2. seminář z Matematických dovedností

Kvantifikátory, logické výroky

12. října

Zápočtový test

Plánuje se 1. zápočtový test ve středu 21. 10. od 17:20 na cca 30 minut, v prostředí Moodle.

Kvantifikátory: $\forall$, $\exists$

Univerzální kvantifikátor: $\forall x\colon V(x)$ znamená "pro každé x platí výrok $V(x)$".
Existenční kvantifikátor: $\exists x\colon V(x)$ znamená "existuje x, pro nějž platí výrok $V(x)$".
Někdy se též užívá značení $\exists! x\colon V(x)$, znamenající "existuje právě jedno x, pro nějž platí výrok $V(x)$"

Kvantifikátory: $\forall$, $\exists$

Univerzální kvantifikátor: $\forall x\colon V(x)$ znamená “pro každé x platí výrok $V(x)$”.
Existenční kvantifikátor: $\exists x\colon V(x)$ znamená “existuje x, pro nějž platí výrok $V(x)$”.
Někdy se též užívá značení $\exists! x\colon V(x)$, znamenající “existuje právě jedno x, pro nějž platí výrok $V(x)$”

Často je vhodné explicitně uvést, přes jakou množinu se kvantifikuje, např:

$$\forall x \in \mathbb{N}\colon x^2 > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 < 10\colon x^2 + x - 4 < 20$$

$$\exists m \in \mathbb{N}, m \text{ je násobek } 3\colon m \text{ je součet dvou prvočísel}$$

Poznámka: zápis

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 < 10\colon V(x)\right)$$

je možné chápat jako zkratku pro implikaci

$$\neg\left(\forall x\colon \left((x \in \mathbb{R} \;\&\; x > 0 \;\&\; x^2 < 10) \Rightarrow V(x)\right).\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists x\colon (x \in \mathbb{R} \;\&\; x > 0 \;\&\; x^2 < 10) \;\&\; \neg V(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 < 10\colon \neg V(x)$$

Poznámka: zápis

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 < 10\colon V(x)$$

je možné chápat jako zkratku pro implikaci

$$\forall x\colon \Big(\underbrace{(x \in \mathbb{R} \;\&\; x > 0 \;\&\; x^2 < 10)} \Rightarrow V(x)\Big).$$

Podobně zápis

$$\exists x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 < 10\colon V(x)$$

je zkratka pro konjunkci

$$\exists x\colon \Big(\underbrace{(x \in \mathbb{R} \overset{\wedge}{\&} x > 0 \overset{\wedge}{\&} x^2 < 10)} \overset{\wedge}{\&} V(x)\Big).$$

Negování výrazů s kvantifikátory

$\neg(\forall x\colon V(x))$ je ekvivalentní s $\exists x\colon \neg V(x)$

$\neg(\exists x\colon V(x))$ je ekvivalentní s $\forall x\colon \neg V(x)$

Negování výrazů s kvantifikátory

$$\neg(\forall x\colon V(x)) \text{ je ekvivalentní s } \exists x\colon \neg V(x)$$
$$\neg(\exists x\colon V(x)) \text{ je ekvivalentní s } \forall x\colon \neg V(x)$$

Ta část výroku, která popisuje obor, přes který se kvantifikuje, se při negování nemění:

$$\neg(\forall x \in \mathbb{Z}, x < 10\colon V(x)) \text{ je ekvivalentní s } \exists x \in \mathbb{Z}, x < 10\colon \neg V(x)$$

Poznámka o kvantifikování přes konečné množiny

Kvantifikování přes konečnou množinu $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ lze nahradit konjunkcí resp. disjunkcí:

$$\forall x \in M\colon\ V(x) \text{ je ekvivalentní s } V(a_1) \mathbin{\&} V(a_2) \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} V(a_n)$$

$$\exists x \in M\colon\ V(x) \text{ je ekvivalentní s } V(a_1) \vee V(a_2) \vee \cdots \vee V(a_n)$$

Poznámka o kvantifikování přes konečné množiny

Kvantifikování přes konečnou množinu $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ lze nahradit konjunkcí resp. disjunkcí:

$$\forall x \in M\colon V(x) \text{ je ekvivalentní s } V(a_1)\ \&\ V(a_2)\ \&\ \cdots\ \&\ V(a_n)$$
$$\exists x \in M\colon V(x) \text{ je ekvivalentní s } V(a_1) \vee V(a_2) \vee \cdots \vee V(a_n)$$

Pokud M je prázdná množina, tak každý výrok tvaru $\forall x \in M\colon V(x)$ je pravdivý a každý výrok tvaru $\exists x \in M\colon V(x)$ je nepravdivý.

Záporné věty

Převod 'záporných' vět na ekvivalentní kvantifikované formule někdy působí problémy:

- "Ne každý student získá započet":

$$\neg(\forall s \in \text{Studenti}: s \text{ získá zápočet})$$
$$\text{ekvivalentně: } \exists s \in \text{Studenti}: s \text{ nezíská zápočet}$$

Záporné věty

Převod 'záporných' vět na ekvivalentní kvantifikované formule někdy působí problémy:

- "Ne každý student získá započet":

$$\neg(\forall s \in \text{Studenti}: s \text{ získá zápočet})$$
$$\text{ekvivalentně: } \exists s \in \text{Studenti}: s \text{ nezíská zápočet}$$

- "Žádný student nezíská zápočet":

$$\neg(\exists s \in \text{Studenti}: s \text{ získá zápočet})$$
$$\text{ekvivalentně: } \forall s \in \text{Studenti}: s \text{ nezíská zápočet}$$

Záporné věty

Převod 'záporných' vět na ekvivalentní kvantifikované formule někdy působí problémy:

- "Ne každý student získá započet":

$$\neg(\forall s \in \text{Studenti} : s \text{ získá zápočet})$$
$$\text{ekvivalentně: } \exists s \in \text{Studenti} : s \text{ nezíská zápočet}$$

- "Žádný student nezíská zápočet":

$$\neg(\exists s \in \text{Studenti} : s \text{ získá zápočet})$$
$$\text{ekvivalentně: } \forall s \in \text{Studenti} : s \text{ nezíská zápočet}$$

- "Neexistuje student, který nezíská zápočet":

$$\neg(\exists s \in \text{Studenti} : s \text{ nezíská zápočet})$$
$$\text{ekvivalentně: } \forall s \in \text{Studenti} : s \text{ získá zápočet}$$

Pozor na závorky a pořadí kvantifikátorů

- $(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \vee Q(x))$.

(každé číslo je liché) v (každé číslo je sudé) X

každé číslo je sudé nebo liché ✓

Pozor na závorky a pořadí kvantifikátorů

- $(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \vee Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x)) \Rightarrow (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x))$.

$P(x)$ ... x je sudé

$Q(x)$ ... x je liché

$\forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x))$ ✗ neplatí např. pro $x=2$

$\underbrace{(\forall x\colon P(x))}_{0} \Rightarrow \underbrace{(\forall x\colon Q(x))}_{0}$ ✓ 1

Pozor na závorky a pořadí kvantifikátorů

- $(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \vee Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x)) \Rightarrow (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x)) \;\&\; (\forall x\colon Q(x))$ je totéž jako $\forall x\colon (P(x) \;\&\; Q(x))$.

2

$$(P(x_1) \;\&\; P(x_2) \;\&\; \cdots \;\&\; P(x_n)) \;\&\; (Q(x_1) \;\&\; \cdots \;\&\; Q(x_n))$$

$$\Updownarrow$$

$$(P(x_1) \;\&\; Q(x_1)) \;\&\; (P(x_2) \;\&\; Q(x_2)) \;\&\; \cdots \;\&\; (P(x_n) \;\&\; Q(x_n))$$

Pozor na závorky a pořadí kvantifikátorů

- $(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \vee Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x)) \Rightarrow (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x))\ \&\ (\forall x\colon Q(x))$ je totéž jako $\forall x\colon (P(x)\ \&\ Q(x))$.
- $\forall x \exists y\colon P(x,y)$ není totéž jako $\exists y \forall x\colon P(x,y)$.

$(\mathbb{Z})$ $x < y$

Pozor na závorky a pořadí kvantifikátorů

- $(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \vee Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x)) \Rightarrow (\forall x\colon Q(x))$ není totéž jako $\forall x\colon (P(x) \Rightarrow Q(x))$.
- $(\forall x\colon P(x))\ \&\ (\forall x\colon Q(x))$ je totéž jako $\forall x\colon (P(x)\ \&\ Q(x))$.
- $\forall x \exists y\colon P(x, y)$ není totéž jako $\exists y \forall x\colon P(x, y)$.
- $\forall x \forall y\colon P(x, y)$ je totéž jako $\forall y \forall x\colon P(x, y)$.

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.

$\forall x \in Y : (x \text{ je sudé} \Rightarrow 3x \text{ je sudé})$

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.

$(\forall x \in \mathbb{N}: x$ dělitel $15 \Rightarrow x \in M) \Longrightarrow$

$(\forall x \in \mathbb{N}, x$ dělitel $27: x \in M)$

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
3. Každé číslo, které patří do množiny X, patří i do množiny Y.

$\forall x \in X : x \in Y$

$\forall x \in \mathbb{N} : (x \in X \Rightarrow x \in Y)$

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
3. Každé číslo, které patří do množiny X, patří i do množiny Y.
4. Jestliže žádné číslo z množiny A není větší než 57, pak každé sudé číslo z množiny A patří i do množiny B.

$$\left(\neg\left(\exists x \in A : x > 57\right)\right) \Rightarrow \left(\forall x \in A, x \text{ sudé} : x \in B\right)$$

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
3. Každé číslo, které patří do množiny X, patří i do množiny Y.
4. Jestliže žádné číslo z množiny A není větší než 57, pak každé sudé číslo z množiny A patří i do množiny B.
5. Neexistuje číslo, které by nebylo dělitelem žádného násobku deseti.

$\neg \exists x \in \mathbb{N} : (\neg \exists y \in \mathbb{N} :$ y je nás. 10 & x je dělitel y$)$

$\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} :$ y je nás. 10 & x je dělitel y

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako “x je sudé” nebo “m je násobek n” můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
3. Každé číslo, které patří do množiny X, patří i do množiny Y.
4. Jestliže žádné číslo z množiny A není větší než 57, pak každé sudé číslo z množiny A patří i do množiny B.
5. Neexistuje číslo, které by nebylo dělitelem žádného násobku deseti.
6. Každé číslo, které je dělitelem všech násobků deseti, je zároveň i dělitelem všech násobků padesáti nebo všech násobků osmdesáti.

$\forall x \in \mathbb{N}: (\forall y \in \mathbb{N},\ y$ násobek $10: x$ je dělitel $y)$

$\Rightarrow (\forall \overset{z}{\cancel{y}} \in \mathbb{N},\ \overset{z}{\cancel{y}}$ násobek $50: x$ je dělitel $\overset{z}{\cancel{y}}) \vee$

$(\ldots\ldots\ldots\ 80 \ldots\ldots\ldots)$

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
3. Každé číslo, které patří do množiny X, patří i do množiny Y.
4. Jestliže žádné číslo z množiny A není větší než 57, pak každé sudé číslo z množiny A patří i do množiny B.
5. Neexistuje číslo, které by nebylo dělitelem žádného násobku deseti.
6. Každé číslo, které je dělitelem všech násobků deseti, je zároveň i dělitelem všech násobků padesáti nebo všech násobků osmdesáti.
7. Existuje číslo, které je aspoň tak velké jako všechna čísla z množiny X.

$$\exists x \in \mathbb{N} : (\forall y \in X : x \geq y)$$

Příklad pro vás

Přepište následující věty pomocí kvantifikátorů a logických spojek. Není-li uvedeno, přes jakou množinu se kvantifikuje, použijte množinu $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel. Elementární predikáty, jako "x je sudé" nebo "m je násobek n" můžete zapsat takto slovně.

1. Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.
2. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
3. Každé číslo, které patří do množiny X, patří i do množiny Y.
4. Jestliže žádné číslo z množiny A není větší než 57, pak každé sudé číslo z množiny A patří i do množiny B.
5. Neexistuje číslo, které by nebylo dělitelem žádného násobku deseti.
6. Každé číslo, které je dělitelem všech násobků deseti, je zároveň i dělitelem všech násobků padesáti nebo všech násobků osmdesáti.
7. Existuje číslo, které je aspoň tak velké jako všechna čísla z množiny X.
8. Pokud každé sudé číslo patří do množiny X, pak žádné sudé číslo nepatří do množiny Y.

$(\forall x \in \mathbb{N}, x \text{ sudé} : x \in X) \Rightarrow (\neg \exists z \in \mathbb{N}, z \text{ sudé} : z \in Y)$

$\forall z \in \mathbb{N}, z \text{ sudé} : z \notin Y$

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y \colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y\colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y \colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y : (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$
6. Pro každé číslo x lze najít y takové, že žádné číslo, které je násobkem deseti, není menší než součin x a y.

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y\colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$
6. Pro každé číslo x lze najít y takové, že žádné číslo, které je násobkem deseti, není menší než součin x a y.
7. $A \vee (\neg D \wedge \neg C) \vee \neg(X \wedge Y)$

Zformulujte negace následujících tvrzení

1. Každý, kdo absolvoval přednášku z logiky nebo z analýzy, umí zformulovat negaci výroku i obměnit implikaci.
2. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.
3. $\forall x \exists y \colon (x > y \Rightarrow x > 0)$.
4. V každé ulici žije kočka, která není ani černá ani bílá.
5. $(D \mathbin{\&} \neg E) \Rightarrow (B \vee E)$
6. Pro každé číslo x lze najít y takové, že žádné číslo, které je násobkem deseti, není menší než součin x a y.
7. $A \vee (\neg D \wedge \neg C) \vee \neg(X \wedge Y)$
8. $(\forall y \forall x\ \neg P(x, y)) \Rightarrow (\exists w\ (Z(w) \Rightarrow W(w)))$

D. Ú.