3. seminář z Matematických dovedností

Kvantifikátory, logické výroky

19. října

Zápočtový test

Plánuje se 1. zápočtový test ve středu 21. 10. od 17:20 na cca 30 minut, v prostředí Moodle.

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y\colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y\colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y\colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y : (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$
6. Pro každé číslo x lze najít y takové, že žádné číslo, které je násobkem deseti, není menší než součin x a y.

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y : (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$
6. Pro každé číslo x lze najít y takové, že žádné číslo, které je násobkem deseti, není menší než součin x a y.
7. $A \vee (\neg D \wedge \neg C) \vee \neg(X \wedge Y)$

$\neg A \mathbin{\&} \neg(\neg D \mathbin{\&} \neg C) \mathbin{\&} (X \mathbin{\&} Y)$

$\neg A \mathbin{\&} (D \vee C) \mathbin{\&} (X \mathbin{\&} Y)$

Příklad z minula

Zformulujte negace následujících tvrzení:

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y: (x > y \Rightarrow x > 0)$. $\exists x \ \neg(\exists y: x > y \Rightarrow x > 0)$
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$ $\quad (D \mathbin{\&} \neg E) \mathbin{\&} (\neg B \mathbin{\&} \neg E)$
6. Pro každé číslo x lze najít y takové, že žádné číslo, které je násobkem deseti, není menší než součin x a y. $\forall x \exists y \forall z, 10|z: z \geq xy$

   $\exists x \forall y \exists z, 10|z: z < xy$
7. $A \vee (\neg D \wedge \neg C) \vee \neg(X \wedge Y)$
8. $(\forall y \forall x \ \neg P(x, y)) \Rightarrow (\exists w \ (Z(w) \Rightarrow W(w)))$

   $(\forall y \forall x: \neg P(x,y)) \mathbin{\&} (\forall w: Z(w) \mathbin{\&} \neg W(w))$

$\exists x \forall y: x > y \mathbin{\&} x \leq 0$

④ $\forall u \exists k \in u: (\neg \check{c}ern\acute{a}(k) \mathbin{\&} \neg b\acute{i}l\acute{a}(k))$

$\exists u \forall k \in u: \check{c}ern\acute{a}(k) \vee b\acute{i}l\acute{a}(k)$

$\neg(\forall x: N\check{e}co(x)) \Leftrightarrow \exists x: \neg N\check{e}co(x)$

Zjednodušování a ekvivalence složitějších výrazů

Nechť A a B jsou nějaké výroky. Jak zapsat následující výroku jednodušseji? Jsou některé z nich navzájem ekvivalentní?

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ je ekvivalentní $B \Rightarrow A$, nebo také $\neg(\neg A \,\&\, B)$ tj. $A \vee \neg B$

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	1
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Zjednodušování a ekvivalence složitějších výrazů

Nechť A a B jsou nějaké výroky. Jak zapsat následující výroku jednodušseji? Jsou některé z nich navzájem ekvivalentní?

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$

Zjednodušování a ekvivalence složitějších výrazů

Nechť A a B jsou nějaké výroky. Jak zapsat následující výroku jednodušseji? Jsou některé z nich navzájem ekvivalentní?

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$
3. $(B \Rightarrow A) \vee (\neg A \,\&\, B)$

Zjednodušování a ekvivalence složitějších výrazů

Nechť A a B jsou nějaké výroky. Jak zapsat následující výroku jednodušseji? Jsou některé z nich navzájem ekvivalentní?

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$
3. $(B \Rightarrow A) \vee (\neg A \mathbin{\&} B)$
4. $\neg(B \Rightarrow A) \Rightarrow A$

Zjednodušování a ekvivalence složitějších výrazů

Nechť A a B jsou nějaké výroky. Jak zapsat následující výroku jednodušseji? Jsou některé z nich navzájem ekvivalentní?

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg B$ tj. $\neg B$
3. $(B \Rightarrow A) \vee (\neg A \,\&\, B)$ tj. $A \vee \neg A$
4. $\neg(B \Rightarrow A) \Rightarrow A$ tj. $A \vee \neg B$
5. $(\neg A \vee B) \,\&\, (\neg A \Rightarrow \neg B)$ tj. $A \Leftrightarrow B$

A	B	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1

Zjednodušování a ekvivalence

Co když je proměnných příliš mnoho? Někdy pomohou známé vlastnosti logických spojek:

- Komutativita a asociativita & a $\vee$:
  $A \mathbin{\&} B$ je ekvivalentní $B \mathbin{\&} A$
  $A \vee B$ je ekvivalentní $B \vee A$
  $A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C)$ je ekvivalentní $(A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C$
  $A \vee (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \vee C$

Zjednodušování a ekvivalence

Co když je proměnných příliš mnoho? Někdy pomohou známé vlastnosti logických spojek:

- Komutativita a asociativita & a $\vee$:
  $A \,\&\, B$ je ekvivalentní $B \,\&\, A$
  $A \vee B$ je ekvivalentní $B \vee A$
  $A \,\&\, (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \,\&\, C$
  $A \vee (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \vee C$
- Vzájemná distributivita & a $\vee$:
  $A \,\&\, (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$
  $A \vee (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$

Zjednodušování a ekvivalence

Co když je proměnných příliš mnoho? Někdy pomohou známé vlastnosti logických spojek:

- Komutativita a asociativita & a $\vee$:
  $A \,\&\, B$ je ekvivalentní $B \,\&\, A$
  $A \vee B$ je ekvivalentní $B \vee A$
  $A \,\&\, (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \,\&\, C$
  $A \vee (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \vee C$
- Vzájemná distributivita & a $\vee$:
  $A \,\&\, (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$
  $A \vee (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
- Obměna implikace: $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní $\neg B \Rightarrow \neg A$

Zjednodušování a ekvivalence

Co když je proměnných příliš mnoho? Někdy pomohou známé vlastnosti logických spojek:

- Komutativita a asociativita & a $\vee$:
  $A \,\&\, B$ je ekvivalentní $B \,\&\, A$
  $A \vee B$ je ekvivalentní $B \vee A$
  $A \,\&\, (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \,\&\, C$
  $A \vee (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \vee C$
- Vzájemná distributivita & a $\vee$:
  $A \,\&\, (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$
  $A \vee (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
- Obměna implikace: $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní $\neg B \Rightarrow \neg A$
- Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní $A \,\&\, \neg B$

Zjednodušování a ekvivalence

Co když je proměnných příliš mnoho? Někdy pomohou známé vlastnosti logických spojek:

- Komutativita a asociativita $\&$ a $\vee$:
  $A \,\&\, B$ je ekvivalentní $B \,\&\, A$
  $A \vee B$ je ekvivalentní $B \vee A$
  $A \,\&\, (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \,\&\, C$
  $A \vee (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \vee C$
- Vzájemná distributivita $\&$ a $\vee$:
  $A \,\&\, (B \vee C)$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$
  $A \vee (B \,\&\, C)$ je ekvivalentní $(A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$
- Obměna implikace: $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní $\neg B \Rightarrow \neg A$
- Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní $A \,\&\, \neg B$
- Implikace jako disjunkce: $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní $\neg A \vee B$

Příklady

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

Rozmyslete:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow E)))$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D) \Rightarrow E$

$\neg A \vee (\neg B \vee (\neg C \vee (\neg D \vee E)))$

$\rightarrow (\neg A \vee \neg B \vee \neg C \vee \neg D) \vee E$

$\neg(A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D) \vee E$

Příklady

Rozmyslete:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow E)))$ je ekvivalentní $(A \;\&\; B \;\&\; C \;\&\; D) \Rightarrow E$
- $A \Rightarrow (B \;\&\; C \;\&\; D)$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow B) \;\&\; (A \Rightarrow C) \;\&\; (A \Rightarrow D)$

Příklady

Rozmyslete:

- $A \Rightarrow (B \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow E)))$ je ekvivalentní $(A \,\&\, B \,\&\, C \,\&\, D) \Rightarrow E$
- $A \Rightarrow (B \,\&\, C \,\&\, D)$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow B) \,\&\, (A \Rightarrow C) \,\&\, (A \Rightarrow D)$
- $(A \,\&\, B \,\&\, C) \Rightarrow D$ je ekvivalentní $(A \Rightarrow D) \vee (B \Rightarrow D) \vee (C \Rightarrow D)$

Kvantifikátory a konjunkce/disjunkce

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x.
Nechť M je libovolná množina.

- $A \vee (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \vee B(x))$

Kvantifikátory a konjunkce/disjunkce

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $A \vee (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \vee B(x))$
- $A \,\&\, (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní[1] $\forall x \in M\colon (A \,\&\, B(x))$

[1] pokud $M \neq \emptyset$

Kvantifikátory a konjunkce/disjunkce

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $A \vee (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \vee B(x))$
- $A \,\&\, (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní[1] $\forall x \in M\colon (A \,\&\, B(x))$
- $A \vee (\exists x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní[1] $\exists x \in M\colon (A \vee B(x))$

---

[1] pokud $M \neq \emptyset$

Kvantifikátory a konjunkce/disjunkce

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $A \vee (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \vee B(x))$
- $A \,\&\, (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní[1] $\forall x \in M\colon (A \,\&\, B(x))$
- $A \vee (\exists x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní[1] $\exists x \in M\colon (A \vee B(x))$
- $A \,\&\, (\exists x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\exists x \in M\colon (A \,\&\, B(x))$

[1] pokud $M \neq \emptyset$

Kvantifikátory a implikace

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $A \Rightarrow (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \Rightarrow B(x))$

Kvantifikátory a implikace

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $A \Rightarrow (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \Rightarrow B(x))$

Kvantifikátory a implikace

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x.
Nechť M je libovolná množina.

- $A \Rightarrow (\forall x \in M\colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (A \Rightarrow B(x))$
  Příklad: "Když prší, je každý člověk raději doma" lze symbolicky zapsat jako
  $\text{Prší} \Rightarrow \forall x \in \mathit{Lidi}\colon \mathit{Doma}(x)$
  Nebo jako $\forall x \in \mathit{Lidi}\colon\ \text{Prší} \Rightarrow \mathit{Doma}(x)$.

Kvantifikátory a implikace

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $A \Rightarrow (\forall x \in M \colon B(x))$ je ekvivalentní $\forall x \in M \colon (A \Rightarrow B(x))$
  Příklad: "Když prší, je každý člověk raději doma" lze symbolicky zapsat jako
  $\text{Prší} \Rightarrow \forall x \in \mathit{Lidi} \colon \mathit{Doma}(x)$
  Nebo jako $\forall x \in \mathit{Lidi} \colon\ \text{Prší} \Rightarrow \mathit{Doma}(x)$.
- $A \Rightarrow (\exists x \in M \colon B(x))$ je ekvivalentní[2] $\exists x \in M \colon (A \Rightarrow B(x))$

$$\big(A \Rightarrow (\forall x : B(x))\big) \Leftrightarrow \big(\neg A \vee (\forall x : B(x))\big)$$

[2] pokud $M \neq \emptyset$

Kvantifikátory a implikace II

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $(\exists x \in M\colon B(x)) \Rightarrow A$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A)$

Kvantifikátory a implikace II

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $(\exists x \in M\colon B(x)) \Rightarrow A$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A)$

Kvantifikátory a implikace II

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $(\exists x \in M\colon B(x)) \Rightarrow A$ je ekvivalentní $\forall x \in M\colon (B(x) \Rightarrow A)$
  Příklad: "Má-li některé dítě ve školce Covid, půjde celá školka do karantény" lze symbolicky zapsat jako
  $(\exists x \in \text{Děti}\colon \mathit{Covid}(x)) \Rightarrow \ \text{Karanténa}$
  nebo jako $\forall x \in \text{Děti}\colon (\mathit{Covid}(x) \Rightarrow \ \text{Karanténa})$.

Kvantifikátory a implikace II

Předpokládejme, že A je výrok, který nezávisí na proměnné x. Nechť M je libovolná množina.

- $(\exists x \in M \colon B(x)) \Rightarrow A$ je ekvivalentní $\forall x \in M \colon (B(x) \Rightarrow A)$
  Příklad: "Má-li některé dítě ve školce Covid, půjde celá školka do karantény" lze symbolicky zapsat jako
  $(\exists x \in \text{Děti} \colon \mathit{Covid}(x)) \Rightarrow \text{Karanténa}$
  nebo jako $\forall x \in \text{Děti} \colon (\mathit{Covid}(x) \Rightarrow \text{Karanténa})$.
- $(\forall x \in M \colon B(x)) \Rightarrow A$ je ekvivalentní[3] $\exists x \in M \colon (B(x) \Rightarrow A)$

$$\Big((\exists x : B(x)) \Rightarrow A\Big) \Leftrightarrow \Big((\forall x : \neg B(x)) \vee A\Big)$$

$$\Leftrightarrow \Big(\forall x : (\neg B(x) \vee A)\Big)$$

$$\Leftrightarrow \forall x : (B(x) \Rightarrow A)$$

$$\forall x \exists y \forall z \forall w : (\ldots)$$

[3] pokud $M \neq \emptyset$

Více kvantifikátorů

Pozor na rozsah platnosti proměnných:

$(\forall x\colon A(x)) \vee (\forall x\colon B(x))$ je ekvivalentní $(\forall x\colon A(x)) \vee (\forall y\colon B(y))$.

Více kvantifikátorů

Pozor na rozsah platnosti proměnných:

$(\forall x\colon A(x)) \lor (\forall x\colon B(x))$ je ekvivalentní $(\forall x\colon A(x)) \lor (\forall y\colon B(y))$.

Už víme z minula:

$\underbrace{(\forall x\colon A(x))} \lor \underbrace{(\forall x\colon B(x))}$ není ekvivalentní $\underbrace{\forall x\colon (A(x) \lor B(x))}$.

Více kvantifikátorů

Pozor na rozsah platnosti proměnných:

$(\forall x\colon A(x)) \lor (\forall x\colon B(x))$ je ekvivalentní $(\forall x\colon A(x)) \lor (\forall y\colon B(y))$.

Už víme z minula:

$(\forall x\colon A(x)) \lor (\forall x\colon B(x))$ není ekvivalentní $\forall x\colon (A(x) \lor B(x))$.

Teď také víme:

$$\begin{aligned}(\forall x\colon A(x)) \lor (\forall x\colon B(x)) &\iff (\forall x\colon A(x)) \lor \boxed{(\forall y\colon B(y))} \\ &\iff \forall x\colon (\boxed{A(x)} \lor \forall y\colon B(y)) \\ &\iff \forall x \forall y\colon (A(x) \lor B(y)).\end{aligned}$$

Příklady

Jsou následující tvrzení pravdivá?

1. $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \colon y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon y > x$
3. $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee y < x)$
4. $\forall x \in \mathbb{N} \colon (x = 1 \vee \exists y \in \mathbb{N} \colon y < x)$
5. $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} \colon y = x + 1$
6. $\forall y \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{N} \colon y = x + 1$
7. $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} \colon (z > x \Rightarrow z > y)$

Příklady

Najděte množinu M kladných reálných čísel, pro kerou

$$\forall x \in M\, \exists y \in M\colon\ y < x \text{ platí, ale}$$
$$\forall y \in M\, \exists x \in M\colon\ y < x \text{ neplatí}$$

Najděte reálnou funkci f, pro kterou

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\colon\ f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ platí, ale}$$
$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in \mathbb{R} :\ f(x+1) \geq f(x) + \varepsilon \text{ neplatí.}$$

Najděte množinu $A \subseteq \mathbb{R}$ takovou, že tvrzení

$$(\forall x \in A\colon\ x > 10) \Rightarrow (\forall x \in A\colon\ x > 15) \text{ platí, ale}$$
$$\forall x \in A\colon\ (x > 10 \Rightarrow x > 15) \text{ neplatí.}$$