení je rovno m. Přesněji, taková *přijímající cesta* prvku m je posloupnost $(q_0, m_1, q_1, m_2, q_2, \ldots, m_k, q_k)$, kde $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$, $(q_{i-1}, m_i, q_i) \in \delta$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, k$, $q_0 \in I$ a $q_k \in F$. Množinu prvků přijímaných nedeterministickým automatem $\mathcal{A}$ značíme $L(\mathcal{A})$. (Říkáme také, že $\mathcal{A}$ *přijímá* $L(\mathcal{A})$. Dvojznačnost mezi termíny „přijímaný prvek“ a „přijímaná množina“ by neměla působit zmatek.) Automaty přijímající stejnou množinu nazýváme *ekvivalentní*.

Všimněme-si, že definice dovoluje tzv. *ε-přechody*, tedy prvky $(q, 1_M, q')$. To níže umožní některé elegantní konstrukce. Na druhou stranu bychom někdy chtěli uvažovat automaty bez ε-přechodů. Ještě přísněji, pro nějakou podmnožinu $\Sigma \subseteq M$ můžeme uvažovat *nedeterministický M-automat nad* Σ, kde $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$.

Podmínky na přechodovou funkci můžeme naopak uvolnit a dovolit, aby hrany byly ohodnoceny racionálními množinami, tj. $\delta \subseteq Q \times \mathrm{Rat}(M) \times Q$. Pak mluvíme o *nedeterministickém M-automatu nad* $\mathrm{Rat}(M)$. Přijímající cesta prvku m je pak definována jako posloupnost $(q_0, A_1, q_1, A_2, q_2, \ldots, A_k, q_k)$, kde $(q_{i-1}, A_i, q_i) \in \delta$, $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$ pro nějaká $m_i \in A_i$ a $q_k \in F$.

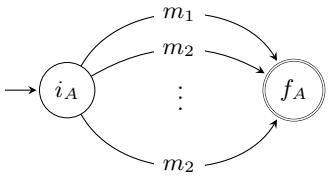
Množiny přijímané konečnými nedeterministickými automaty přesně odpovídají racionálním množinám monoidu M v následujícím smyslu:

Věta. *Nechť je M monoid, $A \subseteq M$ a $M = \langle \Sigma \rangle$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(1) $A \in \mathrm{Rat}(M)$*;*
(2) existuje konečný nedeterministický M-automat přijímající A;
(3) existuje konečný nedeterministický M-automat nad Σ s jediným vstupním stavem přijímající A;
(4) existuje konečný nedeterministický M-automat nad $\mathrm{Rat}(M)$ *přijímající A.*

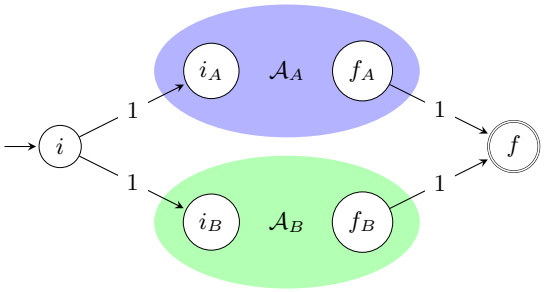
Důkaz.
(1) $\Rightarrow$ (2) Indukcí podle definice racionální množiny zkonstruujeme automat, který jazyk přijímá (jde o tzv. *Thompsonovu konstrukci*).

- Je-li $A = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ konečná množina, má konečný automat tvar

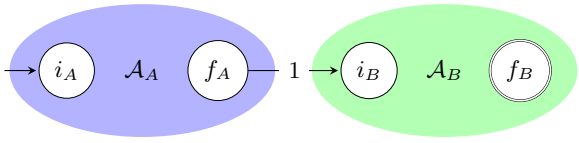


- Máme-li automaty pro množiny A a B, získáme automaty pro $A \cdot B$ a $A \cup B$ takto:

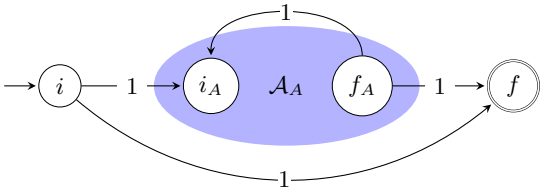
$A \cup B$:



$A \cdot B$:



- Automat pro $\langle A \rangle$ získáme z automatu pro A takto:



(Vnější vstupní a přijímající stavy s ε-přechodem jsou zde přidány proto, aby automat přijímal jedničku. Pokud jazyk A už jedničku přijímá, stačilo by přidat pouze hranu vedoucí z f_A do i_A. Všimněme si, že obecně nelze jedničku do jazyka přidat ε-přechodem z i_A do f_A, protože tak bychom mohli nepatřičně přidat prvky odpovídající cestám z f_A do f_A neprocházejícím počátečním stavem.)

(2) $\Rightarrow$ (3) Vzhledem k tomu, že Σ generuje M, lze každý přechod (q, m, q'), kde $m \neq 1$, nahradit přechody (q, s_0, q_1), (q_1, s_1, q_2), $\ldots$, (q_k, s_k, q'), kde q_i jsou nové stavy, $s_i \in \Sigma$ a $m = s_1 s_2 \cdots s_k$.

Zbývá eliminovat ε-přechody. Těm se také někdy říká „spontánní“ přechody, protože za přítomnosti přechodu $(q, 1, q')$ lze stav q kdykoli podle libosti zaměnit za q'. Takové spontánní přechody lze odstranit tím, že již při vstupu do stavu q „donutíme“ automat, aby se „rozhodl“, zda chce spontánní přechod využít, nebo ne. Formálně budeme postupovat takto. Nejprve přidáme nový počáteční stav a z něj jdoucí ε-přechody do dosavadních počátečních stavů, přičemž tento nový počáteční stav bude nadále jediným počátečním stavem. Dále vytvoříme tranzitivní uzávěr ε-přechodů, to znamená, že přidáme nové ε-přechody tak, aby přítomnost přechodů $(q, 1, q')$ a $(q', 1, q'')$ implikovala přítomnost přechodu $(q, 1, q'')$. Nyní pro všechny dvojice přechodů (s, m, q), (q, ε, q'), kde $m \neq 1$, přidáme přechod (s, m, q') a poté všechny ε-přechody odstraníme.

Získáme tak automat v požadovaném tvaru. Ověření, že je ekvivalentní automatu původnímu, je přímočaré. Stačí z přijímající cesty odstranit (nebo do ní pro opačnou inkluzi přidat) příslušné ε-přechody.

(3) $\Rightarrow$ (4) Stačí nahradit každý přechod (q, m, q') přechodem $(q, \{m\}, q')$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Nechť jsou stavy automatu q_1, q_2,$\ldots$, q_n. Automat nejprve upravíme tak, aby měl jediný vstupní stav, do kterého nevedou žádné (neprázdné) přechody, a jediný přijímající stav, ve kterém žádné (neprázdné) přechody nezačínají. To lze docílit přidáním nového počátečního (resp. nového koncového) stavu q_0 (resp. q_{n+1}) a přidáním ε-přechodů do původních počátečních (resp. z původních přijímajících) stavů. Dále můžeme předpokládat, že pro libovolnou dvojici stavů (q_i, q_j), včetně smyček (q_i, q_i), existuje právě jeden přechod $(q_i, A_{i,j}, q_j)$, protože násobné přechody můžeme sloučit pomocí sjednocení jazyků a pro neexistující přechody definujeme $A_{i,j} = \emptyset$.

Nyní postupně eliminujeme všechny stavy kromě q_0 a q_{n+1} takto: Odstraníme zvolený vrchol q_i a pro všechna $j, k \neq i$ definujeme nové jazyky

$$A'_{j,k} = A_{j,k} \cup A_{j,i} \langle A_{i,i} \rangle A_{i,k}.$$

Je opět přímočaré ověřit, že nově vzniklý automat je ekvivalentní původnímu. Libovolný úsek přijímající cesty tvaru $q_j, m_1, q_i, m_2, q_i, m_3, \ldots, q_i, m_\ell, q_k$ v původním automatu totiž odpovídá cestě q_j, m, q_k, kde $m = m_1 m_2 \cdots m_\ell \in A'_{j,k}$, a naopak.

Nové jazyky jsou přitom všechny racionální. Po odstranění všech vrcholů tedy zůstane jediný (neprázdný) přechod (q_0, A, q_{n+1}) a $A \in \mathrm{Rat}(M)$. □

Rozpoznatelné podmnožiny monoidu. Jiným způsobem, jak efektivně popsat podmnožinu monoidu je pojem rozpoznatelnosti. Řekneme, že *monoid N rozeznává množinu $L \subseteq M$*, pokud existuje homomorfismus $\varphi : M \to N$ takový, že $L = \varphi^{-1}\varphi(L)$.

Připomeňme, že *jádrem* homomorfismu φ rozumíme ekvivalenci $\sim_\varphi$ definovanou:

$$u \sim_\varphi v, \text{ právě když } \varphi(u) = \varphi(v).$$

Přitom platí, že jádro homomorfismu je vždy kongruence; a naopak, každá kongruence $\sim$ na M definuje homomorfismus (*přirozenou projekci*)

$$\varphi : M \to M/_\sim$$

vztahem $\varphi(u) = [u]$, jehož jádrem je právě $\sim$ (kde $[u]$ značí třídu, ve které leží u).

Je tedy vidět, že monoidy rozeznávající množinu L jsou dány kongruencemi monoidu M, pro které platí, že L se rozkládá na třídy této kongruence. Nechť je $\sim$ taková kongruence. Pak $u \sim v$ implikuje $rus \sim rvs$ pro každé r a s, neboli

$$\forall r, s \in M : \ rus \in L \Leftrightarrow rvs \in L. \tag{1}$$

Přímočaře lze ověřit, že pokud definujeme ekvivalenci $u \sim_L v$ vztahem (2), dostaneme kongruenci. Ta se nazývá *syntaktická kongruence* množiny L, monoid $\mathrm{Synt}(L) := M/\sim_L$ se nazývá *syntaktický monoid* množiny L a příslušná přirozená projekce se nazývá *syntaktický homomorfismus*. Z definice je vidět, že je to největší kongruence, pro kterou se množina L rozkládá na třídy. („Největší“ znamená, že má nejmenší počet tříd a všechny ostatní jsou jejím zjemněním.) Monoid $M/_{\sim_L}$ se nazývá *syntaktický monoid* množiny L, a je to tedy nejmenší monoid rozeznávající množinu L, a to pomocí přirozené projekce $u \mapsto [u]$.

Deterministické automaty nad monoidem. *Deterministický M-automat* je čtveřice $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$. Podobně jako u nedeterministého automatu je Q množina *stavů*, $q_0 \in Q$ je *počáteční stav* a $F \subseteq Q$ je množina *přijímajících stavů*. Namísto přechodové relace ovšem máme *přechodovou funkci* $\delta : Q \times M \to Q$, která pro všechna $u, v \in M$ a všechna $q \in Q$ splňuje $\delta(\delta(q, u), v) = \delta(q, u \cdot v)$, a $\delta(q, 1_M) = q$. Namísto $\delta(q, u)$ píšeme $q \cdot u$, a podmínky potom mají tvar

$$(q \cdot u) \cdot v = q \cdot (u \cdot v),$$
$$q \cdot 1 = q\,.$$

(Všimněte si, že používáme znak násobení ve dvou různých významech.) Deterministický automat se nazývá *konečný*, pokud je množina stavů Q konečná. Automat $\mathcal{A}$ *přijímá* množinu

$$L(\mathcal{A}) = \{u \in M \mid q_0 \cdot u \in F\}.$$

Homomorfismus $\varphi : M \to N$, s jehož pomocí rozeznává N množinu $L \subseteq M$, přirozeně definuje deterministický automat $\mathcal{A}_\varphi = (\varphi(M), \delta, 1_N, F)$ nad M, kde δ je definováno předpisem $\varphi(u) \cdot v = \varphi(u \cdot v)$ a $F = \varphi(L)$. Snadno ověříme, že $L(\mathcal{A}_\varphi) = L$.

Uvažujme naopak deterministický automat $\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, F)$ nad M. Každé slovo $u \in M$ určuje zobrazení $\delta_u : Q \to Q$ dané vztahem $\delta_u(q) = q \cdot u$, tzv. *transformaci množiny* stavů. Na transformacích definujeme binární operaci jako skládání zleva:

$$\delta_u \cdot \delta_v := \delta_{uv},$$

čímž vznikne *transformační monoid automatu* $\mathcal{A}$:

$$T(\mathcal{A}) := (\{\delta_u \mid u \in M\}, \cdot, \mathrm{id})\,.$$

Snadno ověříme, že monoid $T(\mathcal{A})$ rozeznává $L(\mathcal{A})$ pomocí homomorfismu $\varphi : u \mapsto \delta_u$.

Je-li množina $L \subseteq M$ rozeznávána nějakým konečným monoidem, nazývá se *rozpoznatelná*. Třídu rozpoznatelných podmnožin M značím $\mathrm{Rec}(M)$. Z dosavadních úvah plyne:

Věta. *Nechť $L \subseteq M$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- *L je rozpoznatelný;*
- *L je přijímán konečným deterministickým automatem nad M;*
- *syntaktická kongruence L je konečná.*

Minimální automat. Již jsme řekli, že nejmenší monoid N rozeznávající danou množinu $L \subseteq M$ je dán syntaktickou kongruencí jako $N = M/_{\sim_L}$. Prvky N nám současně posloužily jako stavy deterministického automatu, který přijímá L. Můžeme se ptát, zda je tento automat nejmenší možný (tj., zda má nejmenší možný počet stavů).

Je-li naopak dán automat (např. co nejmenší) přijímající L, sestrojili jsme k němu monoid rozeznávající L jako monoid transformací. Opět se můžeme ptát, zda se jedná o nejmenší takový monoid.

Je vidět, že odpověď nebude v obou případech kladná. Vyjdeme-li totiž od nějakého rozeznávajícího monoidu N, zkonstruujeme k němu automat a k tomuto automatu jeho monoid transformací, nedostaneme původní N, ale nějaký obecně větší monoid obsahující zobrazení $N \to N$. Pokud by měl být monoid transformací nejmenším přijímajícím monoidem, muselo by tedy být stavů nejmenšího automatu méně než prvků syntaktického monoidu. Je to možné?

Chceme-li snížit počet stavů na minimum, uvažujme následovně. Stav automatu v daném okamžiku plně určuje, jak se bude automat dále chovat. Určuje zejména, jaké následující vstupy budou přijaty. To je také to jediné, co nás na daném stavu zajímá. Z toho plynou dva poznatky:

- pokud $q_0 \cdot u = q_0 \cdot v$, pak pro jakékoli $w \in M$ platí, že $uw \in L$ právě když $vw \in L$;
- stav $q_u = q_0 \cdot u$ je plně charakterizován jazykem přijímaným z q_u, což je jazyk $L(u) := \{w \in M \mid uw \in L\}$. Jazyk $L(u)$ se často značí $u^{-1}L$ a takové jazyky nazýváme *levé kvocienty* L.

Levé kvocienty, označme jejich množinu Q_L, tedy tvoří stavy minimálního deterministického automatu $\mathcal{A}_L = (Q_L, \delta, 1_M, F)$ přijímajícího L, kde přechodová funkce je definována podobně jako výše předpisem $L(u) \cdot v = L(u \cdot v)$.

Levé kvocienty definují tzv. *Myhillovu-Nerodovu* ekvivalenci $\sim_R$, kde $u \sim_R v$, právě když $L(u) = L(v)$. Tato ekvivalence typicky není kongruence (ověřte!), nicméně pro každé $s \in M$ platí $u \sim_R v \Rightarrow u \cdot s \sim_R v \cdot s$.

S použitím „lingvistických“ termínů lze říct, že Myhillova-Nerodova ekvivalence ztotožňuje prvky, které mají v L stejný *pravý kontext*. Podobně lze syntaktickou kongruenci definovat jako ekvivalenci ztotožňující prvky se stejným (oboustranným) *kontextem* definovaným pro u jako množina $C_L(u) = \{(r, s) \mid rus \in L\}$. Syntaktická kongruence je tedy zjemněním Myhillovy-Nerodovy ekvivalence.

Otázky z úvodu tohoto oddílu jsou tedy zodpovězeny následující větou.

Věta. *Monoid transformací minimálního automatu je isomorfní syntaktickému monoidu.*

Důkaz. Nechť $\delta_u \in T(\mathcal{A}_L)$ značí transformaci $L(r) \mapsto L(ru)$. Ukážeme, že zobrazení $\delta_u \mapsto [u]$ je isomorfismus $T(\mathcal{A}_L)$ a $\mathrm{Synt}(M)$. Zobrazení je surjektivní homomorfismus, protože

$$\delta_u \cdot \delta_v = \delta_{uv} \mapsto [uv] = [u] \cdot [v].$$

(Poznamenejme, že $[u] \cdot [v]$ zde značí součin tříd kongruence. Všechny předchozí rovnosti tedy triviálně plynou z definic.) Zbývá ukázat, že zobrazení je prosté.

Nerovnost $\delta_u \neq \delta_v$ znamená, že

$$\delta_u(L(r)) = L(ru) \neq L(rv) = \delta_v(L(r))$$

pro nějaké $r \in M$. Existuje tedy $s \in M$, pro které $rus \in L$ není ekvivalentní $rvs \in L$. Tedy $[u] \neq [v]$, což jsme chtěli ukázat. □

Vztah racionálních a rozpoznatelných podmnožin.

Věta (McKnight)**.** *Inkluze* $\mathrm{Rec}(M) \subseteq \mathrm{Rat}(M)$ *platí, právě když je monoid* M *konečně generovaný.*

Důkaz. Je snadné ověřit, že každá racionální množina leží v konečně generované nadmnožině. Současně platí, že M je vždy rozpoznatelná triviálním monoidem $\{1\}$. Pokud je tedy M nekonečně generovaný, je M rozpoznatelná množina, která není racionální.

Je-li naopak M generovaný konečnou množinou Σ a $\mathrm{Synt}(L)$ je konečný, pak lze přechodovou funkci deterministického automatu $\mathcal{A}_L$ nahradit konečnou přechodovou relací, která obsahuje všechny trojice (q, u, q'), kde $s \in \Sigma$, $q \in Q_L$ a kde $q' = q \cdot u$ je dáno přechodovou funkcí $\mathcal{A}_L$. □

Druhá implikace předchozího důkazu ukazuje rozdíl mezi konečností deterministického a nedeterministického automatu. Chápeme-li automat jako orientovaný graf s ohodnocenými hranami, znamená konečnost deterministického automatu pouze konečný počet vrcholů, nikoli konečný počet hran. Definice přechodové funkce naopak pro nekonečný monoid M počítá s nekonečným počtem hran vycházejícím z každého vrcholu. Přechod ke konečnému nedeterministickému automatu spočívá v redukci těchto hran pouze na ty, které jsou ohodnoceny generujícími prvky.

Věta (Kleene)**.** *Pro konečnou abecedu* Σ *platí* $\mathrm{Rec}(\Sigma^*) = \mathrm{Rat}(\Sigma^*)$.

Důkaz. Díky McKnightově větě zbývá ukázat, že každá racionální podmnožina Σ^* je rozpoznatelná. Díky charakterizacím $\mathrm{Rat}(M)$ a $\mathrm{Rec}(M)$ pomocí automatů stačí ukázat, že nedeterministický Σ^*-automat $\mathcal{A} = (Q, \delta, I, F)$ nad Σ lze transformovat na deterministický Σ^*-automat.

Množinou stavů hledaného deterministického automatu bude potenční množina $\mathcal{P}(Q)$, počátečním stavem je I a množinou přijímajících stavů je $F' = \{S \mid S \cap F \neq \emptyset\}$. Klíčovým krokem důkazu je následující definice přechodové funkce. Nechť $S \in \mathcal{P}(Q)$, a $a \in \Sigma$. Pak

$$S \cdot a = \{q \in Q \mid (q', a, q) \in \delta \text{ pro nějaké } q' \in S\}.$$

Na základě tohoto předpisu dostáváme z asociativního požadavku na deterministický automat induktivní definici $S \cdot v = (S \cdot u) \cdot a$, kde $v = ua$, $v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$, přičemž $S \cdot \varepsilon = S$ pro všechna $S \in \mathcal{P}(Q)$. Tato definice je korektní díky tomu, že každé slovo má jednoznačný rozklad na součin písmen.

Je nyní snadné ověřit (indukcí), že $I \cdot v \in F'$, právě když existuje přijímající cesta v $\mathcal{A}$. □

- Ukažte, že $\{0\}$ není rozpoznatelnou množinou monoidu $(\mathbb{Z}, +)$ (a inkluze z věty je tedy v tomto případě ostrá).
- Co selže při pokusu rozšířit nedeterministický automat přijímající $\{0\}$ v $(\mathbb{Z}, +)$ na deterministický?
- Je $\{0\}$ rozpoznatelnou množinou monoidu $(\mathbb{N}, +)$?
- Je $\mathbb{N}$ racionální množinou monoidu $(\mathbb{N}, \cdot)$?

Poznámka: Monoidy, pro které platí Kleeneova věta, se nazývají *Kleeneho monoidy*. Viděli jsme, že volný, konečně generovaný monoid je Kleeneho monoid. Je možné tuto podmínku zeslabit? Předpokládejme, že Σ je konečná generující množina monoidu M. Definice přechodové funkce na generátorech je vždy korektní. Problematická je jednoznačnost definice $S \cdot u$, pokud má u více faktorizací na generátory. To se můžeme pokusit obejít následujícím způsobem. Definujme

$$S \cdot u = \bigcup_{u=v \cdot a} (S \cdot v) \cdot a \,.$$

Neboli: $S \cdot u$ je množina stavů, do kterých se lze dostat z nějakého stavu S nějakou faktorizací $u = v \cdot a$, kde $a \in \Sigma$. To je induktivní definice, která je korektní, pokud na M existuje uspořádání $<$ kompatibilní s monoidovou operací, tj. splňující, že $v < v \cdot a$ pro všechna $v \in M$ a všechna $a \in \Sigma$.

Syntaktická kongruence a syntaktický monoid. Řekneme, že *monoid M rozeznává jazyk $L \subseteq \Sigma^*$*, pokud existuje množina $F \subseteq M$ a homomorfismus $\varphi : \Sigma^* \to M$ takové, že $w \in L$, právě když $\varphi(w) \in F$; neboli $L = \varphi^{-1}(F)$. Množinu F přitom nemusíme předem zmiňovat, protože zjevně $F = \varphi(L)$. Stačí tedy požadovat existenci homomorfismu φ, pro který je $L = \varphi^{-1}\varphi(L)$.

Připomeňme, že *jádrem* homomorfismu φ rozumíme ekvivalenci $\sim_\varphi$ definovanou:

$$u \sim_\varphi v, \text{ právě když } \varphi(u) = \varphi(v).$$

Přitom platí, že jádro homomorfismu je vždy kongruence; a naopak, každá kongruence $\sim$ na Σ^* definuje homomorfismus

$$\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*/_\sim$$

vztahem $\varphi(u) = [u]$, jehož jádrem je právě $\sim$ ($[u]$ značí třídu, ve které leží u).

Je tedy vidět, že monoidy rozeznávající jazyk L jsou dány kongruencemi monoidu Σ^*, pro které platí, že L se rozkládá na třídy této kongruence. Nechť je $\sim$ taková kongruence. Pak $u \sim v$ implikuje $rus \sim rvs$ pro každé r a s, neboli

$$\forall r, s \in \Sigma^* : \; rus \in L \Leftrightarrow rvs \in L. \tag{2}$$

Přímočaře lze ověřit, že pokud definujeme ekvivalenci $u \sim_S v$ vztahem (2), dostaneme kongruenci. Ta se nazývá *syntaktická kongruence* jazyka L. Z definice je vidět, že je to největší kongruence, pro kterou se jazyk L rozkládá na třídy. („Největší“ znamená, že má nejmenší počet tříd a všechny ostatní jsou jejím zjemněním.) Monoid $\Sigma^*/_{\sim_S}$ se nazývá *syntaktický monoid* jazyka L, a je to tedy nejmenší monoid rozeznávající jazyk L. Uvidíme, že jazyk je regulární, právě když je jeho syntaktický monoid konečný.

Pravá kongruence a minimální automat. Definujme

$$C_L(u) = \{(r, s) \mid rus \in L\}$$

množinu *kontextů* slova u v jazyce L. Syntaktická kongruence spojuje právě ta slova, která mají stejnou množinu kontextů. Tuto podmínku můžeme oslabit a definovat ekvivalenci $\sim_R$ (nazývanou též *Myhillova-Nerodova ekvivalence*) pouze pomocí pravých kontextů, tedy podmínkou

$$u \sim_R v \quad \text{právě když} \quad \forall s \in \Sigma^* : \ us \in L \Leftrightarrow vs \in L. \tag{3}$$

Tato ekvivalence nemusí být kongruencí (ověřte!). Je to ale tzv. *pravá kongruence* (nebo též *doprava invariantní ekvivalence*), tedy ekvivalence splňující, že $u \sim v$ implikuje $us \sim vs$ pro všechna s. Že $\sim_R$ je pravá kongruence, plyne přímočaře z (3)(ověřte!).

Je také snadné ověřit, že $\sim_R$ je největší pravá kongruence taková, že L se rozkládá na její třídy. Mějme totiž nějakou takovou pravou kongruenci $\sim$. Pak $u \sim v$ implikuje $(\forall s : \ us \sim vs)$, tedy z rozložitelnosti L na třídy dostáváme $(\forall s : \ us \in L \Leftrightarrow vs \in L)$, a proto $u \sim_R v$.

Uvažujme nyní nějaký konečný automat s počátečním stavem q_0. Pokud $q_0 \cdot u = q_0 \cdot v$, pak i pro každé s platí $q_0 \cdot us = q_0 \cdot vs$, tedy $u \sim_R v$. Ekvivalence $\sim_R$ identifikuje slova, která vedou ke stejnému stavu. Tím je dokázáno, že pro každý regulární jazyk má ekvivalence $\sim_R$ konečný index (tj. konečný počet tříd): tříd je nejvýše tolik, kolik je stavů automatu (tedy automat má alespoň tolik stavů, kolik je tříd).

To vede k nápadu, vytvořit automat, jehož stavy budou naopak pro daný jazyk odpovídat třídám ekvivalence $\sim_R$. Takový automat skutečně existuje a je to nejmenší automat rozeznávající daný jazyk. Nechť je tedy L regulární jazyk. Deterministický automat

$$\mathcal{A} = (\Sigma^*/_{\sim_R}, \Sigma, [\varepsilon], \delta, L/_{\sim_R}),$$

kde přechodová funkce δ je dána vztahem $[w] \cdot a = [wa]$, se nazývá *minimální automat jazyka* L. Ověřit, že $\mathcal{A}$ rozeznává L, je přímočaré (proveďte!). Výše jsme viděli, že počet stavů automatu nemůže být menší než index $\sim_R$, a $\mathcal{A}$ je tedy opravdu minimální, co do počtu stavů.

Je-li $\mathcal{A}'$ nějaký deterministický automat se stejným počtem stavů jako minimální automat (a počátečním stavem q_0), je snadné ověřit (proveďte!), že zobrazení $\psi : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ dané předpisem $\psi : q \mapsto [u]$, kde u je nějaké slovo splňující $q_0 \cdot u = q$, je isomorfismus automatů. Takové slovo určitě existuje, protože jinak by byl stav q nedosažitelný a bylo by možné ho ve sporu s minimalitou automatu vynechat. Minimální automat je tedy jediný až na isomorfismus.

Syntaktický monoid a přechody minimálního automatu. Viděli jsme, že syntaktická kongruence definuje minimální monoid rozeznávající daný jazyk, zatímco Myhillova-Nerodova ekvivalence definuje minimální takový automat. Ukážeme, jaká je mezi oběma objekty souvislost.

Uvažujme deterministický automat $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$. Každé slovo $u \in \Sigma^*$ určuje zobrazení $\tau_u : Q \to Q$ dané vztahem $\tau_u(q) = q \cdot u$, tzv. *transformaci množiny* stavů. Na transformacích definujeme operaci skládání zleva:

$$\tau_u \circ \tau_v(q) := \tau_v(\tau_u(q)),$$

čímž vznikne *transformační monoid automatu* $\mathcal{A}$:

$$T := (\{\tau_u \mid u \in \Sigma^*\}, \circ).$$

Souvislost mezi syntaktickým monoidem a minimálním automatem je nyní dána následujícím tvrzením.

Věta. *Syntaktický monoid jazyka L je isomorfní transformačnímu monoidu jeho minimálního automatu.*

Důkaz. Ukážeme, že zobrazení $\psi : [u] \mapsto \tau_u$ je hledaný isomorfismus $\Sigma/_\sim$ a T. Nejprve ověřme, že ψ je dobře definované, tj. $u \sim v$ implikuje $\tau_u = \tau_v$. Nechť $\tau_u \neq \tau_v$. Existuje tedy $[s] \in \Sigma/_\sim$ takové, že $\tau_u([s]) \neq \tau_v([s])$. Z definic dostáváme

$$\tau_u([s]) = [s] \cdot u = [su] \neq \tau_v([s]) = [s] \cdot u = [sv].$$

Tedy $su \not\sim sv$, a proto také $u \not\sim v$.

Platí $\tau_{uv} = \tau_u \circ \tau_v$ (ověřte!), a ψ je tedy homomorfismus. Protože je zjevně na, zbývá ukázat, že je prostý. Nechť $[u] \neq [v]$. Pak existují slova r, s taková, že $rus \in L$ není ekvivalentní $rvs \in L$. Tudíž $[rus] \neq [rvs]$, proto i $[ru] \neq [rv]$, a tedy $[r] \cdot u \neq [r] \cdot v$. To znamená, že $\tau_u([r]) \neq \tau_v([r])$, a tedy $\tau_u \neq \tau_v$. □