Připomeň: V2.5 (limita a uspořádání)

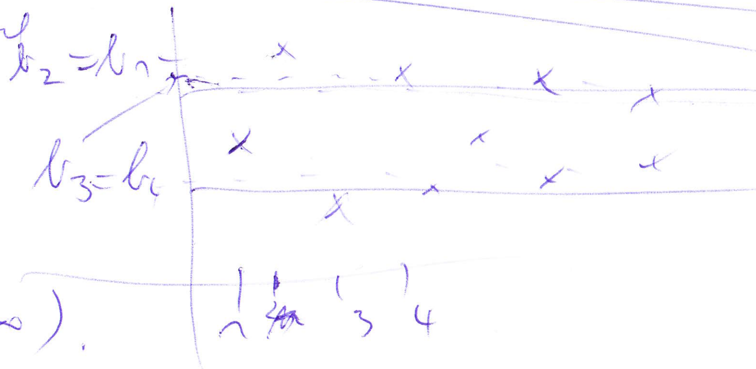
$\exists \lim a_n = A$, $\exists \lim b_n = B$ $\quad a_n \geq b_n \Rightarrow A \geq B$

Speciálně: $\exists \lim a_n = A$ $\quad a_n \geq B \equiv b_n \Rightarrow A \geq B$

Def. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a označme

$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ a

$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$.



Je-li $\{a_n\}$ shora (zdola) neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ (a $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$).

Číslo $\lim_{n\to\infty} b_n$ nazýváme limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim_{n\to\infty} c_n$ nazýváme limes inferior a značíme $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Poznámky: a) $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \geq b_{n+1} = \sup\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

a analogicky $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq c_{n+1} = \inf\{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$

Tedy existují $\lim_{n\to\infty} b_n$ a $\lim_{n\to\infty} c_n$ z V2.9 (o limitě monotónní posl.)

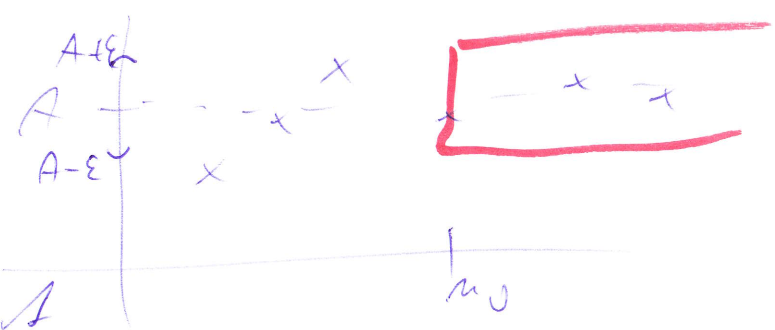
b) Zřejmě $\forall n$ $\quad c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq a_n \leq b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

Věta T 2.12 (vztah limity, limes superior a limes inferior)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^* \iff \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A$$

Dk: Jen pro $A \in \mathbb{R}$. Jinak by byl ideově podobný.



"⇒" $A \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená podle V2.2. Můžeme tedy definovat b_n a c_n a $b_n, c_n \in \mathbb{R}$. Posloupnost b_n je nerostoucí a c_n je neklesající a platí $c_n \leq b_n$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Z definice $\lim_{n\to\infty} a_n$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $|a_n - A| < \varepsilon$ $\Rightarrow a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Tedy $\forall n \geq n_0$ $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq A+\varepsilon$.

Analogicky $\forall n \geq n_0$ $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \geq A-\varepsilon$

Tedy $\forall n \geq n_0$ $A-\varepsilon \leq c_n \leq b_n \leq A+\varepsilon \Rightarrow$

Podle V2.5 o limitě a uspořádání $\lim_{n\to\infty} c_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$ a $\lim_{n\to\infty} b_n \in [A-\varepsilon, A+\varepsilon]$. Toto platí $\forall \varepsilon > 0$, a tedy

$\lim_{n\to\infty} c_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

$b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

"$\Leftarrow$" $A \in \mathbb{R}$. Podle definice b_n a c_n je $\{a_n\}$ omezená.

~~Uvažujme~~ Definujme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$, $c_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

Z poznámky víme

$$\begin{array}{ccccc} c_n & \le & a_n & \le & b_n \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ A = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n & & A & & \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A \end{array}$$

Podle věty o dvou strážnících tedy $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. $\square$

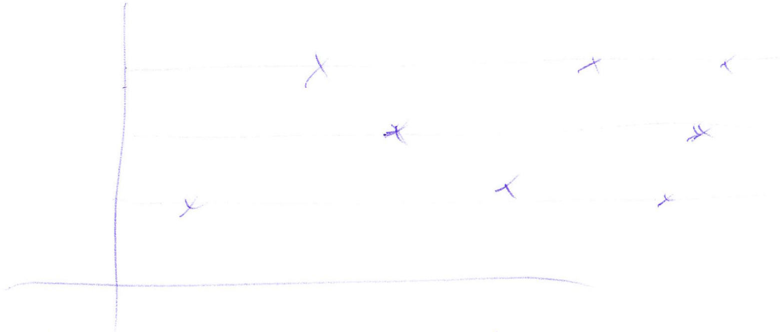
Problémy na cvičení: (i) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

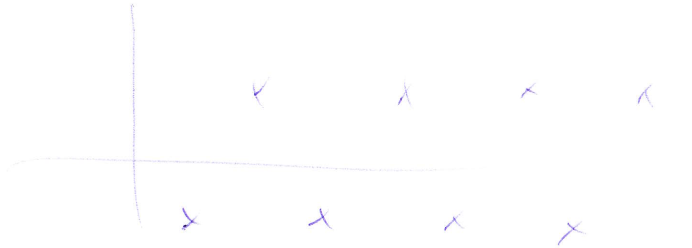
(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le$

$\le \limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \le \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

8.4.

Def Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že A je hromadná hodnota posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\})$.



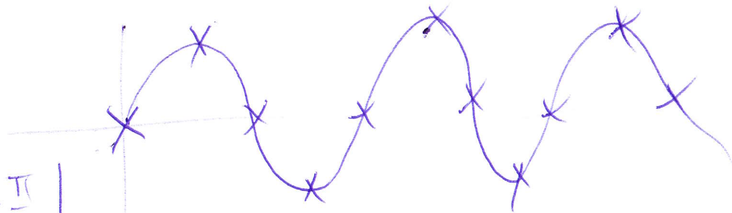


Příklad: a) $H(\{\underbrace{(-1)^n}_{a_n}\}_{n=1}^{\infty}) = \{-1, 1\}$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2k} = \lim (-1)^{2k} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2k+1} = \lim (-1)^{2k+1} = -1$$

b) $H(\{\sin(\frac{\pi}{2} n)\}_{n=1}^{\infty}) = \{-1, 0, 1\}$



$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(4k+1)\right) = \lim_{k\to\infty} \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(4k+3)\right) = -1$$

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 2k\right) = \lim_{k\to\infty} \sin(\pi k) = 0$$

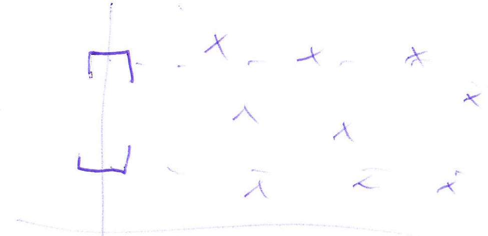
$\cancel{H = [0, 1]}$

Věta T 2.13 (o hromadných hodnotách posloupností)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.

Potom $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ jsou hromadnými hodnotami posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a pro každou hromadnou hodnotu $A\in\mathbb{R}^*$ této posloupnosti platí

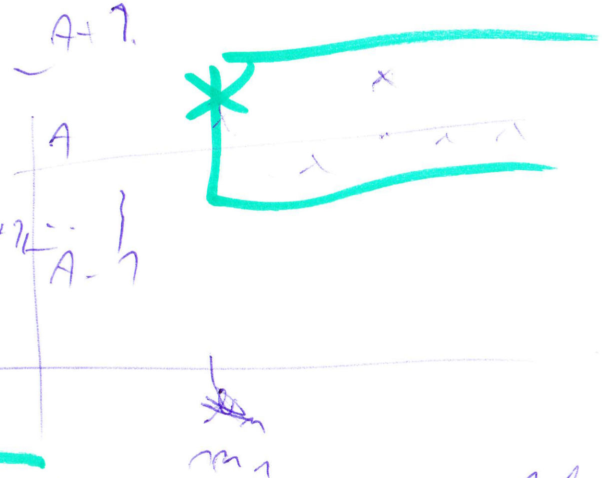
$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le A \le \limsup_{n\to\infty} a_n$$



Dk: Opět pouze pro $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$.

Tak a_n je shora omezená. Označme $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

b_n je nerostoucí a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.



Z $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, $\varepsilon = 1$ $\exists m_1$ takové, že $|b_{m_1} - A| < 1$

Nyní z $b_{m_1} = \sup\{a_{m_1}, a_{m_1+1}, a_{m_1+2}, \dots\}$ existuje $n_1 \ge m_1$ takové, že

$b_{m_1} - 1 < a_{n_1} \le b_{m_1} \Rightarrow |a_{n_1} - b_{m_1}| < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_{n_1} - A| \le |a_{n_1} - b_{m_1}| + |b_{m_1} - A| < 2$. Dále indukcí

Mějme $m_1, \dots, m_k$, $n_1, \dots, n_k$. Z $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$, $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ $\exists m_{k+1} > n_k$: $|b_{m_{k+1}} - A| < \frac{1}{k+1}$

Z $b_{m_{k+1}} = \sup\{a_{m_{k+1}}, a_{m_{k+1}+1}, \dots\}$ $\exists n_{k+1} \ge m_{k+1}$ takové, že

$b_{m_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} \le b_{m_{k+1}} \Rightarrow |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| < \frac{1}{k+1}$ $\quad b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$

$\Rightarrow |a_{n_{k+1}} - A| \le |a_{n_{k+1}} - b_{m_{k+1}}| + |b_{m_{k+1}} - A| < \frac{2}{k+1}$

Zbývá dokázat $\forall A \in H(\{a_n\})$ $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (8-6

Nechť n_k je rostoucí posloupnost taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Z poznámky (za def. limsup) víme

$$\begin{array}{ccccc} c_{n_k} & \leq & a_{n_k} & \leq & b_{n_k} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle k\to\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle k\to\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle k\to\infty,\ V2.3} \\ \liminf\limits_{n\to\infty} a_n & & A & & \limsup\limits_{n\to\infty} b_n \end{array} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Podle V 2.5 limita a uspořádání platí

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$\square$

Tedy jsme dostali rostoucí posloupnost n_k $(n_{k+1} \geq m_{k+1} > n_k)$

tak, že $|a_{n_k} - A| < \frac{2}{k}$. $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Tedy $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A \in H(\{a_n\})$.

Analogicky $\liminf\limits_{n\to\infty} a \in H(\{a_n\})$.