Věta Lyndona a Schützenbergera

Věta. Pokud $x^n y^m = z^p$, kde $x, y, z \in \Sigma^+$ a $n, m, p \geq 2$, pak slova x, y a z komutují.

Důkaz. Díky symetrii můžeme předpokládat $|x^n| \geq |y^m|$.

Slovo x^n má periody $|x|$ a $|z|$. Pokud $|x^n| \geq |z|+|x|$, pak mají podle Periodického lemmatu x a z periodu, která dělí $|x|$ a $|z|$, z čehož je snadno vidět, že všechna slova komutují. Podobně je tomu, pokud $|y^m| \geq |z| + |y|$.

Předpokládejme tedy, že x^{n-1} je vlastní prefix z a y^{m-1} je vlastní sufix z. Pak platí $|x^n| < 2|z|$ a $|y^m| < 2|z|$, a tedy $p < 4$.

Nechť je $p = 3$. Pokud $n \geq 3$, pak $|x^2| < |z|$ implikuje $|x^3| < \frac{3}{2}|z|$, což je v rozporu s předpokladem $|x^n| \geq |y^m|$. Tedy $n = 2$ a $|x| > |y|$. Existují slova u, v, w taková, že $x = uw = wv$, $z = xu = wvu$ a $y^m = vuwvu$. Slovo $uwv = xv = ux$ má periodu $|u|$ a periodu $|y|$, přičemž $|uwv| = |u|+|x| > |u|+|y|$. Podle Periodického lemmatu má tedy uwv periodu d dělící $|u|$ i $|y|$, a dělící tedy také $|z| = |y^m| - |uv| = |y^m| - 2|u|$. Slova y a z tedy mají periodu, která dělí $|y|$ i $|z|$, a tvrzení snadno plyne.

Zbývá případ $p = 2$. Tedy $z = x^{n-1}u = wy^m$, kde $uw = x$. Pak $wz = (wu)^n = w^2 y^m$, kde wu je kratší než z. Věta jistě platí, pokud $|z| = 1$ a indukcí podle $|z|$ můžeme předpokládat, že w, y a wu komutují, čímž je důkaz dokončen. □

Následující alternativní důkaz od Tera Harju a Dirka Nowotky využívá elegantně neohraničených slov.

Důkaz. Pro spor můžeme předpokládat, že slova x, y a z jsou primitivní a $x \neq y$. Jako v prvním důkazu ukážeme, že $|x| < |z|$ a $|y| < |z|$.

Je-li $p > 2$, pak z^p obsahuje alespoň dva výskyty Lyndonova slova konjugovaného se z. Alespoň jeden z nich je tedy faktorem x^n nebo y^m. To je ale spor, protože Lyndonovo slovo je neohraničené.

Případ $p = 2$ řešíme jako v prvním důkazu. □

Pozn.: Původní výsledek Lyndona a Schützenbergera z roku 1962 je silnější: věta platí i pro volné grupy.