Realizace realizovatelných funkcí

$$\mathbb{F}[[D]] \bigcap \mathbb{F}(D)$$

Uvažme např. funkci

$$g = 1/D$$

Pak pro

$$u = D$$

máme

$$v = ug = 1$$

Odpovídající kódovač by musel předpovídat budoucnost: má totiž v čase nula vrátit jedničku, pokud na vstupu v čase jedna bude jednička, jinak nulu.

$g_{11} = 1/D$

$(D\ 0)$

$\frac{D}{1}$

Chceme tedy nyní najít kódovač, který „realizuje“ nějakou realizovatelnou racionální funkci. To bude kódovač K s parametry $(1,1)$ a odezvou

$$K(1) = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}.$$

Taková řada je kauzální pokud zpoždění q je nejvýše zpoždění p. Můžeme tedy předpokládat

$$\mathrm{p} = \cancel{p_0} + \cancel{p_1} D + \cdots + p_m D^m, \qquad \mathrm{q} = 1 + q_1 D + \cdots + q_m D^m$$

q_0

Stačí zlomek rozšířit na

$$\frac{q_0^{-1} D^{-z} \cdot p}{q_0^{-1} D^{-z} \cdot q},$$

kde z je zpoždění q.

$u * (1 + D + D^3)$ $= D$ $q = 1$

1 u_0 1 1 0 1

1 u_1 1 1 0 1

1 u_2 1 1 0 1

1 u_3 1 1 0 1

0 u_4 1 1 0 1

u_5 1 1 0 1

u_6 1 1 0 1

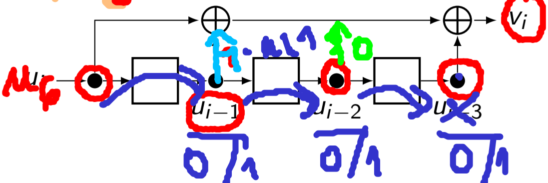
u_7 1 1 0 1

u_8 1 1 0 1

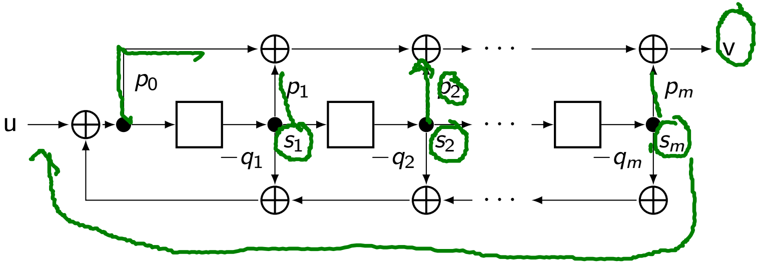
1001

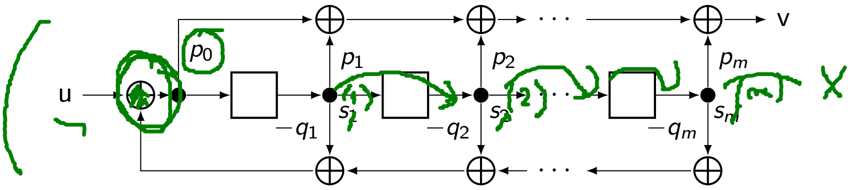
$$u * (1 + D + D^3)$$

u_0	1	1	0	1								
u_1		1	1	0	1							
u_2			1	1	0	1						
u_3				1	1	0	1					
u_4					1	1	0	1				
u_5						1	1	0	1			
u_6							1	1	0	1		
u_7								1	1	0	1	
u_8									1	1	0	1



$$\frac{p}{q}$$





Věta: Nechť $q_0 = 1$ a

S_{i+1}

$$\delta: \quad (\vec{s}_i, u_i) \mapsto \vec{s}_{i+1} = \left(u_i - \sum_{j=1}^{m} q_j s_i^{(j)}, s_i^{(1)}, \dots, s_i^{(m-1)} \right)$$

$$\lambda: \quad (\vec{s}_i, u_i) \mapsto p_0 u_i + \sum_{j=1}^{m} (p_j - p_0 q_j) s_i^{(j)} = p_0 s_{i+1}^{(1)} + \sum_{j=1}^{m} p_j s_i^{(j)}.$$

Pak

$$K(u) = u \cdot \frac{p}{q}.$$

$k(u)$

Nechť $s_0 = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{F}^n$. Označme $\sigma_i = s_{i+1}^{(1)}$ a

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i D^i \,.$$

s_0:	0	0	0	0
s_1:	σ_0	0	0	0
s_2:	σ_1	σ_0	0	0
s_3:	σ_2	σ_1	σ_0	0
s_4:	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0
s_5:	σ_4	σ_3	σ_2	σ_1
s_6:	σ_5	σ_4	σ_3	σ_2
s_7:	σ_6	σ_5	σ_4	σ_3

LFSR

$$s_i^{(j)} = s_{(i-j+1)}^{(1)}$$

Nechť $s_0 = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^m$. Označme $\sigma_i = s_{i+1}^{(1)}$ a

$$\mathsf{s} = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i D^i \,.$$

Z definic dostáváme

$$u_i = \sigma_i + \sum_{j=1}^{m} q_j \sigma_{i-j}, \qquad v_i = \sum_{j=0}^{m} p_j \sigma_{i-j},$$

pro všechna $i \in \mathbb{Z}$, tedy

$$\mathsf{u} = \mathsf{s} \cdot \mathsf{q}, \qquad \mathsf{v} = \mathsf{s} \cdot \mathsf{p},$$

z čehož tvrzení plyne.

$s = \frac{u}{q}$ $\qquad v = \frac{u}{q} \cdot p = u \cdot \frac{p}{q}$