Velké operační symboly

Zápis s opakováním téže binární operace lze zkrátit použitím velkého operačního symbolu, např. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{i=1}^{4} a_i$.

Zde $\sum$ je operační symbol, i je proměnná, výraz $i = 1$ značí dolní mez, 4 je horní mez a a_i je typický argument (zde sčítanec).

Přirozeným požadavkem je, aby daná operace byla *asociativní*, jinak by bylo nutné určit pořadí vyhodnocení operací, srovnejte $(a_1 - a_2) - a_3$ versus $a_1 - (a_2 - a_3)$.

Rozsah hodnot proměnné i u konečného opakování lze vyjádřit uvedením celočíselných mezí, např. $\sum_{i=-4}^{4} a_i$, $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Je-li operace *komutativní* , lze rozsah hodnot proměnné i vymezit množinou nebo podmínkou $\sum_{i \in \{1,2,3,4\}} a_i = \sum_{1 \le i \le 4} a_i$.

Asociativní i komutativní jsou: sčítání s operačním symbolem $\sum$, násobení — $\prod$, sjednocení — $\bigcup$, průnik — $\bigcap$, konjunkce — $\bigwedge$ (ovšem častěji $\forall$), disjunkce $\bigvee$ (častěji $\exists$) . . .

Aditivita a prázdné operace

Je-li operace asociativní, výsledek opakované operace je zachován, i když proces rozdělíme do více částí. Pro disjunktní množiny A a B:

$$\sum_{i=1}^{20} a_i = \left(\sum_{i=1}^{10} a_i\right) + \left(\sum_{i=11}^{20} a_i\right)$$

$$\sum_{i\in A\cup B} a_i = \left(\sum_{i\in A} a_i\right) + \left(\sum_{i\in B} a_i\right)$$

Libovolná A je disjunktní s $\emptyset$ a přitom $A \cup \emptyset = A$. Ze vztahu

$$\sum_{i\in A} a_i = \sum_{i\in A\cup\emptyset} a_i = \left(\sum_{i\in A} a_i\right) + \left(\sum_{i\in\emptyset} a_i\right)$$

dostáváme přirozený požadavek, aby výsledek prázdné operace byl *neutrální prvek*:

$$\sum_{i\in\emptyset} a_i = 0,\ \prod_{i\in\emptyset} a_i = 1,\ \bigcup_{i\in\emptyset} a_i = \emptyset,\ \bigwedge_{i\in\emptyset} a_i = 1,\ \bigvee_{i\in\emptyset} a_i = 0.$$

Prázdný průnik $\bigcap_{i\in\emptyset} a_i$ je dané univerzum, tedy závisí na kontextu.

Mezi prázdné operace patří také situace,

kdy je horní mez menší než dolní, např. $\sum_{i=10}^{5} a_i$.

Nekonečné opakování

Nekonečné opakování lze zapsat pomocí mezí ∞ a $-\infty$, např. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$

U aritmetických operací $\sum$ a $\prod$ je výsledek dodefinován pomocí *limit*. U ostatních operací je stanoven v rámci logiky.

Rozsah proměné lze vymezit i nekonečnou množinou: $\sum\limits_{i \in \mathbb{N}} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$

Aplikace operace na množinu znamená její aplikaci na prvky této množiny, např. $\sum\{a_i : i = 1, \ldots, 4\} = \sum\limits_{i=1}^{4} a_i$.

V některých případech ani není nutné používat proměnnou, např. $\sum\{1, \ldots, 4\} = 1 + 2 + 3 + 4$.

Přednost operací

Pro aritmetické operace $\sum$, $\prod$, $+$ a $\cdot$ se obvykle aplikují pravidla pro přednost, srovnejte:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i + 5 = (a_1 + \cdots + a_4) + 5, \ \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot 5 = (a_1 + \cdots + a_4) \cdot 5,$$

$$\sum_{i=1}^{4} (a_i + 5) = (a_1 + 5) + (a_2 + 5) + (a_3 + 5) + (a_4 + 5)$$

U ostatních operací je vymezení přednosti závorkami často nutností.

Při násobném použití opakovaných operací se závorky vypouštějí, i když stále určují pořadí provádění operací, t.j.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}$$

První dva výrazy odpovídají součtu prvků matice nejprve po řádcích (vnitřní součet jde přes sloupcové indexy j), zatímco v posledním výrazu jsou mezivýsledky sloupcové součty.

Kvantifikátory

Kvantifikátory se využívají v situacích, kdy nějaký výrok $V(x)$ závisící na proměnné x má platit:

Pro *všechny* možné hodnoty x, čili jde o konjunkci všech případů. Píšeme $\forall x : V(x)$ a čteme „Pro všechna x platí $V(x)$."
Symbol $\forall$ je *všeobecný* (velký) *kvantifikátor* (z angl. „for **A**ll").

Pro *alespoň jednu* možnou hodnotu x, jde o hromadnou disjunkci. Píšeme $\exists x : V(x)$, a čteme „Existuje x splňující $V(x)$."
Symbol $\exists$ je tzv. *existenční* (malý) *kvantifikátor* (z angl. „**E**xists").

Zápis $\exists! x : V(x)$ znamená „Existuje *právě jedno* x splňující $V(x)$."

V běžném jazyce odpovídá velký kvantifikátor frázím: „každý", „všichni", „jakýkoli", „kterýkoli", „libovolný", např. „Libovolné číslo z množiny A je kladné." znamená $\forall x \in A : x > 0$.

Malý kvantif. vyjadřují: „existuje", „alespoň jeden", „nějaké", např. „Nějaké číslo z množiny A je kladné." znamená $\exists x \in A : x > 0$.

Rozsah kvantifikace

Rozsah kvantifikace lze vymezit množinou, např.
$\forall x \in M : V(x)$ je „Pro všechna x z množiny M platí $V(x)$."

Podobně je možné uvést další podmínky:
$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 10 : V(x)$ je zkratkou pro implikaci
$\forall x : ((x \in \mathbb{R} \land x \geq 10) \Rightarrow V(x))$

$\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 10 : V(x)$ je zkratkou pro konjunkci
$\exists x : (x \in \mathbb{R} \land x \geq 10 \land V(x))$

Negace kvantifikátorů

$\neg(\forall x : V(x)) = \exists x : \neg V(x)$. Neplatí-li $V(x)$ pro všechna x, znamená to, že existuje alespoň jedno takové x, že vyvrací $V(x)$.

$\neg(\exists x : V(x)) = \forall x : \neg V(x)$. Není-li pravda, že by $V(x)$ platil pro alespoň jedno x, znamená to, že $V(x)$ neplatí pro jakékoli x.

Čeština ovšem užívá dvojí zápor: „$V(x)$ neplatí pro žádné x.“!!!

Příklady:
„Není pravda, že by všechna čísla z množiny A byla kladná.“,
t.j. $\neg\forall x \in A : x > 0$ je ekvivalentní
„Některé číslo z množiny A není kladné.“ t.j. $\exists x \in A : x \leq 0$.

„Není pravda, že by v množině A bylo (nějaké) kladné číslo.“,
t.j. $\neg\exists x \in A : x > 0$ je ekvivalentní
„Všechna čísla z množiny A jsou nekladná.“ t.j. $\forall x \in A : x \leq 0$.
neboli lépe česky „Žádné číslo z množiny A není kladné.“

Negace kvantifikátorů

Pozor na zápis „záporné věty“ formulí:

- „Ne každá ovce je černá“:
  $\neg(\forall o : o \text{ je černá}) \quad = \quad \exists o : o \text{ je bílá}$
  čili to znamená: „Alespoň jedna ovce je bílá.“
- „Žádná ovce není černá“ ...dvojí zápor ve smyslu jednoho:
  $\neg(\exists o : o \text{ je černá}) \quad = \quad \forall o : o \text{ je bílá}$
  čili: „Všechny ovce jsou bílé.“
- „Neexistuje ovce, která není černá“:
  $\neg(\exists o : o \text{ není černá}) \quad = \quad \forall o : o \text{ je černá}$
  čili: „Všechny ovce jsou černé.“

Ta část výroku, která popisuje obor, přes který se kvantifikuje, se při negování *nemění*:

$$\neg\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 10 : V(x) \quad = \quad \exists x \in \mathbb{R}, x \geq 10 : \neg V(x)$$

$$\neg\exists x \in \mathbb{R}, x \geq 10 : V(x) \quad = \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \geq 10 : \neg V(x)$$

Pořadí kvantifikátorů

Pořadí stejných kvantifikátorů lze měnit, různých *nikoli*. Srovnejte

$\forall x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N} : xy \in \mathbb{N}$ vs $\forall y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : xy \in \mathbb{N}$
Je jedno, jestli si nejdříve zvolíme libovolně x a pak libovolně y, výrok platí pro všechny volby, nezávisle na tom, co zvolíme dřív. Zkráceně lze zapsat $\forall x, y \in \mathbb{N} : xy \in \mathbb{N}$

$\exists x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x|y$ vs $\exists y \in \mathbb{N} : \exists x \in \mathbb{N} : x|y$
Je jedno, jestli si nejdříve zvolíme jedno vhodné x, např. $x = 5$ a pak šikovné $y = 10$, stejně tak můžeme nejdřív najít y a pak x. Zkráceně lze zapsat $\exists x, y \in \mathbb{N} : x|y$

$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x|y$ vs $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x|y$
První výrok platí, protože y lze volit *v závislosti* na x, např. $y = 2x$. Druhý neplatí, žádné přirozené y není dělitené všemi přirozenými x.
Jednodušší konečný příklad pro $A = \{2, 3\}$ rozepsaný do konjunkcí a disjunkcí:
$\forall x \in A : \exists y \in A : x|y = (2|2 \vee 2|3) \wedge (3|2 \vee 3|3) = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$
$\exists y \in A : \forall x \in A : x|y = (2|2 \wedge 3|2) \vee (2|3 \wedge 3|3) = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 = 0$

Kvantifikátory a konjunkcí resp. disjunkce

Nezávisí-li výrok B na proměnné x, platí následující rovnosti:

$$\begin{aligned}
\forall x : A(x) \wedge B &= \forall x : (A(x) \wedge B) \ \ldots\ \text{přerovnání konjunkcí}\\
\exists x : A(x) \vee B &= \exists x : (A(x) \vee B) \ \ldots\ \text{přerovnání disjunkcí}\\
\forall x : A(x) \vee B &= \forall x : (A(x) \vee B) \ \ldots\ \text{distributivita disjunkce}\\
\exists x : A(x) \wedge B &= \exists x : (A(x) \wedge B) \ \ldots\ \text{distributivita konjunkce}
\end{aligned}$$

Závisí-li B na x, třeba být opatrný:

$$\begin{aligned}
\forall x : A(x) \wedge \forall x : B(x) &= \forall x : (A(x) \wedge B(x)) \ \ldots\ \text{přer. konjunkcí}\\
\exists x : A(x) \vee \exists x : B(x) &= \exists x : (A(x) \vee B(x)) \ \ldots\ \text{přer. disjunkcí}
\end{aligned}$$

$$\forall x : A(x) \vee \forall x : B(x) \neq \forall x : (A(x) \vee B(x))$$

Např. „Každé číslo je sudé nebo každé číslo je liché.“ neplatí, zatímco „Každé číslo je sudé nebo liché.“ platí.

$$\exists x : A(x) \wedge \exists x : B(x) \neq \exists x : (A(x) \wedge B(x)) \ \ldots\ \text{analogicky}$$

Správně je třeba jednu z proměnných přejmenovat:

$$\begin{aligned}
\forall x : A(x) \vee \forall x : B(x) &= \forall x : A(x) \vee \forall y : B(y) \ \ldots\ \text{přejmenování}\\
&= \forall x, y : (A(x) \vee B(y)) \ \ldots\ \text{distributivita}
\end{aligned}$$

Kvantifikátory a implikace

Následující dvojice výroků jsou ekvivalentní:

$A \Rightarrow \forall x : B(x) \; = \; \forall x : (A \Rightarrow B(x))$ ... z distributivity zleva:

$$A \Rightarrow (B \wedge C) \; = \; (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)$$

$A \Rightarrow \exists x : B(x) \; = \; \exists x : (A \Rightarrow B(x))$ ... z distributivity zleva:

$$A \Rightarrow (B \vee C) \; = \; (A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)$$

$\forall x : A(x) \Rightarrow B \; = \; \exists x : (A(x) \Rightarrow B)$ ... ze vztahu:

$$(A \wedge C) \Rightarrow B \; = \; (A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B)$$

$\exists x : A(x) \Rightarrow B \; = \; \forall x : (A(x) \Rightarrow B)$ ... ze vztahu:

$$(A \vee C) \Rightarrow B \; = \; (A \Rightarrow B) \wedge (C \Rightarrow B)$$

Kvantifikátory a implikace

Následující dvojice výroků jsou ekvivalentní:

$$
\begin{aligned}
A \Rightarrow \forall x : B(x) &= \forall x : (A \Rightarrow B(x)) \\
A \Rightarrow \exists x : B(x) &= \exists x : (A \Rightarrow B(x)) \\
\forall x : A(x) \Rightarrow B &= \exists x : (A(x) \Rightarrow B) \\
\exists x : A(x) \Rightarrow B &= \forall x : (A(x) \Rightarrow B)
\end{aligned}
$$

Kontrolní otázka:

Který z následujících postupů „vytýkaní“ kvantifikátorů je korektní?

- nejprve x, pak y:
  $$
  \begin{aligned}
  \forall x : A(x) \Rightarrow \forall y : B(y) &= \exists x : (A(x) \Rightarrow \forall y : B(y)) \\
  &= \exists x\, \forall y : (A(x) \Rightarrow B(y))
  \end{aligned}
  $$
- a naopak:
  $$
  \begin{aligned}
  \forall x : A(x) \Rightarrow \forall y : B(y) &= \forall y : (\forall x : A(x) \Rightarrow B(y)) \\
  &= \forall y\, \exists x : (A(x) \Rightarrow B(y))
  \end{aligned}
  $$

Výsledná tvrzení by měla být ekvivalentní, ale existenční a všeobecný kvantifikátor přece nelze beztrestně prohazovat!

Řešení

Který z následujících postupů „vytýkaní" kvantifikátorů je korektní?

- nejprve x, pak y:

$$\begin{aligned}\forall x : A(x) \Rightarrow \forall y : B(y) &= \exists x : (A(x) \Rightarrow \forall y : B(y)) \\ &= \exists x\ \forall y : (A(x) \Rightarrow B(y))\end{aligned}$$

- a naopak:

$$\begin{aligned}\forall x : A(x) \Rightarrow \forall y : B(y) &= \forall y : (\forall x : A(x) \Rightarrow B(y)) \\ &= \forall y\ \exists x : (A(x) \Rightarrow B(y))\end{aligned}$$

Obojí je správně. V *tomto případě* lze kvantifikátory zaměnit:

$$\begin{aligned}&\exists x\ \forall y : (A(x) \Rightarrow B(y)) \ = \ \exists x\ \forall y : (\neg A(x) \vee B(y)) \\ &= \ \exists x : (\neg A(x) \vee \forall y : B(y)) \ = \ (\exists x : \neg A(x)) \vee (\forall y : B(y)) \\ &= \ (\forall y : B(y)) \vee (\exists x : \neg A(x)) \ = \ \forall y : (B(y) \vee \exists x : \neg A(x)) \\ &= \ \forall y\ \exists x : (B(y) \vee \neg A(x)) \ = \ \forall y\ \exists x : (A(x) \Rightarrow B(y))\end{aligned}$$