Periody slov

Slovo w má *periodu* p, pokud $1 < p$ a $w[i] = w[i+p]$ pro všechna $1 \leq i < |w| - p$, kde $w[i]$ značí i-té písmeno w. Slovo w má periodu p právě když je prefixem nějaké mocniny nějakého slova délky p. Takové slovo u se pak nazývá *periodický kořen* slova w. Jinak řečeno, slovo u je periodický kořen slova w, právě když w je prefix u^ω, což je právě tehdy, je-li w prefixem uw. To uvádí periodicitu do úzkého vztahu s konjugovaností: $xz = zy$ znamená, že x je periodický kořen slova z, což je ostatně vidět z věty o řešení konjugační rovnice: $x = uv$ a $z = (uv)^i u$.

Podle definice má každé slovo w nekonečně mnoho period: každé přirozené číslo $p \geq |w|$ je jeho periodou. Dalším triviálním případem jsou násobky nejkratší periody: je-li nejkratší perioda p, je periodou i každé kp, bez ohledu na délku slova.

Slovo ale může mít více period i netriviálním způsobem. Např. slovo *abaababaaba* délky jedenáct má periody 5 a 8, aniž by mělo periodu $\mathrm{NSD}(5,8) = 1$. Kdy k takové situaci může dojít určuje následující věta pocházející od Finea a Wilfa, nazývaná také *Periodické lemma*.

Věta. Má-li slovo w délky $p + q - d$, kde $d = \mathrm{NSD}(p,q)$, periody p a q, má také periodu d.

Důkaz. Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $p < q$ (případ $p = q$ je zřejmý). Označme n délku w a pro každé $k \leq n$ označme w_k prefix w délky k. Víme, že w je prefix $w_p w$ i $w_q w$. Z toho je vidět, že w_{q-d} je prefix $w_{q-p} w_{q-d}$. Slovo w_{q-d} má tedy periody p a $q - p$. Protože $d = \mathrm{NSD}(p,q) = \mathrm{NSD}(p, q-p)$ a protože w_{q-d} má délku $p + (q-p) - d$, dostáváme indukcí podle délky w, že w_{q-d} má periodu d. Slovo w_{q-d} je tedy mocninou w_d. Protože $p \leq q - d$, je i w_p mocninou w_d. Protože w je prefixem w_p^ω, je i prefixem w_d^ω, což jsme chtěli ukázat. □

Věta. Nechť $p < q$ a p nedělí q. Pak existuje slovo délky $p + q - \mathrm{NSD}(p,q) - 1$, které má periody p a q, ale nemá periodu $\mathrm{NSD}(p,q)$.

Důkaz. Označme $\mathrm{NSD}(p,q) = d$. Je-li $q = p + d$. Pak $a^{p-1} b a^{p-1}$ je slovo splňující uvedené vlastnosti. Pokud $q = p + kd$ pro $1 < k$, pak kd nedělí p a indukcí získáme slovo v délky $q - d - 1 = (q-p) + p - d - 1 > \max(p, q-p)$, které má periody p a $q - p$ a nemá periodu d. Slovo v je tedy prefixem v_p^ω a v_{q-p}^ω, a tedy také slov $v_p v$ a $v_{q-p} v$. Uvažme prefix w slova v_p^ω, který má délku $p + q - d - 1 > q$. Slovo w má zřejmě periodu p (je prefixem v_p^ω) a nemá periodu d, protože v je prefix w. Zbývá tedy ukázat, že w má periodu q, neboli, že w je prefix $w_q w$. Všimněme si nejprve, že $w = v_p v$, a tedy $w_q = v_p v_{q-p}$. Protože v je prefix $v_{q-p} v$, dostáváme nyní, že w je prefix $v_p v_{q-p} v_p = w_q v_p$, což je prefix $w_q w$. □