ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

KMA/G2 GEOMETRIE 2

Pomocný učební text

Miroslav Lávička

Plzeň, únor 2006

Předmluva

Tento text vznikl jako pomocný učební materiál pro potřeby studentů Fakulty aplikovaných věd a Fakulty pedagogické Západočeské univerzity v Plzni, kteří v akademickém roce 2003/04 navštěvovali předmět *KMA/G2 Geometrie 2*. V minulém a letošním akademickém roce bylo provedeno jen několik drobných úprav a doplnění.

Jsem si plně vědom, že jde stále jen o provizorní formu textu a že v materiálu nejspíše najdete velké množství nedopatření a chyb. Budu Vám proto velmi vděčný za případné připomínky a návrhy na úpravy či doplnění.

Plzeň, 7. února 2006

Miroslav Lávička (`lavicka@kma.zcu.cz`)

Použité značky a symboly

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$	obor reálných, komplexních, celých čísel
$\mathbb{R}^n$	aritmetický vektorový prostor tvořený n-ticemi reálných čísel
V_n	vektorový prostor volných vektorů
$V_n(O)$	vektorový prostor vázaných vektorů vycházejících z bodu O
$\vec{x} \in V_n$	vektor
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$	aritmetický vektor (souřadný vektor)
$\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n+1}$	vektor homogenních souřadnic
$\vec{o}$, $\mathbf{o}$, $\widetilde{\mathbf{o}}$	nulový vektor
$\mathbf{A}$	matice
$\widetilde{\mathbf{A}}$	homogenní matice (tj. třída nenulových násobků matice $\mathbf{A}$)
$\mathbb{A}_n$, $\mathbb{E}_n$	afinní, eukleidovský prostor
$\overline{\mathbb{A}_n}$, $\overline{\mathbb{E}_n}$	projektivní rozšíření afinního, eukleidovského prostoru
$\mathbb{M}_n$	Möbiův prostor
$\mathbb{P}_n$	projektivní prostor
f, g, h, $\ldots$	geometrická zobrazení
$id_{\mathcal{A}}$	identita na množině $\mathcal{A}$
$\mathcal{G}$	grupa geometrických zobrazení/transformací
A, B, C, $\ldots$	body
p, q, $\ldots$	přímky
ϱ, σ, $\ldots$	(nad)roviny
P_∞, p_∞, π_∞	nevlastní bod, nevlastní přímka, nevlastní (nad)rovina
α, β, $\ldots$, $\angle$	úhel
$k(\varrho, S, r)$	kružnice se středem S a poloměrem r ležící v rovině ϱ
$\kappa(S, r)$	kulová plocha/(nad)sféra se středem S a poloměrem r
$\mathcal{S}\langle\ldots\rangle$, $\mathcal{KSS}$	soustava souřadnic, kartézská soustava souřadnic
$A \in p$, $A \in \varrho$	bod A inciduje s přímkou p, resp. s (nad)rovinou ϱ
$p \subset \varrho$	přímka p inciduje s (nad)rovinou ϱ
$P \in p \cap q$, $\ldots$	bod P je průsečík přímek p a q
$p = \varrho \cap \sigma$	přímka p je průsečnice rovin ϱ a σ
$p \parallel q$, $p \parallel \varrho$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q, resp. s (nad)rovinou ϱ
$p \perp q$, $p \perp \varrho$	přímka p je kolmá na přímku q, resp. na (nad)rovinu ϱ
$\lvert XY\rvert$, $\lvert\vec{x}\rvert$, $\lvert\mathbf{x}\rvert$	velikost úsečky XY, velikost (norma) vektoru $\vec{x}$, resp. $\mathbf{x}$
$\lvert A, p\rvert$, $\lvert A, \varrho\rvert$	vzdálenost bodu A od přímky p, resp. od (nad)roviny ϱ
(A, B, C)	dělicí poměr tří kolineárních bodů
(A, B, C, D)	dvojpoměr čtyř kolineárních bodů
$\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$	shodnost útvarů $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$
$\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2$	podobnost útvarů $\mathcal{U}_1$ a $\mathcal{U}_2$

Obsah

Kapitola 1

Afinní zobrazení

1.1 Úvodní pojmy

Definice 1.1.1.

Geometrickým zobrazením (popř. **geometrickou korespondencí** či **příbuzností**) nazýváme předpis $f: \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, který každému bodu X z množiny $\mathcal{A}$ (tzv. **vzoru**) přiřazuje nejvýše jeden bod $X' = f(X)$ z množiny $\mathcal{B}$ (tzv. **obraz**). Je-li rovněž přiřazení $f^{-1}: \mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$ geometrickým zobrazením, potom jej nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

Definičním oborem zobrazení f rozumíme množinu $\mathcal{D}(f)$ právě těch prvků $X \in \mathcal{A}$, pro něž je definován obraz $X' = f(X) \in \mathcal{B}$.

Obrazem bodové množiny $\mathcal{M} \subseteqq \mathcal{A}$ rozumíme množinu

$$f(\mathcal{M}) = \{Y \in \mathcal{B} : \ Y = f(X), \text{ kde } X \in \mathcal{M}\} \subseteqq \mathcal{B}.$$

Zobrazení f se nazývá **surjektivní** (zkr. **surjekce**), právě když $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$.

Zobrazení f se nazývá **prosté**, resp. **injektivní** (zkr. **injekce**), právě když platí $X_1 \neq X_2 \Rightarrow f(X_1) \neq f(X_2)$ (tj. různým vzorům jsou přiřazeny různé obrazy).

Je-li $\mathcal{D}(f) = \mathcal{A}$ (tj. ke každému prvku z množiny vzorů je definován obraz) a současně je f *injektivní* a *surjektivní*, nazýváme toto zobrazení **vzájemně jednoznačné**, resp. **bijektivní** (zkr. **bijekce**).

Vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathcal{A}$ na sebe ($f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$) nazýváme **geometrická transformace**. Geometrická transformace se nazývá **identická** (zkr. **identita**), právě když pro každé $X \in \mathcal{A}$ je $f(X) = X$; identitu na množině $\mathcal{A}$ budeme značit $id_{\mathcal{A}}$.

Skládání geometrických zobrazení. Nechť jsou dána geometrická zobrazení $f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ a $g : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{C}$. **Složením zobrazení** f a g rozumíme zobrazení $h = f \circ g$ dané předpisem

$$h = f \circ g : \; X \mapsto g(f(X)) = g(Y) = Z = h(X),$$

kde $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$, $Z \in \mathcal{C}$. Danou operaci označujeme **skládání zobrazení**.[1] Skládání geometrických zobrazení je **asociativní**:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h,$$

ale *obecně není* **komutativní**:

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Jsou-li f a g bijekce, potom je bijektivní i $f \circ g$.

Geometrickou transformaci f na množině $\mathcal{A}$, která není identitou, nazýváme **involutorní transformace** (zkr. **involuce**), právě když pro ni platí $f \circ f = f^2 = id_{\mathcal{A}}$, tj. involuce je inverzní sama k sobě ($f^{-1} = f$).

Definice 1.1.2.

Množinu $\mathcal{G}$ geometrických transformací na množině $\mathcal{A}$ nazýváme **grupa geometrických transformací**, jestliže pro všechna $f, g \in \mathcal{G}$ platí:

$$f \circ g \in \mathcal{G}, \qquad f^{-1} \in \mathcal{G}, \qquad id_{\mathcal{A}} \in \mathcal{G}.$$

Geometrické vlastnosti a vztahy, které se při daném zobrazení nemění (např. velikosti úseček, velikosti úhlů, dělicí poměr, smysl obíhání vrcholů trojúhelníka apod.) nazýváme **invarianty** geometrického zobrazení. Obdobně můžeme hovořit o invariantech celé grupy geometrických transformací, tj. o vlastnostech, jenž jsou invariantní vůči všem prvkům této grupy.

[1] Všimněte si *pořadí*, ve kterém se skládání provádí: $(f \circ g)(X) = g(f(X))$.

Samodružné prvky. Při studiu geometrických zobrazení je užitečné určit tzv. **samodružné prvky** (body, přímky, roviny, kružnice apod.), jež se zobrazují samy na sebe.

DEFINICE 1.1.3.

Buď $f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ geometrické zobrazení z množiny $\mathcal{A}$ do množiny $\mathcal{B}$, přičemž předpokládejme $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ (speciálně $\mathcal{A} \subseteqq \mathcal{B}$). Bod $S \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ se nazývá **samodružný bod** zobrazení f, právě když $f(S) = S$; bodová množina $\mathcal{M} \subseteqq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ se nazývá **samodružná množina** zobrazení f, právě když $f(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Množina $\mathcal{M}$ se nazývá **množina samodružných bodů**, je-li každý její bod samodružný.

Identita je zřejmě transformací, v níž jsou všechny body i ostatní geometrické útvary samodružné a samozřejmě všechny vlastnosti jsou invarianty.

1.2 Afinní zobrazení a afinní transformace

Afinní zobrazení jsou zobrazení afinního prostoru, jejichž invarianty jsou *kolinearita*, *rovnoběžnost* a *dělicí poměr*.

DEFINICE 1.2.1.

Buďte $\mathbb{A}_n$ a $\mathbb{A}'_m$ dva afinní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ se nazývá **afinní zobrazení**, právě když pro každé tři různé kolineární body $X, Y, Z \in \mathbb{A}_n$ a jejich obrazy $X', Y', Z' \in \mathbb{A}'_m$ platí:

(A-1) X', Y', Z' buďto splynou, anebo jde rovněž o tři různé kolineární body;

(A-2) za předpokladu, že jsou X', Y', Z' tři různé kolineární body, potom $(XYZ) = (X'Y'Z')$.

Dá se dokázat, že každé afinní zobrazení splňuje ještě tyto vlastnosti:

- Afinní podprostor $\mathbb{A}_r$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ přechází v afinní podprostor $\mathbb{A}'_s$ afinního prostoru $\mathbb{A}'_m$:
$$f : \mathbb{A}_r \to f(\mathbb{A}_r) = \{Y \in \mathbb{A}'_m : \ Y = f(X), \text{ kde } X \in \mathbb{A}_r\} = \mathbb{A}'_s.$$
- Rovnoběžné afinní podprostory $\mathbb{A}_r \parallel \mathbb{A}_s$ $(\mathbb{A}_r, \mathbb{A}_s \subset \mathbb{A}_n)$ se zobrazí na dva rovnoběžné podprostory $f(\mathbb{A}_r) \parallel f(\mathbb{A}_s)$ $(f(\mathbb{A}_r), f(\mathbb{A}_s) \subset \mathbb{A}'_m)$; speciálně na dva body.

Obraz $\mathbb{A}'_n = f(\mathbb{A}_n)$ afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ v afinním zobrazení f je podprostorem afinního prostoru $\mathbb{A}'_m$, a proto $n \geqq n'$ a současně $n' \leqq m$. Pro $n' = m$ je afinní zobrazení f *surjektivní* a pro $n = n'$ je afinní zobrazení f *injektivní*.

Je-li f *bijekce* ($n = n' = m$), potom jej nazýváme **regulární afinní zobrazení**, resp. **afinita**. Platí, že obrazem přímky p v afinitě f je přímka p' a obecně obrazem k-tice lineárně nezávislých bodů ($k \leqq n$) je opět k-tice lineárně nezávislých bodů. Navíc inverzním zobrazením k afinitě f je rovněž regulární afinní zobrazení $f^{-1} : \mathbb{A}'_m \to \mathbb{A}_n$.

Afinní zobrazení, která nejsou regulární (tj. pro něž platí $n > n'$), nazýváme **singulární**. V tomto případě existují v afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ přímky, jenž se zobrazují na body afinního podprostoru $\mathbb{A}'_n \subset \mathbb{A}'_m$.

Analytické vyjádření afinních zobrazení. Afinní zobrazení

$$f: \ \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m, \quad X \mapsto f(X) = X'$$

indukuje jednoznačně vektorové zobrazení (tzv. **asociované zobrazení**) φ operující mezi zaměřeními výše uvedených afinních prostorů, které je dáno předpisem

$$\varphi: \ V_n \to V'_m, \qquad \overrightarrow{O'X'} = \varphi(\overrightarrow{OX}),$$

kde $O' = f(O)$, $X' = f(X)$. Lze dokázat, že asociované zobrazení je **lineární zobrazení**, tj. splňuje podmínku:

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in V_n, \ \forall k, l \in \mathbb{R}: \quad \varphi(k\vec{u} + l\vec{v}) = k\varphi(\vec{u}) + l\varphi(\vec{v})$$

Z definice asociovaného zobrazení $\varphi(\overrightarrow{OX}) = f(X) - f(O)$ bezprostředně plyne

$$f(X) = f(O) + \varphi(\overrightarrow{OX}), \tag{1.1}$$

tj. je-li dáno asociované zobrazení $\varphi: \ V_n \to V'_m$ a jedna dvojice afinně sdružených bodů $[O, O' = f(O)]$, je jednoznačně určen i obraz $X' = f(X)$ každého bodu $X \in \mathbb{A}_n$.

Nechť je v afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ zvolena afinní soustava souřadnic $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \rangle$ a v afinním prostoru $\mathbb{A}'_m$ afinní soustava souřadnic $\langle P; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \ldots, \vec{d}_m \rangle$. Asociované zobrazení $\varphi: \ V_n \to V'_m$ je jednoznačně určeno, známe-li obrazy bázových vektorů $\vec{e}_i$, tj.

$$\varphi(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\vec{d}_j, \quad i = 1, 2, \dots n.$$

Označíme-li $\vec{\mathbf{e}} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)^{\mathrm{T}}$ a $\vec{\mathbf{d}} = (\vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m)^{\mathrm{T}}$ potom můžeme předcházející vztah popsat

$$\varphi(\vec{\mathbf{e}}) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{d}}, \tag{1.2}$$

kde

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Vztah mezi vektorem $\vec{u}$ a příslušným souřadným vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots u_n)^{\mathrm{T}}$, resp. mezi jeho obrazem $\varphi(\vec{u}) = \vec{u'}$ a příslušným souřadným vektorem $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}' = (u'_1, u'_2, \dots u'_m)^{\mathrm{T}}$ je

$$\vec{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{e}}, \quad \text{resp.} \quad \vec{u'} = \mathbf{u}'^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{d}}.$$

S využitím vlastností asociovaného zobrazení (lineární zobrazení!) a vztahu (1.2) můžeme psát

$$\varphi(\vec{u}) = \begin{cases} \mathbf{u}'^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{d}} \\ \varphi(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{e}}) = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\varphi(\vec{\mathbf{e}}) = \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{d}} = (\mathbf{A}\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\vec{\mathbf{d}} \end{cases}$$

Pro souřadnice libovolného vektoru $\vec{u}$ a jeho obrazu $\varphi(\vec{u}) = \vec{u'}$ tedy platí transformační vztahy

$$\varphi: \ \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}. \tag{1.3}$$

Z (1.1) a (1.3) ihned vyplývá hledaný vztah mezi souřadnicemi $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots x_n])^{\mathrm{T}}$ bodu X a souřadnicemi $\mathbf{x}' = [x'_1, x'_2, \dots x'_m]^{\mathrm{T}}$ jeho obrazu $X' = f(X)$ (tj. analytické vyjádření afinního zobrazení f) ve tvaru:

$$f: \ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{1.4}$$

neboli po rozepsání

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots b_m]^{\mathrm{T}}$ jsou souřadnice obrazu původního počátku $f(O)$ v afinní soustavě souřadnic $\langle P; \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m \rangle$ a $\mathbf{A}$ je matice, jejímiž sloupcovými vektory jsou souřadné vektory obrazů původních bázových vektorů $\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$ v bázi $\langle \vec{d}_1, \vec{d}_2, \dots, \vec{d}_m \rangle$.

Věta 1.2.1. *Afinní zobrazení $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}'_m$ popsané rovnicí (1.4) je jednoznačně určeno, jsou-li známy obrazy $f(P_0), f(P_1), \dots, f(P_n) \in \mathbb{A}'_m$ $n+1$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1, \dots, P_n \in \mathbb{A}_n$.* □

Důkaz: Označme

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0), \text{ resp. } \quad \mathbf{P}' = (\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_0, \dots, \mathbf{p}'_n - \mathbf{p}'_0)$$

matice, jejichž sloupcovými vektory jsou souřadnice vektorů $P_i - P_0$, resp. $P'_i - P'_0$ $(i = 1, \dots, n)$. Jelikož je podle (1.3)

$$\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_0 = \mathbf{A}(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

potom platí

$$\mathbf{P}' = \mathbf{AP}.$$

Podle předpokladu jsou body $P_0, P_1, \dots, P_n$ (tj. i vektory $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_0$) lineárně nezávislé, a proto je matice $\mathbf{P}$ *regulární* a lze vypočítat její inverzní matici. Pro matici $\mathbf{A}$ tedy dostáváme:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{P}^{-1}.$$

Dosazením souřadnic bodů P_0 a P'_0 do rovnice (1.4) konečně obdržíme

$$\mathbf{b} = \mathbf{p}'_0 - \mathbf{A}\mathbf{p}_0$$

a tudíž afinní zobrazení je jednoznačně popsáno pomocí $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b}$. □

Zdůrazněme, že pro *regulární* afinní zobrazení (*afinity*) musí být čtvercová matice $\mathbf{A}$ v rovnici (1.4) *regulární* — kdyby totiž byla matice $\mathbf{A}$

singulární, potom z řešení soustavy $\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ (neboli $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{o}$) vyplývá, že by existoval celý neprázdný afinní podprostor $\mathbb{A}_r \subset \mathbb{A}_n$ (kde $r = n - \mathrm{hod}(\mathbf{A}) \geqq 1$), jehož každý bod by se zobrazoval na stejný bod jako počátek O, tj. $f(\mathbb{A}_r) = f(O)$ — spor s vlastnostmi bijekce!

V případě regulárního afinního zobrazení (afinity) f má tedy smysl hovořit o inverzním afinním zobrazení f^{-1}, které je popsáno rovnicí:

$$f^{-1}: \ \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}' - \mathbf{b}). \tag{1.5}$$

Ekviafinity. Ukážeme, jaký geometrický význam má deteminant matice $\mathbf{A}$ z rovnice (1.4). Pro zjednodušení předpokládejme, že f je afinita mezi afinními prostory $\mathbb{A}_3$ a $\mathbb{A}'_3$. Zvolme v $\mathbb{A}_3$ tři lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, které určují rovnoběžnostěn $\mathcal{T}$, jehož *objem* vypočteme

$$|\mathcal{T}| = |[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]| = |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})|.$$

Podle (1.3) je $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$, $\varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$, $\varphi(\mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{w}$, tj. můžeme psát

$$\det(\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{w}) = \det[\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})] = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}),$$

Pro objem rovnoběžnostěnu $\mathcal{T}'$, jehož hranami jsou vektory $\varphi(\mathbf{u})$, $\varphi(\mathbf{v})$, $\varphi(\mathbf{w})$, proto platí

$$|\mathcal{T}'| = |\det(\mathbf{A})| \cdot |\mathcal{T}|.$$

Afinity, které zachovávají objem rovnoběžnostěnu (tj. pro něž platí $|\det(\mathbf{A})| = 1$) se nazývají **ekviafinity**. Lze dokázat, že výše uvedený výsledek je možné zobecnit pro libovolné n pro objem libovolného tělesa; konkrétně v případě $n = 2$ je ekviafinním invariantem *obsah*, v případě $n = 1$ *délka*.

Afinní transformace. Vzájemně jednoznačné afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ na sebe ($f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$) se nazývá **afinní transformace**. V tomto případě jsou souřadnice vzoru $X = \mathbf{x}$ i obrazu $X' = \mathbf{x}'$ vztaženy k téže soustavě souřadnic $\langle O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle$ a analytické vyjádření má tvar

$$f: \ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{1.6}$$

kde $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice $n \times n$.

Složením dvou afinních transformací $f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ a $g : \mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ vznikne afinní transformace o rovnici

$$f \circ g: \ \mathbf{x}' = \mathbf{C}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) + \mathbf{d} = (\mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{d});$$

inverzním zobrazením k afinní transformaci $f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ je afinní transformace o rovnici

$$f^{-1} : \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} + (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b});$$

identita je afinní transformace s analytickým vyjádřením

$$id_{\mathbb{A}_n} : \mathbf{x}' = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}.$$

Z toho plyne, že množina všech afinních transformací prostoru $\mathbb{A}_n$ tvoří vzhledem k operaci skládání tzv. **afinní grupu** $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$.

Jestliže je $\det(\mathbf{A}) > 0$, potom se afinita nazývá **přímá**; je-li $\det(\mathbf{A}) < 0$, potom se afinita nazývá **nepřímá**. Přímá (resp. nepřímá) afinita převádí uspořádanou n-tici lineárně nezávislých vektorů v souhlasně (resp. nesouhlasně) orientovanou n-tici vektorů.

Pro souřadnice **samodružného bodu** S afinní transformace $f : \mathbb{A}_n \to \mathbb{A}_n$ platí

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{s} + \mathbf{b} = \mathbf{o}.$$

Diskusí řešení výše uvedené soustavy dostáváme:

- afinita f nemá *žádný* samodružný bod $\Leftrightarrow h = \text{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) \neq h^* = \text{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}, \mathbf{b})$;
- afinita f má *právě jeden* samodružný bod $\Leftrightarrow h = h^* = n$; tato afinní transformace se nazývá **středová afinní transformace** a pro samodružný bod (**střed**) S platí

$$\mathbf{s} = -(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b};$$

- afinita f má *přímku* samodružných bod $\Leftrightarrow h = h^* = n - 1$;
- afinita f má *rovinu* samodružných bod $\Leftrightarrow h = h^* = n - 2$;

  $\vdots$
- *všechny* body jsou samodružné $\Leftrightarrow h = h^* = 0$, tj. v případě, že $f = id_{\mathbb{A}_n}$.

Nechť $p : X = A + \vec{u}$ je přímka afinního prostoru $\mathbb{A}_n$. Dále nechť platí $p \parallel f(p)$, kde $f(p) : X = f(A) + \varphi(\vec{u})$ (ale nemusí nastat $p = f(p)$!).

Potom směr přímky p nazýváme **samodružným směrem** afinity f, přičemž je zřejmé, že musí platit

$$\varphi(\vec{u}) = \varrho\vec{u}.$$

Pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ *samodružného směru* $\langle\mathbf{u}\rangle$ afinity prostoru $\mathbb{A}_n$ tedy platí

$$\varrho\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \varrho \neq 0,$$

tj. směr daný vektorem $\mathbf{u}$ je samodružný, právě když vektor $\mathbf{u}$ je *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ příslušným k *vlastnímu číslu* ϱ.

Základní afinity. Neidentická afinita f se nazývá **základní afinita** prostoru $\mathbb{A}_n$, právě když má *nadrovinu* samodružných bodů (tj. v $\mathbb{A}_2$ přímku, v $\mathbb{A}_3$ rovinu, …). Navíc jelikož je každé afinní zobrazení z prostoru $\mathbb{A}_n$ jednoznačně určeno $n+1$ páry afinně sdružených lineárně nezávislých bodů a dále víme, že nadrovina prostoru $\mathbb{A}_n$ je určena n lineárně nezávislými body, je zřejmé, že základní afinita f je jednoznačně určena, známe-li nadrovinu samodružných bodů η a dále jeden pár nesamodružných afinně sdružených bodů $[A, A' = f(A)]$ $(A, A' \notin \eta)$.

Hledejme vyjádření základní afinity f, známe-li nadrovinu samodružných bodů

$$\eta : c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots c_nx_n + c_0 = 0, \quad \mathbf{c} \neq \mathbf{o}$$

a dvojici afinně sdružených bodů $P[p_1, p_2, \ldots, p_n]$, $P'[p'_1, p'_2, \ldots, p'_n]$, z nichž žádný neleží v nadrovině η.

Při hledání samodružných $f:\ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ bodů dostáváme soustavu

$$\begin{array}{rcl}
(a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 & = & 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22} - 1)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_2 & = & 0 \\
& \vdots & \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - 1)x_n + b_n & = & 0,
\end{array}$$

která splňuje podmínku $h = h^* = 1$.

Všechny rovnice soustavy tudíž musejí být jistým λ_i-násobkem rovnice nadroviny samodružných bodů $\eta:\ \sum_{i=1}^{n} c_ix_i + c_0 = 0$, tj.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + (a_{ii} - 1)x_i + \ldots + a_{in}x_n + b_i = \lambda_i \cdot (\sum_{i=1}^{n} c_ix_i + c_0),$$

neboli

$$\underbrace{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ii}x_i + \ldots + a_{in}x_n + b_i}_{x_i'} = x_i + \lambda_i \cdot (\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_0),$$

Rovnice základní afinity tedy můžeme přepsat do tvaru

$$x_i' = x_i + \lambda_i \cdot (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.7}$$

Otázkou zůstává, jak vypočteme hodnoty λ_i. Jelikož známe souřadnice afinně sdružených bodů P, $P' = f(P)$, pak musí platit

$$p_i' = p_i + \lambda_i \cdot (c_1p_1 + c_2p_2 + \ldots + c_np_n + c_0),$$

odkud snadno nahlédneme

$$\lambda_i = \frac{p_i' - p_i}{c_1p_1 + c_2p_2 + \ldots + c_np_n + c_0}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.8}$$

Věta 1.2.2. *Ke každé afinitě f afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ existuje k základních afinit $f_1, f_2, \ldots, f_k$, kde $k \leqq n+1$, takových, že*

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k.$$

Důkaz: Zvolme $n+1$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{A}_n$, jež v afinitě f přecházejí do bodů $f(P_0), f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_n)$.

Uvažujme nadrovinu η_1, která neobsahuje body P_0 a $f(P_0)$. Jistě existuje afinita f_1, která zobrazuje bod P_0 do bodu $f(P_0)$ a má nadrovinu samodružných bodů η_1. Ostatní body se zobrazují podle následujícího schématu

$$\text{v afinitě } f_1 \quad \begin{array}{cccccc} P_0 & P_1 & P_2 & \ldots & P_{n-1} & P_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ f(P_0) & P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1\ n-1} & P_{1n}. \end{array}$$

Dále zvolme nadrovinu η_2, která neobsahuje body P_{11} a $f(P_1)$, ale prochází bodem $f(P_0)$. Uvažujme tentokrát základní afinitu f_2 s nadrovinou samodružných bodů η_2, která převádí bod P_{11} do bodu $f(P_1)$, neboli schématicky

$$\text{v afinitě } f_2 \quad \begin{array}{cccccc} f(P_0) & P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1\ n-1} & P_{1n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ f(P_0) & f(P_1) & P_{22} & \ldots & P_{2\ n-1} & P_{2n}. \end{array}$$

Dále zvolíme nadrovinu η_3 procházející body $f(P_0)$, $f(P_1)$ a neprocházející body P_{22}, $f(P_2)$. Potom jistá základní afinita f_3 s nadrovinou samodružných bodů η_3 zobrazí bod P_{22} do bodu $f(P_2)$. Schématicky

$$\text{v afinitě } f_3 \quad \begin{array}{cccccc} f(P_0) & f(P_1) & P_{22} & \dots & P_{2\,n-1} & P_{2n} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \dots & P_{3\,n-1} & P_{3n}. \end{array}$$

Takto bychom mohli postupovat dále, až bychom se dostali k nadrovině η_{n+1} procházející body $f(P_0), f(P_1), f(P_2), \dots, f(P_{n-1})$, ale neprocházející body $P_{nn}, f(P_n)$. Potom

$$\text{v afinitě } f_{n+1} \quad \begin{array}{cccccc} f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \dots & f(P_{n-1}) & P_{nn} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \dots & f(P_{n-1}) & f(P_n). \end{array}$$

V původní afinitě f, ale i ve složené afinitě $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{n+1}$ platí

$$\begin{array}{cccccc} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_{n-1} & P_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ f(P_0) & f(P_1) & f(P_2) & \dots & f(P_{n-1}) & f(P_n), \end{array}$$

a proto

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_{n+1}.$$

Uvědomme si navíc, že některý krok je možné vynechat, a to v případě, že nastane

$$P_{ij} = f(P_j).$$

Potom můžeme vynechat afinitu f_{i+1}. Počet $n+1$ základních afinit je tudíž maximální možný, obecně však

$$k \leqq n + 1. \qquad \square$$

1.3 Osová afinita

Jako *základní afinity* prostoru $\mathbb{A}_n$ označujeme afinní transformace, které mají *nadrovinu* samodružných bodů; v případě afinního zobrazení roviny $\mathbb{A}_2$ na sebe jde o přímku samodružných bodů. Princip této afinní transformace je možné bez obtíží rozšířit i na analogickou afinitu odehrávající se mezi dvěma *různými* rovinami.

DEFINICE 1.3.1.

Afinita $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}'_2$ mezi dvěma rovinami $\mathbb{A}_2, \mathbb{A}'_2 \subset \mathbb{A}_3$ se nazývá **osová afinita**, má-li právě přímku samodružných bodů o, kterou nazýváme **osa afinity**.

V případě $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}'_2$ je f základní afinita roviny $\mathbb{A}_2$ (osová afinita v rovině); v případě $\mathbb{A}_2 \neq \mathbb{A}'_2$ (osová afinita mezi dvěma rovinami) musí platit $o = \mathbb{A}_2 \cap \mathbb{A}'_2$ ($\mathbb{A}_2 \nparallel \mathbb{A}'_2$).

Kromě všech obecných vlastností afinních zobrazení splňuje osová afinita (v rovině i mezi dvěma různými rovinami) ještě další vlastnosti:

- pro všechny $X, Y \in \mathbb{A}_2$ ($X, Y \notin o$) je $XX' \parallel YY'$ a současně $f : XX' \to XX'$; směr s samodružných přímek XX' se nazývá **směr afinity**.
- buďto $p \parallel p' \parallel o$, nebo $p \cap p' \in o$.

Osovou afinitu $f : \mathbb{A}_2 \to \mathbb{A}'_2$ je možné zavést jako **rovnoběžné promítání** bodů roviny $\varrho = \mathbb{A}_2$ do **průmětny** $\pi = \mathbb{A}'_2$, přičemž směr afinity je totožný se **směrem promítání** ($X' \in s_X \cap \pi$, kde $X \in s_X$ a současně $s_X \parallel s$, přičemž $s \nparallel \varrho, \pi$).

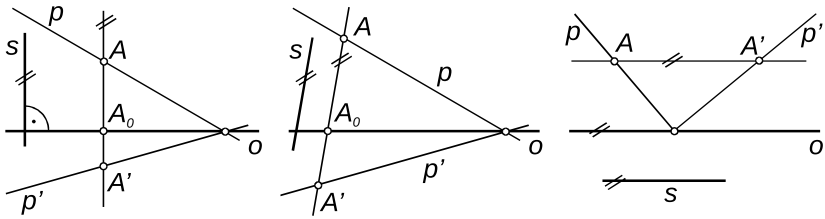
Konkrétním příkladem osové afinity je vztah, který platí mezi dvěma různými rovinnými řezy *hranolové*, resp. *válcové plochy* — *osou afinity* je průsečnice obou řezných rovin a *směr afinity* je dán směrem hran hranolové plochy, resp. směrem površek válcové plochy.

Osová afinita v rovině. Osovou afinitu mezi dvěma rovinami $g : {}^1\mathbb{A}_2 \to^2 \mathbb{A}_2$ (s osou o_g a směrem s_g) zobrazíme do roviny $\mathbb{A}_2$ v rovnoběžném promítání Π se směrem promítání σ ($\sigma \nparallel s$, $\sigma \nparallel {}^1\mathbb{A}_2, {}^2\mathbb{A}_2$). Geometrická příbuznost f mezi body roviny $\mathbb{A}_2$ ($f : X \mapsto X'$, kde $X = \Pi(X_1)$, $X' = \Pi(X_2)$ a $X_2 = g(X_1)$), která vznikla průmětem osové afinity g, je **osová afinita v rovině** s osou o_f a směrem s_f, přičemž $o_f = \Pi(o_g)$, $s_f = \Pi(s_g)$.

Připomeňme, že v předcházející kapitole jsme ukázali, že každá osová afinita v rovině (jakožto základní afinita v rovině) je jednoznačně určena osou o a libovolnou dvojicí afinně sdružených bodů $[X, X']$ ($X \neq X'$, $X, X' \notin o$).

Podle polohy směru afinity k ose afinity rozlišujeme tři typy osových afinit v rovině. Jestliže je směr afinity kolmý k její ose, afinita se nazývá

pravoúhlá, jestliže je směr kosý k ose, afinita se nazývá **kosoúhlá** a jestliže je směr rovnoběžný s osou, potom se nazývá **elace**.



Obr. 1.3.1

Jsou-li $X \neq X'$ libovolné dva odpovídající si body v osové afinitě, která není elací, a $X_0 \in XX' \cap o$, potom je dělicí poměr $k = (X'XX_0)$ konstantní a nezávisí na volbě odpovídajících si bodů. Číslo k se nazývá **charakteristika afinity**. Je zřejmé, že je-li charakteristika kladná, potom sobě odpovídající body leží v téže polorovině určené osou afinity; je-li charakteristika záporná, potom sobě odpovídající body leží v opačných polorovinách.

Pro involutorní zobrazení platí $X \mapsto X'$ a současně $X' \mapsto X$. Z toho pro osovou afinitu plyne, že bod X_0 musí být středem úsečky XX', tj. osová afinita je involucí, právě když není elací a její charakteristika je -1.

Kapitola 2

Shodná a podobná zobrazení

2.1 Shodná zobrazení

Eukleidovský prostor je afinní prostor, v jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin dvou vektorů. Pomocí skalárního součinu lze následně definovat vzdálenost dvou bodů

$$|XY| = |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2}.$$

DEFINICE 2.1.1.

> Buďte $\mathbb{E}_n$ a $\mathbb{E}'_n$ dva eukleidovské prostory. Afinní zobrazení $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'_n$ se nazývá **shodné zobrazení** (popř. **shodnost**), právě když pro každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a jejich obrazy $X', Y' \in \mathbb{E}'_n$ platí (S-1) $|X'Y'| = |XY|$.

Shodnosti jakožto afinní zobrazení splňují všechny vlastnosti afinit; z (S-1) navíc dále plyne:

(S-2) Shodná zobrazení zachovávají velikost úhlů.

(S-3) Shodná zobrazení zachovávají obsahy a objemy.

Každá afinita (tj. i shodnost) má analytické vyjádření (1.4). Proveďme následující úvahu:

(S-1) zřejmě platí $\Leftrightarrow$ $|\mathbf{y}' - \mathbf{x}'|^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2$, přičemž poslední rovnost můžeme dále upravovat

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})]^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})] &= (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\ (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\ (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Platí tedy, že rovnice (1.4) popisuje *shodnost* právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je **ortonormální**, tj. jestliže platí

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \text{neboli} \quad \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \tag{2.1}$$

DEFINICE 2.1.2.

Dva útvary $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{E}_n$, $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{E}'_n$ nazveme **shodné** (zapisujeme $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$), právě když existuje shodnost $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'_n$ taková, že $f(\mathcal{U}_1) = \mathcal{U}_2$.

Jsou-li dány dva shodné útvary $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$, potom je jednoznačně určena shodnost f taková, že $f : \mathcal{U}_1 \mapsto \mathcal{U}_2$ (stačí zvolit $n{+}1$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{U}_1$ a jim odpovídající body $P'_0, P'_1, \ldots, P'_n \in \mathcal{U}_2$).

Shodné transformace. Shodná transformace eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ má v souladu s (1.6) a (2.1) analytické vyjádření

$$f: \ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \text{kde} \ \ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}. \tag{2.2}$$

Pro každou ortonormální matici $\mathbf{A}$ platí

$$\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) \cdot \det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2 = \det(\mathbf{E}) = 1,$$

a proto nastává buďto $\det(\mathbf{A}) = +1$, nebo $\det(\mathbf{A}) = -1$ (shodnosti tedy patří mezi *ekviafinity*). Shodná transformace se nazývá

- **přímá** $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = +1$;
- **nepřímá** $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) = -1$.

Složením dvou shodných transformací $f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ (kde $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$) a $g : \mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ (kde $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \mathbf{E}$) vznikne shodná transformace o rovnici

$$f \circ g : \; \mathbf{x}' = (\mathbf{CA})\mathbf{x} + (\mathbf{Cb} + \mathbf{d}), \quad \text{kde} \;\; (\mathbf{CA})^{\mathrm{T}}(\mathbf{CA}) = \mathbf{E};$$

inverzním zobrazením ke shodné transformaci $f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$) je shodná transformace o rovnici

$$f^{-1} : \; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} + (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}), \quad \text{kde} \;\; (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E};$$

identita je shodná transformace s analytickým vyjádřením

$$id_{\mathbb{E}_n} : \; \mathbf{x}' = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}.$$

Z toho plyne, že množina všech shodných transformací prostoru $\mathbb{E}_n$ tvoří vzhledem k operaci skládání tzv. **grupu shodností** $\mathcal{G}_S$ (resp. **eukleidovskou** nebo **izometrickou grupu**). Přímé shodnosti pak tvoří podgrupu této grupy.

V souladu s obecným přístupem u afinit pro souřadnice *samodružného bodu* S shodné transformace $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ samozřejmě platí

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{s} + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad \text{kde} \;\; \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Obdobně i pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ *samodružného směru* $\langle \mathbf{u} \rangle$ shodnosti prostoru $\mathbb{E}_n$ platí stejně jako u afinit

$$\varrho\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \varrho \neq 0,$$

tj. směr daný vektorem $\mathbf{u}$ je samodružný, právě když vektor $\mathbf{u}$ je *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ příslušným k *vlastnímu číslu* ϱ. Ovšem vzhledem k tomu, že v případě shodností platí navíc

$$|\varphi(\vec{u})| = |\vec{u}|,$$

je zřejmé, že pro vlastní čísla dostáváme podmínku

$$|\varrho| = 1.$$

Souměrnosti podle nadroviny. K dané nadrovině η v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_n$ existují právě dvě shodnosti, při kterých jsou všechny body nadroviny η samodružné. Jednou z nich je identita, druhá se nazývá **souměrnost podle nadroviny** — ta přiřazuje každému bodu $X \notin \eta$ bod X' tak, že $XX' \perp \eta$ a střed úsečky XX' leží v nadrovině η. Každá souměrnost podle nadroviny je jednoznačně určena buďto tou nadrovinou, anebo též jednou dvojicí odpovídajících si nesamodružných bodů. Způsobem velmi podobným schématu u základních afinit (neboť souměrnost podle nadroviny je speciální základní afinitou v prostoru $\mathbb{E}_n$) bychom dokázali analogické tvrzení

Věta 2.1.1. *Ke každé shodnosti f eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ existuje k souměrností podle nadrovin $f_1, f_2, \dots, f_k$, kde $k \leqq n+1$, takových, že*

$$f = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_k. \qquad \square$$

2.2 Shodnosti v rovině

Shodné zobrazení v rovině $\mathbb{E}_2$ je popsáno rovnicí (2.2). Z podmínky $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ pro matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dostáváme

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \tag{2.3}$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \tag{2.4}$$

Z (2.3) plyne, že existuje takový úhel $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, že $a_{11} = \cos\varphi$ a $a_{21} = \sin\varphi$.

Je-li $\det(\mathbf{A}) = +1$ (*přímé shodnosti*),
potom vzhledem k tomu, že $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = +1$, vyplývá z (2.4) a (2.3) $a_{21} = -\sin\varphi$ a $a_{22} = \cos\varphi$, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\varphi^+. \tag{2.5}$$

Je-li $\det(\mathbf{A}) = -1$ (*nepřímé shodnosti*),
potom vzhledem k tomu, že $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -1$, vyplývá z (2.4) a (2.3) $a_{21} = \sin\varphi$ a $a_{22} = -\cos\varphi$, tj.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\varphi^-. \tag{2.6}$$

Pro různé hodnoty φ ($0 \leqq \varphi < 2\pi$) představují (2.5) a (2.6) všechny možné ortonormální matice typu (2×2).

Přímé shodnosti v rovině mají analytické vyjádření

$$f: \ \mathbf{x}' = \mathbf{A}^+_\varphi \mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{2.7}$$

kde $\mathbf{A}^+_\varphi$ je matice typu (2.5) a soustava pro hledání samodružných bodů nabývá tvaru

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož platí

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = (\cos\varphi - 1)^2 + \sin^2\varphi = 2(1 - \cos\varphi),$$

je zřejmé, že tato soustava má jediné řešení, právě když $\cos\varphi \neq 1$.

Rozeznáváme následující typy přímých shodností v rovině:

- Je-li $\varphi = 0$ (tj. $\mathbf{A}^+_\varphi = \mathbf{E}$) a $\mathbf{b} = \mathbf{o}$; potom je f **identita**

$$id: \ \mathbf{x}' = \mathbf{x}.$$

- Je-li $\varphi = 0$ (tj. $\mathbf{A}^+_\varphi = \mathbf{E}$) a $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, potom je f **posunutí** (**translace**) s vektorem posunutí $\vec{b}$

$$\mathcal{T}_{\vec{b}}: \ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

- Je-li $\varphi \neq 0$ (tj. existuje-li právě jeden samodružný bod S), potom je f **otočení** (**rotace**) se středem S

$$\mathbf{s} = -(\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \\ \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

  a úhlem otočení φ:

$$\mathcal{R}_{S,\varphi}: \ \mathbf{x}' = \mathbf{A}^+_\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s};$$

  je-li speciálně $\varphi = \pm\pi$, potom je rotace f **středovou souměrností** se středem S

$$\mathcal{S}_S: \ \mathbf{x}' = -\mathbf{x} + 2\mathbf{s}.$$

Nepřímé shodnosti v rovině mají analytické vyjádření

$$f:\ \mathbf{x}' = \mathbf{A}_{\varphi}^{-}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \tag{2.8}$$

kde $\mathbf{A}_{\varphi}^{-}$ je matice typu (2.6) a soustava pro hledání samodružných bodů nabývá tvaru

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - 1 & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož platí

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = (\cos\varphi - 1)(-\cos\varphi - 1) - \sin^2\varphi = 0,$$

je patrné, že tato soustava nemá nikdy jediné řešení.

Rozeznáváme následující typy nepřímých shodností v rovině:

- Jestliže je $\mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = \mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}, \mathbf{b}) = 1$, potom existuje přímka samodružných bodů o, která je zřejmě v případě $\cos\varphi \neq 1$ (popř. $\cos\varphi = 1$) popsána rovnicí

  $$(\cos\varphi - 1)x_1 + \sin\varphi x_2 + b_1 = 0 \quad (\text{popř. } -2x_2 + b_2 = 0);$$

  lze dokázat, že pro oba případy ($\cos\varphi = 1$ i $\cos\varphi \neq 1$) má přímka o souřadnice $\widetilde{\mathbf{n}} = (n_0, n_1, n_2)$, kde

  $$\begin{aligned} n_0 &= -\frac{1}{2}\left(b_1 \sin\frac{\varphi}{2} - b_2 \cos\frac{\varphi}{2}\right) \\ n_1 &= \sin\frac{\varphi}{2} \\ n_2 &= -\cos\frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

  Nepřímá shodnost f s přímkou samodružných bodů je **osová souměrnost** $\mathcal{O}_o$ s osou o.

  Podívejme se na analytické vyjádření osové souměrnosti podrobněji. Hodnost matice lze určit jak pomocí jejích řádkových, tak pomocí jejích sloupcových vektorů — a proto jelikož platí

  $$\mathbf{b} = k \cdot (\cos\varphi - 1, \sin\varphi)^{\mathrm{T}} = -2k \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2}, -\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{b} = l \cdot (\sin\varphi, -\cos\varphi - 1)^{\mathrm{T}} = 2l\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2}, -\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\mathrm{T}},$$

je zřejmě $\mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}, \mathbf{b}) = 1$, právě když

$$\mathbf{b} = m \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2}, -\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\mathrm{T}} = m \cdot (n_1, n_2)^{\mathrm{T}},$$

kde $k, l, m \in \mathbb{R}$. Odtud vidíme, že vektor $\mathbf{b}$ je normálovým vektorem osy souměrnosti o.

- Jestliže je $\mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1 \neq \mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}, \mathbf{b}) = 2$, potom neexistuje žádný samodružný bod. Navíc víme, že $\mathrm{hod}(\mathbf{A}^{+}_{\varphi} - \mathbf{E}, \mathbf{b}) = 2$, právě když

$$\mathbf{b} \neq m \cdot \left(\sin\frac{\varphi}{2}, -\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Pro vektor $\mathbf{b}$ můžeme provést rozklad do složek $\mathbf{b}'$ a $\mathbf{u}$, z nichž první je kolmá k přímce se souřadnicemi $\widetilde{\mathbf{n}} = (n_0, n_1, n_2)$ a druhá je s ní rovnoběžná:

$$\mathbf{b} = \underbrace{t_1 \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}'} + \underbrace{t_2 \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{2.9}$$

Nepřímá shodnost bez samodružných bodů, tzv. **posunutá souměrnost** (**posunuté zrcadlení**), je tedy složením osové souměrnosti $\mathcal{O}_o : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}'$ a translace $\mathcal{T}_{\vec{u}} : \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, kde $\vec{u} \parallel o$.

Následující tabulka shrnuje klasifikaci shodných transformací v rovině $\mathbb{E}_2$:

$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$	$\mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 2$	$\mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 1$	$\mathrm{hod}(\mathbf{A} - \mathbf{E}) = 0$
přímé shodnosti $\det(\mathbf{A}) = +1$	*rotace*; spec. pro $\varphi = \pm\pi$, tj. pro $\mathbf{A} = -\mathbf{E}$ *středová souměrnost*	—	*translace* ($\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$)
			identita ($\mathbf{b} = \mathbf{o}$)
nepřímé shodnosti $\det(\mathbf{A}) = -1$	—	*osová souměrnost* (přímka samodružných bodů)	—
		posunutá souměrnost (žádné samodružné body)	

2.3 Shodnosti v prostoru

Shodné zobrazení f v prostoru $\mathbb{E}_3$ je popsáno rovnicí (2.2), kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

je ortonormální matice, tj. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ a $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$.

Pro $\det(\mathbf{A}) = +1$ je shodnost f:

- **identita** id ($\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{b} = \mathbf{o}$);
- **translace** $\mathcal{T}_{\vec{b}}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$);
- **rotace** $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ kolem osy o o úhel φ (speciálně pro $\varphi = \pm\pi$ **osová souměrnost** $\mathcal{O}_o$ s osou o);
- **šroubový pohyb** $\mathcal{S}_{o,\varphi,\vec{u}} = \mathcal{R}_{o,\varphi} \circ \mathcal{T}_{\vec{u}}$ s osou o a parametrem p, kde $|\vec{u}| = p \cdot \varphi$.

Pro $\det(\mathbf{A}) = -1$ je shodnost f:

- **rovinová souměrnost** (**zrcadlení**) Ω_ω s rovinou souměrnosti ω;
- **posunutá souměrnost** (**posunuté zrcadlení**) $\mathcal{S}_{\omega,\vec{u}} = \Omega_\omega \circ \mathcal{T}_{\vec{u}}$, kde $\vec{u} \parallel \omega$;
- **otočená souměrnost** (**otočené zrcadlení**) $\mathcal{S}_{\omega,o,\varphi} = \Omega_\omega \circ \mathcal{R}_{o,\varphi}$, kde $o \perp \omega$ (speciálně pro $\varphi = \pm\pi$ **středová souměrnost** se středem $\{S\} = o \cap \omega$).

Z výše uvedeného je patrné, že kromě identity, translace, rotace kolem osy a rovinové souměrnosti lze ostatní shodnosti získat složením již zmíněných typů. Vlastnosti i analytická vyjádření identity a translace již byly uvedeny, a proto se podrobněji podíváme jen na *rotaci kolem osy* a *rovinovou souměrnost.*

Rotace $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ kolem osy o o úhel φ. Z důvodu zjednodušení volíme nejprve osu procházející počátkem

$$o: \ \mathbf{x} = t\mathbf{u}, \quad \text{kde} \ \ |\mathbf{u}| = 1.$$

Rotace (otočení) kolem *osy otočení* o o orientovaný úhel φ je shodnost, která libovolnému bodu X přiřazuje bod X' předpisem

$\mathcal{R}_{S_x,\varphi}: X \mapsto X'$, kde $\mathcal{R}_{S_x,\varphi}$ je rotace v rovině ϱ ($\varrho \ni X$, $\varrho \perp o$) se středem S_X ($\{S_X\} = \varrho \cap o$) o úhel φ.

Pro střed S_X dostáváme

$$\mathbf{s}_X = (\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}) = (\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{x}.$$

Dále volíme v rovině ϱ bod Y, a to vztahem

$$\overrightarrow{S_X Y} = \mathbf{u} \times \overrightarrow{S_X X}, \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{y} - \mathbf{s}_X = \mathbf{u} \times (\mathbf{x} - \mathbf{s}_X) = \mathbf{u} \times [\mathbf{x} - (\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})\mathbf{u}] = \mathbf{u} \times \mathbf{x} = \mathbf{A}'\mathbf{x}, \text{ kde}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro bod X' tedy dostáváme

$$X' = S_X + \overrightarrow{S_X X}\cos\varphi + \overrightarrow{S_X Y}\sin\varphi, \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{x}' = (\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{x} + \cos\varphi[\mathbf{x} - (\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}})\mathbf{x}] + \sin\varphi \cdot \mathbf{A}'\mathbf{x}. \tag{2.10}$$

Rovnici (2.10) můžeme stručně psát

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}_{\vec{u},\varphi} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{kde} \tag{2.11}$$

$$\mathbf{A}_{\vec{u},\varphi} = \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} + \cos\varphi(\mathbf{E} - \mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}) + \sin\varphi \cdot \mathbf{A}' \tag{2.12}$$

je tzv. **matice otočení**.

Nechť nyní $O \notin o$, tj.

$$o: \ \mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}, \quad \text{kde } |\mathbf{u}| = 1.$$

Potom pro rotaci $\mathcal{R}_{o,\varphi}$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' - \mathbf{a} &= \mathbf{A}_{\vec{u},\varphi} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{A}_{\vec{u},\varphi} \cdot \mathbf{x} + \underbrace{(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{\vec{u},\varphi}) \cdot \mathbf{a}}_{\mathbf{b}} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Poznamenejme ještě, že v případě $\varphi = \pm\pi$ (*osová souměrnost v* $\mathbb{E}_3$) nabývá matice $\mathbf{A}_{\vec{u},\varphi}$ jednoduššího tvaru

$$\mathbf{A}_{\vec{u},\pm\pi} = 2\mathbf{u}\mathbf{u}^{\mathrm{T}} - \mathbf{E},$$

Je-li naopak dána rotace kolem osy rovnicí $\mathbf{x}' = \mathbf{A}_{\vec{u},\varphi} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$, potom rovnici osy (tj. přímky samodružných bodů) určíme řešením soustavy

$$(\mathbf{A}_{\vec{u},\varphi} - \mathbf{E})\mathbf{x} = -\mathbf{b}$$

a úhel φ zjistíme z matice $\mathbf{A}_{\vec{u},\varphi}$.

Rovinová souměrnost Ω_ω. Rovinová souměrnost je v $\mathbb{E}_3$ souměrností podle nadroviny, tj. jde o speciální případ základní afinity. Známe-li rovinu souměrnosti $\omega: \ \mathbf{n}\mathbf{x} + n_0 = 0$, pak snadno určíme i její transformační vztahy — stačí využít obecného algoritmu pro určení rovnic základní afinity. Pouze je nutné najít jednu dvojici nesamodružných sdružených bodů A, A', které v případě souměrnosti splňují podmínky $AA' \perp \omega$ a $(A + A')/2 = A_0$, kde $A_0 \in \omega$.

Je-li naopak dána rovinová souměrnost předpisem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, potom rovnici roviny souměrnosti (tj. roviny samodružných bodů) určíme řešením soustavy

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{x} = -\mathbf{b}$$

Analogicky jako v případě shodností v rovině je možné shrnout všechny typy shodných transformací v prostoru $\mathbb{E}_3$ do následující tabulky:

<table>
<tr><th>$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$</th><th>hod$(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = 3$</th><th>hod$(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = 2$</th><th>hod$(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = 1$</th><th>hod$(\mathbf{A}-\mathbf{E}) = 0$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">*přímé shodnosti*
det$(\mathbf{A}) = +1$</td><td rowspan="2">—</td><td>*šroubový pohyb*
(žádné samodružné body)</td><td rowspan="2">—</td><td>*translace*
$(\mathbf{b} \neq \mathbf{o})$</td></tr>
<tr><td>*rotace kolem osy*
(přímka samodružných bodů);
spec. pro $\varphi = \pm\pi$
osová souměrnost</td><td>*identita*
$(\mathbf{b} = \mathbf{o})$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">*nepřímé shodnosti*
det$(\mathbf{A}) = -1$</td><td rowspan="2">*otočená souměrnost*;
spec. pro $\varphi = \pm\pi$, tj. pro $\mathbf{A} = -\mathbf{E}$
středová souměrnost</td><td rowspan="2">—</td><td>*rovinová souměrnost*
(rovina samodružných b.)</td><td rowspan="2">—</td></tr>
<tr><td>*posunutá souměrnost*
(žádné samodružné body)</td></tr>
</table>

2.4 Podobná zobrazení

Podobná zobrazení jsou afinní zobrazení eukleidovského prostoru, jež zachovávají *tvar* geometrických útvarů.

DEFINICE 2.4.1.

Buďte $\mathbb{E}_n$ a $\mathbb{E}'_n$ dva eukleidovské prostory. Afinní zobrazení $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'_n$ se nazývá **podobné zobrazení** (popř. **podobnost**), jestliže existuje takové reálné číslo $k > 0$ (tzv. **poměr podobnosti**), že pro každé dva body $X, Y \in \mathbb{E}_n$ a jejich obrazy $X', Y' \in \mathbb{E}'_n$ platí (P-1) $|X'Y'| = k \cdot |XY|$.

Shodnosti jsou podobná zobrazení s poměrem podobnosti $k = 1$ (tzv. **nevlastní podobnosti**), pro $k \neq 1$ hovoříme o tzv. **vlastních podobnostech**.

Podobnosti jakožto afinní zobrazení splňují všechny vlastnosti afinit; z (P-1) navíc dále plyne:

(P-2) Podobná zobrazení zachovávají velikost úhlů.

(P-3) Podobná zobrazení zachovávají poměry obsahů a objemů.

Hledáme podmínku pro to, kdy je afinita s analytickým vyjádřením (1.4) podobností:

(P-1) zřejmě platí $\Leftrightarrow |\mathbf{y}' - \mathbf{x}'|^2 = k^2 \cdot |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2$, přičemž poslední rovnost lze dále upravit

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})]^{\mathrm{T}} \cdot [\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x})] &= k^2(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\ (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= k^2(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\ (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - k^2\mathbf{E})(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

Platí tedy, že rovnice (1.4) popisuje *podobnost* právě tehdy, když matice $\mathbf{A}$ je **ortogonální**, tj. jestliže platí

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = k^2\mathbf{E}, \quad \text{neboli} \quad \left(\frac{1}{k}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{k}\mathbf{A}\right) = \mathbf{E}. \tag{2.14}$$

Definice 2.4.2.

Dva útvary $\mathcal{U}_1 \subset \mathbb{E}_n$, $\mathcal{U}_2 \subset \mathbb{E}'_n$ nazveme **podobné** (zapisujeme $\mathcal{U}_1 \sim \mathcal{U}_2$), právě když existuje podobnost $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'_n$ taková, že $f(\mathcal{U}_1) = \mathcal{U}_2$.

Podobná transformace v $\mathbb{E}_n$ s poměrem podobnosti k se nazývá

- **přímá** $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = k^n > 0$;
- **nepřímá** $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A}) = -k^n < 0$.

Složením dvou podobných transformací $f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = k^2\mathbf{E}$) a $g : \mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ ($\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = l^2\mathbf{E}$) vznikne podobná transformace s rovnicí

$$f \circ g : \ \mathbf{x}' = (\mathbf{C}\mathbf{A})\mathbf{x} + (\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{d}), \quad \text{kde} \ \ (\mathbf{C}\mathbf{A})^{\mathrm{T}}(\mathbf{C}\mathbf{A}) = (kl)^2\mathbf{E};$$

inverzním zobrazením k podobné transformaci $f : \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = k^2\mathbf{E}$) je podobná transformace o rovnici

$$f^{-1} : \ \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} + (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}), \quad \text{kde} \ \ (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \mathbf{E};$$

identita je shodná, tj. i podobná transformace s analytickým vyjádřením

$$id_{\mathbb{E}_n} : \ \mathbf{x}' = \mathbf{E}\mathbf{x} + \mathbf{o} = \mathbf{x}.$$

Z toho plyne, že množina všech podobných transformací prostoru $\mathbb{E}_n$ tvoří vzhledem k operaci skládání tzv. **grupu podobností** $\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ (resp. **ekviformní grupu**). Přímé podobnosti pak tvoří podgrupu této grupy.

Pro souřadnice *samodružného bodu* S podobné transformace $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ samozřejmě platí

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{s} + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \quad \text{kde} \ \ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = k^2\mathbf{E}.$$

Obdobně i pro souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ *samodružného směru* $\langle \mathbf{u} \rangle$ podobnosti prostoru $\mathbb{E}_n$ platí stejně jako u afinit

$$\varrho\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E})\mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \varrho \neq 0,$$

tj. směr daný vektorem $\mathbf{u}$ je samodružný, právě když vektor $\mathbf{u}$ je *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ příslušným k *vlastnímu číslu* ϱ. Ovšem vzhledem k tomu, že v případě podobností platí navíc

$$|\varphi(\vec{u})| = k \cdot |\vec{u}|, \quad \text{kde} \ \ k > 0$$

je zřejmé, že pro vlastní čísla dostáváme podmínku

$$|\varrho| = k.$$

Stejnolehlost. Nejvýznamnější podobností je *stejnolehlost.*

DEFINICE 2.4.3.

Podobnost $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}'_n$, která má právě jeden samodružný bod S a která každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' tak, že platí
(P-4) $(X'XS) = \kappa$,
kde $\kappa \neq 0, 1$ je pevně zvolené reálné číslo, se nazývá **stejnolehlost** (**homotetie**). Bod S se nazývá **střed stejnolehlosti** a číslo κ **koeficient stejnolehlosti**.

Snadno nahlédneme, že analytické vyjádření stejnolehlosti $\mathcal{H}_{S,\kappa}$ je

$$(X'XS) = \kappa \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x}' - \mathbf{s} = \kappa(\mathbf{x} - \mathbf{s}), \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{x}' = \kappa\mathbf{x} + \mathbf{s}(1 - \kappa). \tag{2.15}$$

Naopak — je-li afinita f eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ dána rovnicí $f:\ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, potom jde o stejnolehlost, právě když

$$\mathbf{A} = \kappa \cdot \mathbf{E} \quad (\kappa \neq 0, 1). \tag{2.16}$$

Stejnolehlost s *koeficientem* κ je podobnost s *poměrem podobnosti* $k = |\kappa|$. Kromě všech vlastností podobností a vlastnosti (P-4) platí pro stejnolehlost dále:

(P-5) $p \parallel p'$ pro každou přímku $p \subset \mathbb{E}_n$ $(n \geqq 2)$;
$\varrho \parallel \varrho'$ pro každou rovinu $\varrho \subset \mathbb{E}_n$ $(n \geqq 3)$.

Závěrem poznamenejme, že pro každou podobnost $f:\ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = k^2\mathbf{E})$ s poměrem k můžeme psát

$$f:\ \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = k \cdot \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot (k\cdot\mathbf{E})\mathbf{x} + \mathbf{b}, \text{ tj.} \tag{2.17}$$

$$f = h \circ g,$$

kde $h:\ \mathbf{x}' = (k \cdot \mathbf{E})\mathbf{x}$ a $g:\ \mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ $(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} = \mathbf{E})$, a proto platí

Věta 2.4.1. *Každou vlastní podobnost eukleidovského prostoru prostoru $\mathbb{E}_n$ s poměrem podobnosti k lze vyjádřit jako složení stejnolehlosti s kladným koeficientem k a jisté shodnosti.* □

Mongeova grupa. Uvažujme stejnolehlosti $\mathcal{H}_1(S, \kappa_1)$ a $\mathcal{H}_2(R, \kappa_2)$. Pro složené zobrazení $\mathcal{Z} = \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ platí

$$\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}'', \quad \text{kde}$$

$$\mathcal{H}_1 : \ \mathbf{x}' = \kappa_1(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s} \quad \text{a} \quad \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{x}'' = \kappa_2(\mathbf{x}' - \mathbf{r}) + \mathbf{r}.$$

Po úpravě tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 : \mathbf{x}'' = \kappa_2(\mathbf{x}' - \mathbf{r}) + \mathbf{r} &= \kappa_2[\kappa_1(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s} - \mathbf{r}] + \mathbf{s} = \\ &= \kappa_1\kappa_2\mathbf{x} + \kappa_2(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \kappa_1\kappa_2\mathbf{s} + \mathbf{r}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Proveďme diskusi výše uvedené rovnice v závislosti na hodnotách koeficientů κ_1, κ_2 a na vzájemné poloze středů S, R:

1. $\kappa_1\kappa_2 = 1$, potom lze rovnici (2.18) upravit
   $\mathbf{x}'' = \underbrace{\kappa_1\kappa_2}_{=1}\mathbf{x} + \kappa_2(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \underbrace{\kappa_1\kappa_2}_{=1}\mathbf{s} + \mathbf{r} = \mathbf{x} + (\kappa_2 - 1)(\mathbf{s} - \mathbf{r})$
   (a) $S = R$, tj.
       $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}$
       a složené zobrazení $\mathcal{Z}$ je *identita*
   (b) $S \neq R$, tj.
       $\mathbf{x}'' = \mathbf{x} + \underbrace{(\kappa_2 - 1)(\mathbf{s} - \mathbf{r})}_{=\mathbf{a} \neq \mathbf{o}} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$
       a složené zobrazení $\mathcal{Z}$ je *translace*
2. $\kappa_1\kappa_2 \neq 1$
   $\mathbf{x}'' = \kappa_1\kappa_2\mathbf{x} + \kappa_2(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \kappa_1\kappa_2\mathbf{s} + \mathbf{r}$
   (a) $S = R$, tj.
       $\mathbf{x}'' = \kappa_1\kappa_2\mathbf{x} - \kappa_1\kappa_2\mathbf{s} + \mathbf{s} = \kappa_1\kappa_2(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s}$
       a složené zobrazení $\mathcal{Z}$ je *stejnolehlost* se středem $S = R$ a koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$
   (b) $S \neq R$, tj.
       $\mathbf{x}'' = \kappa_1\kappa_2\mathbf{x} + \kappa_2(\mathbf{s} - \mathbf{r}) - \kappa_1\kappa_2\mathbf{s} + \mathbf{r}$ a po jednoduché úpravě
       $\mathbf{x}'' = \kappa_1\kappa_2\left(\mathbf{x} - \frac{\kappa_2(\mathbf{s}-\mathbf{r})-\kappa_1\kappa_2\mathbf{s}+\mathbf{r}}{1-\kappa_1\kappa_2}\right) + \frac{\kappa_2(\mathbf{s}-\mathbf{r})-\kappa_1\kappa_2\mathbf{s}+\mathbf{r}}{1-\kappa_1\kappa_2}$
       a složené zobrazení $\mathcal{Z}$ je *stejnolehlost* se středem
       $\mathbf{t} = \frac{\kappa_2(\mathbf{s}-\mathbf{r})-\kappa_1\kappa_2\mathbf{s}+\mathbf{r}}{1-\kappa_1\kappa_2}$ a koeficientem $\kappa = \kappa_1\kappa_2$

Věta 2.4.2. (MONGEOVA VĚTA) *Nechť jsou dány stejnolehlosti $\mathcal{H}_1(S, \kappa_1)$ a $\mathcal{H}_2(R, \kappa_2)$. Složením $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ vznikne*

1. *identita* $\Leftrightarrow S = R \wedge \kappa_1\kappa_2 = 1$;
2. *translace* $\Leftrightarrow S \neq R \wedge \kappa_1\kappa_2 = 1$;
3. *stejnolehlost* $\mathcal{H}(T, \kappa_1\kappa_2) \Leftrightarrow \kappa_1\kappa_2 \neq 1$. □

Věta 2.4.3. *Množina S obsahující identitu, všechny stejnolehlosti a všechny translace tvoří vzhledem k operaci skládání grupu.* □

Důkaz: Ověříme jen uzavřenost operace, zbývající grupové vlastnosti jsou zřejmé. Z Mongeovy věty plyne, že složené zobrazení $\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$ je vždy prvkem množiny S. Složením dvou translací vznikne buďto translace, anebo identita — v obou případech opět prvek množiny S.

Zbývá ověřit jen složení $\mathcal{H} \circ \mathcal{T}$ a $\mathcal{T} \circ \mathcal{H}$. Nechť $\mathcal{H}: \ \mathbf{x}' = \kappa(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s}$ a $\mathcal{T}: \ \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Potom

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{T}: \ \mathbf{x}'' = \mathbf{x}' + \mathbf{a} = \kappa(\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s} + \mathbf{a} = \kappa \left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{a} + \mathbf{s} - \kappa\mathbf{s}}{1 - \kappa} \right) + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{s} - \kappa\mathbf{s}}{1 - \kappa}$$

a složené zobrazení je stejnolehlost s koeficientem κ, tj. opět prvek množiny S. Obdobně

$$\mathcal{T} \circ \mathcal{H}: \ \mathbf{x}'' = \kappa \left(\mathbf{x} - \frac{\kappa\mathbf{a} - \kappa\mathbf{s} + \mathbf{s}}{1 - \kappa} \right) + \frac{\kappa\mathbf{a} - \kappa\mathbf{s} + \mathbf{s}}{1 - \kappa}$$

a složené zobrazení je opět stejnolehlost, tj. prvek množiny S. □

Grupa z předcházející věty se nazývá **Mongeova grupa**. Mongeova grupa je podgrupou ekviformní grupy i grupy přímých podobností. Poznamenejme ještě, že průnikem Mongeovy grupy a eukleidovské grupy je grupa tvořená středovými souměrnostmi, translacemi a identitou.

Kapitola 3

Sférická zobrazení

3.1 Kruhová a sférická inverze

Kruhová inverze. Kruhová inverze je příkladem *nelineárního zobrazení* v rovině, které nemusí vždy převést přímku na přímku, ale v některých případech zobrazuje přímku na kružnici.

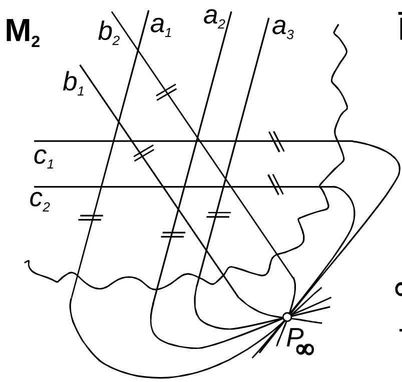
Nejprve zavedeme jisté rozšíření eukleidovského prostoru.

DEFINICE 3.1.1.

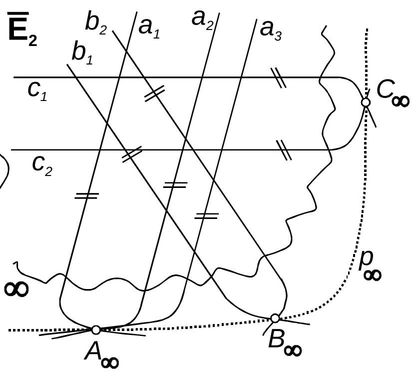
K eukleidovskému prostoru $\mathbb{E}_n$ přidáme jeden prvek – tzv. **nevlastní bod** (značíme P_∞, popř. jen ∞), který je prvkem každé nadroviny a leží vně každé sféry[1] v prostoru $\mathbb{E}_n$. Množina $\mathbb{M}_n = \mathbb{E}_n \cup \{P_\infty\}$ se nazývá **Möbiův prostor**. Bodům prostoru $\mathbb{E}_n$ říkáme **body vlastní**. Nadrovinu doplněnou o nevlastní bod budeme označovat jako **rozšířená nadrovina**.

Na následujících obrázcích je pro případ $n = 2$ symbolicky naznačen základní rozdíl (srovnejte!) mezi projektivně rozšířeným eukleidovským prostorem $\overline{\mathbb{E}}_n$ a Möbiovým prostorem $\mathbb{M}_n$.

[1] **Sférou** v prostoru $\mathbb{E}_n$ rozumíme množinu $\kappa(S, r) = \{X \in \mathbb{E}_n : |XS| = r\}$, kde r je konstanta (tzv. **poloměr**) a S je pevně zvolený bod prostoru $\mathbb{E}_n$ (tzv. **střed**) — pro $n = 2$ jde tedy o kružnici, pro $n = 3$ o kulovou plochu; pro libovolné n někdy hovoříme o tzv. **nadsféře**. Analytické vyjádření (nad)sféry je $|\mathbf{x} - \mathbf{s}| = r$.



Obr. 3.1.2



Obr. 3.1.3

Podívejme se podrobněji na situaci v *Möbiově rovině.*

Přímky a kružnice budeme označovat společným názvem **kruhové křivky** — v eukleidovské geometrii je totiž přímka *limitní čarou* kružnice pro $r \to \infty$.

Nechť p, q jsou různé kruhové křivky, potom

- p je rozšířená přímka, právě když $P_\infty \in p$, v opačném případě jde o kružnici;
- jsou-li p, q rozšířené přímky, potom se vždy protínají alespoň v jednom bodě (*rovnoběžné přímky* v eukleidovském smyslu mají společný pouze nevlastní bod, *různoběžné přímky* v eukleidovském smyslu pak mají společný jeden bod vlastní a dále bod nevlastní);
- p, q se vždy protínají nejvýše ve dvou bodech (*přímka a kružnice*, jakož i *dvě kružnice* mají nejvýše dva společné body, a to vždy vlastní; počet průsečíků dvou přímek byl diskutován v předcházejícím bodě);
- libovolné tři různé body jednoznačně určují kruhovou křivku (je-li jeden z bodů A, B, C nevlastní, potom je danou kruhovou křivkou rozšířená přímka; v opačném případě musíme dále rozlišovat, zdali jsou body A, B, C kolineární v eukleidovském smyslu — potom je kruhovou křivkou opět rozšířená přímka, anebo nekolineární — potom je daná kruhová křivka kružnicí opsanou $\triangle ABC$).

Definice 3.1.2.

Nechť je v eukleidovské rovině $\mathbb{E}_2$ dána kružnice $\omega(S, r)$. Uvažujme zobrazení $\mathcal{I}(\omega)$ v Möbiově rovině $\mathbb{M}_2 = \mathbb{E}_2 \cup \{\infty\}$, které je určeno následujícím předpisem:

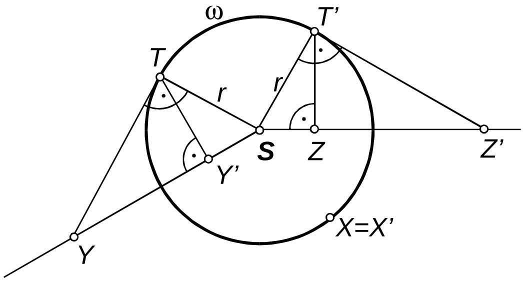
(i) Obrazem bodu S je nevlastní bod ∞.

(ii) Obrazem nevlastního bodu ∞ je bod S.

(iii) Obrazem bodu $X \neq S, \infty$ je bod X' takový, že X' náleží polopřímce SX a současně $|SX'| \cdot |SX| = r^2$

Zobrazení $\mathcal{I}(\omega)$ se nazývá **kruhová inverze** (**inverze podle kružnice**), kružnice ω se nazývá **základní kružnice** inverze, bod S nazýváme **střed kruhové inverze** a kladné reálné číslo r^2 je **koeficient kruhové inverze**.

***Příklad* 3.1.1.** Sestrojte obraz a) bodu na kružnici $\omega(S, r)$; b) vnějšího bodu kružnice ω; c) vnitřního bodu kružnice ω v kruhové inverzi $\mathcal{I}(\omega)$.



Obr. 3.1.4

a) Je zřejmé, že bod X základní kružnice je samodružný, neboť $|SX| \cdot |SX| = r \cdot r = r^2$.

b) Z vnějšího bodu Y vedeme tečnu YT ke kružnici ω s bodem dotyku T. Pata Y' kolmice z bodu T na přímku SY je hledaným obrazem bodu Y.

c) Ve vnitřním bodě Z vztyčíme kolmici na přímku SZ, která protne kružnici ω v bodě T'. Tečna kružnice ω v bodě T' protne přímku SZ v hledaném bodě Z' – obrazu bodu Z. [2]

[2]Zdůvodnění části b), c): Podle *Eukleidovy věty o odvěsně* platí $|SY| \cdot |SY'| = |SZ| \cdot |SZ'| = r^2$.

Základní vlastnosti kruhové inverze plynoucí přímo z definice jsou:

- $X = X'$, právě když $X \in \omega$, tj. základní kružnice je množinou samodružných bodů;
- X' náleží vnějšku kružnice, právě když X náleží vnitřku — a naopak;
- kruhová inverze je involutorní zobrazení, tj. $(X')' = X$.

Hledáme analytický předpis kruhové inverze $\mathcal{I}(\omega)$. Potom přímo z definice plyne

$$\begin{aligned} &X \in \mapsto SX: && \mathbf{x}' - \mathbf{s} = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{s}), \text{ kde } \lambda > 0; \\ &|SX| \cdot |SX| = r^2: && |\mathbf{x}' - \mathbf{s}| \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{s}| = r^2. \end{aligned}$$

Z výše uvedených podmínek již snadno odvodíme

$$\mathbf{x}' = \frac{r^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|^2} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{s}) + \mathbf{s}. \tag{3.1}$$

Uvažujme kružnici inverze ω se středem v počátku souřadného systému. Potom se rovnice (3.1) zjednoduší na tvar

$$\mathbf{x}' = \frac{r^2}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \mathbf{x}. \tag{3.2}$$

Nyní se pokusíme najít obrazy kružnic a přímek (tj. *kruhových křivek*) v kruhové inverzi (3.2). Společná rovnice kruhových křivek v $\mathbb{E}_2$ je

$$a_3(x_1^2 + x_2^2) + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_0 = 0, \tag{3.3}$$

kde pro $a_3 = 0$ dostáváme *přímku* a pro $a_3 \neq 0$ *kružnici*. Použijeme-li na (3.3) transformační vztahy

$$\mathbf{x} = \frac{|\mathbf{x}|^2}{r^2} \cdot \mathbf{x}' = \frac{r^2}{|\mathbf{x}'|^2} \cdot \mathbf{x}', \tag{3.4}$$

potom dostáváme

$$a_0({x_1'}^2 + {x_2'}^2) + (a_1 x_1' + a_2 x_2') r^2 + a_3 r^4 = 0. \tag{3.5}$$

Je vidět, že pro pro $a_0 = 0$ (tj. pro případ, že kruhová křivka, která je vzorem, prochází středem inverze) je obrazem *přímka* a pro $a_0 \neq 0$ *kružnice*. Diskuzí parametrů a_0, a_3 tak dostáváme:

Věta 3.1.1. *Kruhová inverze zobrazuje kruhové křivky opět na kruhové křivky, přičemž*

- *obrazem přímky p procházející středem kruhové inverze S je přímka $p' = p$, tj jedná se o samodružnou přímku ($a_3 = a_0 = 0$);*
- *obrazem přímky p neprocházející středem kruhové inverze S je kružnice p' procházející středem kruhové inverze ($a_3 = 0$, $a_0 \neq 0$);*
- *obrazem kružnice k procházející středem kruhové inverze S je přímka k' neprocházející středem kruhové inverze ($a_3 \neq 0$, $a_0 = 0$);*
- *obrazem kružnice k neprocházející středem kruhové inverze S je kružnice k' neprocházející středem kruhové inverze ($a_3, a_0 \neq 0$).* □

Zobrazení převádějící kruhové křivky na kruhové křivky se nazývají **kruhová zobrazení**.

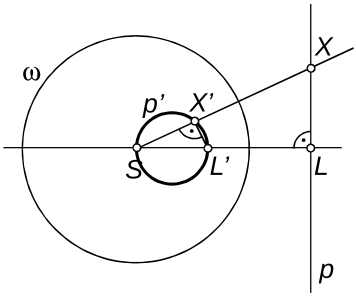
Důsledek 3.1.1. *Kruhová inverze patří mezi kruhová zobrazení.* □

***Příklad* 3.1.2.** Sestrojte obraz a) přímky p neprocházející středem inverze, b) kružnice k procházející středem inverze v kruhové inverzi $\mathcal{I}(\omega)$.

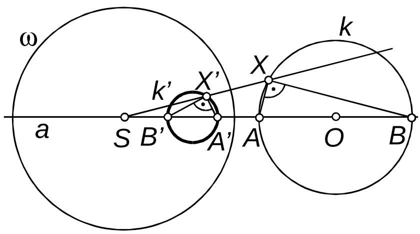
a) Jak víme z předcházející věty, obrazem přímky p neprocházející středem inverze je kružnice procházející středem inverze. Ukážeme, že p' snadno sestrojíme jako Thaletovu kružnici nad průměrem SL', kde L' je obraz paty kolmice vedené ze středu inverze S na přímku p.

   Zvolme na přímce p libovolný bod $X \neq L$ a označme $X' \in\mapsto SX \cap p'$. Podle Thaletovy věty je $SX' \perp X'L'$, a proto zřejmě platí $\triangle SX'P' \sim \triangle SPX$ (UU). Odtud již snadno nahlédneme
$$\frac{|SX'|}{|SL|} = \frac{|SL'|}{|SX|} \Rightarrow |SX'| \cdot |SX| = |SL'| \cdot |SL|,$$
   a proto body X a X' jsou sdruženy v inverzi $\mathcal{I}(\omega)$.

b) Jelikož je kruhová inverze *involucí*, plyne tato konstrukce bezprostředně z části a) — stačí pouze obrátit postup konstrukce.



Obr. 3.1.5



Obr. 3.1.6

***Příklad* 3.1.3.** Sestrojte obraz kružnice k neprocházející středem inverze v kruhové inverzi $\mathcal{I}(\omega)$.

Jak víme z předcházející věty, obrazem kružnice k neprocházející středem inverze je kružnice k' rovněž neprocházející středem inverze. Ukážeme, že k' lze snadno sestrojit jako Thaletovu kružnici nad průměrem $A'B'$, kde A' a B' jsou obrazy bodů A, B, které získáme jako průsečíky přímky a spojující střed inverze S a střed O kružnice k.

Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé, tj. i kružnice k a k' — středem stejnolehlosti je střed inverze S, dvojice bodů sdružených ve stejnolehlosti jsou však oproti dvojicím sdruženým v inverzi $[A, B']$ a $[B, A']$, neboť

$$|SA'| : |SB| = |SB'| : |SA|.$$

Nechť $X \in k$ je libovolný bod různý od bodů A, B; druhý průsečík $\mapsto SX \cap k$ označme Y. Potom platí

$$|SX'| : |SY| = |SY'| : |SX| \quad \Rightarrow \quad |SX| \cdot |SX'| = |SY| \cdot |SY'|.$$

Mocnost bodu S ke kružnici k je

$$\mu_k^S = |SA| \cdot |SB| = |SX| \cdot |SY|$$

a spolu se vztahem pro stejnolehlost

$$|SA'| : |SB| = |SX'| : |SY|$$

tak dostáváme

$$|SA| \cdot |SA'| = |SX| \cdot |SX'|.$$

Body X a X' jsou (jakož i body Y a Y') sdruženy v téže inverzi jako body A a A' (resp. B a B'). $\diamondsuit$

Zbývá vyřešit otázku, zdali kromě samodružných přímek neexistují i samodružné kružnice. Jednou z takovýchto kružnic je samozřejmě základní kružnice inverze ω, která je množinou samodružných bodů.

Věta 3.1.2. *Kružnice $k \neq \omega$ je samodružná v kruhové inverzi $\mathcal{I}(\omega)$ právě tehdy, když $k \perp \omega$.* $\square$

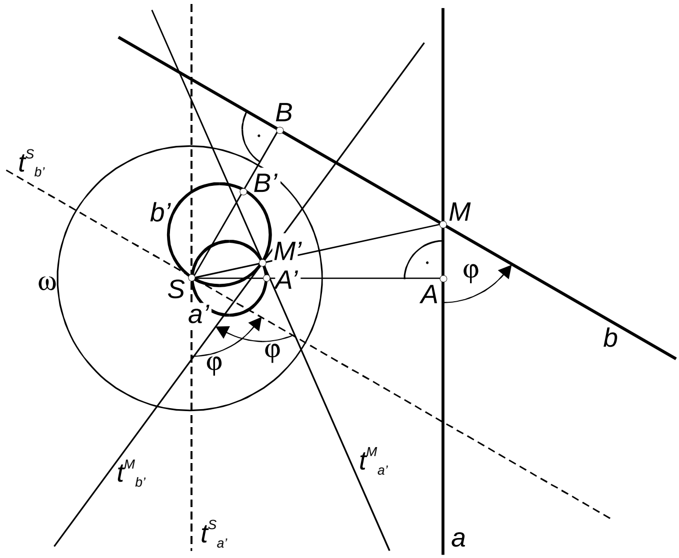
Důkaz: Nechť $k(S_1, r_1)$ je libovolná kružnice ortogonální na základní kružnici $\omega(S, r)$ — označme $k \cap \omega = \{A, B\}$. Uvažujme dále libovolnou přímku p procházející středem inverze S, která protíná kružnici k v bodech P, Q. Vzhledem k tomu, že $k \perp \omega$, jsou přímky SA, SB tečnami kružnice k v bodech A, B, a proto pro body P, Q platí

$$|SP| \cdot |SQ| = |SA|^2 = |SB|^2 = r^2.$$

Body P, Q si tedy navzájem odpovídají v kruhové inverzi $\mathcal{I}(\omega)$, a proto $\mathcal{I}(\omega) : k \mapsto k' = k$. Pouhým obrácením postupu bychom snadno dokázali, že jestliže kruhová inverze převádí kružnici $k \neq \omega$ na $k' = k$, potom jsou k a ω ortogonální. $\square$

Věta 3.1.3. Kruhová inverze zachovává úhel kruhových křivek, tj. patří mezi tzv. ***konformní zobrazení***. $\square$

Důkaz: Určování úhlu dvou protínajících se kružnic převádíme na určování úhlu jejich tečen v jednom z průsečíků, rovněž v případě úhlu přímky a kružnice nahradíme kružnici tečnou. Proto je možné úvahy zjednodušit a pracovat jen s úhlem dvou přímek. Nechť a, b jsou dvě přímky protínající se ve vlastním bodě M, různém od středu inverze. Jestliže ani a, ani b neprochází středem inverze S, potom se zobrazí na kružnice a', b', které obě procházející jednak středem inverze S a jednak obrazem M' průsečíku M přímek a, b. Zajímá nás úhel kružnic a', b'. Úhel jejich tečen v M' je samozřejmě stejný jako úhel jejich tečen v bodě S. Tečny v bodě S jsou však rovnoběžné s přímkami a, b, a proto určují úhel téže velikosti jako přímky a, b. Opačný smysl obou úhlů je zřejmý. Kdyby některá z přímek a, b procházela středem inverze S, byla by samodružná a důkaz by se zjednodušil. $\square$



Obr. 3.1.7

Sférická inverze. Kruhová inverze Möbiovy roviny $\mathbb{M}_2 = \mathbb{E}_2 \cup \{\infty\}$ podle kružnice $\omega(S, r)$ má v n-rozměrném prostoru svoji analogii — stačí jen uvažovat Möbiův prostor $\mathbb{M}_n = \mathbb{E}_n \cup \{\infty\}$ (nadroviny v Möbiově prostoru můžeme interpretovat jako sféry procházející nevlastním bodem ∞, tj. jako sféry s „nekonečným poloměrem“) a sféru $\kappa(S, r)$. Prakticky beze změny lze použít definici 3.1.1 — obrazem bodu S je opět nevlastní bod ∞ (a naopak), obrazem bodu $X \neq S, \infty$ je opět bod X' takový, že X' náleží polopřímce SX a současně $|SX'| \cdot |SX| = r^2$. Toto zobrazení nazýváme **sférická inverze**, resp. **inverze podle** (**nad**)**sféry**. Pro analytický popis sférické inverze lze použít rovnice (3.1), popř. (3.2).

Analogicky jako u kruhové inverze jsou v případě sférické inverze nadroviny procházející středem inverze samodružné; obrazem sféry procházející středem inverze je nadrovina neprocházející středem inverze; obrazem nadroviny, resp. sféry neprocházející středem inverze je sféra procházející, resp. neprocházející středem inverze.

Poznamenejme jen, že provedeme-li restrikci sférické inverze v $\mathbb{M}_3$ podle kulové plochy κ na rovinu $\mathbb{M}_2$ procházející středem inverze, dostaneme kruhovou inverzi podle kružnice, která je řezem dané roviny a sféry.

3.2 Stereografická projekce

DEFINICE 3.2.1.

Nechť je dána kulová plocha κ, bod $S \in \kappa$ a rovina Π rovnoběžná s tečnou rovinou τ v bodě S ($\Pi \neq \tau$). Potom bijekci $\sigma:\ \kappa \setminus \{S\} \to \Pi$ danou předpisem

$$\sigma:\ X \mapsto X' = SX \cap \Pi \quad (X \neq S)$$

nazýváme **stereografická projekce** kulové plochy κ na rovinu Π z bodu S.

Volme S *severní pól* kulové plochy $\kappa(O,r) : |\mathbf{x}| = r$ (tj. $S = [0,0,r]$) a $\Pi : x_3 = 0$ *ekvatoriální rovinu* téže kulové plochy. Určíme průsečík přímky SX s rovinou Π a získáme rovnice stereografické projekce ve tvaru

$$x_1' = \frac{rx_1}{r - x_3}, \quad x_2' = \frac{rx_2}{r - x_3}, \quad \text{kde } |\mathbf{x}| = r. \tag{3.6}$$

Chceme-li přiřadit obraz i bodu $S = [0,0,r]$, potom je vzhledem k (3.6, $x_3 = r$) nutné rovinu Π rozšířit o bod „v nekonečnu“ P_∞. Stereografická projekce $\sigma:\ \kappa \to \Pi \cup \{\infty\}$ je potom bijekcí mezi *celou* kulovou plochou a Möbiovou rovinou $\mathbb{M}_2$. (kulovou plochu tak můžeme chápat jako model Möbiovy roviny).

Z analytického vyjádření (3.6) se dá dokázat, že stereografická projekce zobrazuje kružnice na kulové ploše κ *neprocházející* bodem S na *kružnice* a kružnice na kulové ploše κ *procházející* bodem S na *přímky.* Stereografická projekce navíc zachovává úhel kruhových křivek.

Věta 3.2.1. *Stereografická projekce $\sigma:\ \kappa \to \mathbb{M}_2$ je kruhové a konformní zobrazení.* □

Jelikož je stereografické projekce stejně jako kruhová inverze kruhové a konformní zobrazení, pokusíme se najít užší souvislost mezi oběma zobrazeními.

Uvažujme *stereografickou projekci* σ kulové plochy $\kappa(O,r)$ na Möbiovu rovinu $\mathbb{M}_2 = \Pi \cup \{\infty\}$ z jejího severního pólu S. Označme $\omega(O,r)$ rovníkovou kružnici kulové plochy κ a uvažujme dále *kruhovou inverzi* $\mathcal{I}(\omega)$. Jestliže označíme X a $\overline{X}$ body kulové ploch κ souměrné podle roviny Π, potom platí, že jejich obrazy X' a $\overline{X}'$ ve stereografické projekci σ jsou sdružené v kruhové inverzi podle kružnice ω. ($\triangle SX'O \sim \triangle J\overline{X}'O \Rightarrow |OX'| : |OS| = |O\overline{X}'| : |OJ|$ a vzhledem k tomu, že $|OS| = |OJ| = r$, dostáváme $|OX'| : |O\overline{X}'| = r^2$)

Výše uvedený závěr je rovněž možné zachytit následujícím způsobem:

Věta 3.2.2. *Každou kruhovou inverzi lze složit ze dvou stereografických projekcí — $\mathcal{I}(\omega) = \sigma_S^{-1} \circ \sigma_J$, kde ω je rovníková kružnice kulové plochy κ a S, resp. J je její severní, resp. jižní pól.* □

3.3 Grupa sférických transformací

Budeme se zabývat otázkou, jaké zobrazení vznikne složením dvou libovolných inverzí $\mathcal{I}_1(\omega_1)$ a $\mathcal{I}_2(\omega_2)$.

Věta 3.3.1. *Složením dvou inverzí s týmž středem vzniká buďto stejnolehlost, nebo identita.* □

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že střed S obou inverzí je v počátku. Inverze jsou pak popsány rovnicemi

$$\mathcal{I}_1 : \mathbf{x}' = \frac{r_1^2}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{a} \quad \mathcal{I}_2 : \mathbf{x}' = \frac{r_2^2}{|\mathbf{x}|^2} \cdot \mathbf{x}.$$

Pro složené zobrazení $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2$ můžeme psát:

$$\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2 : X \mapsto X' \mapsto X'', \text{ tj.}$$

$$\mathbf{x}'' = \frac{r_2^2}{|\mathbf{x}'|^2} \cdot \mathbf{x}' = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \mathbf{x}. \tag{3.7}$$

Rozborem vztahu (3.7) snadno nahlédněme, že pro $r_1 = r_2$ ($\omega_1 = \omega_2$) je $\mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2$ *identita*; jestliže je $r_1 \neq r_2$, potom složením vzniká *stejnolehlost* se středem S a koeficientem $\kappa = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$. □

Obdobně bychom snadno dokázali

Věta 3.3.2. *Složením inverze a stejnolehlosti s týmž středem vzniká inverze.* □

Co je však složením dvou inverzí s různými středy? Odpověď na tuto otázku nám pomůže vyřešit úkol nalezení nejmenší grupy obsahující všechny inverze. Jestliže rozšíříme každou podobnost f eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_n$ na Möbiův prostor $\mathbb{M}_n$ tak, že položíme

$$f: \ P_\infty \mapsto P_\infty,$$

potom lze dokázat větu

Věta 3.3.3. *Složením dvou inverzí s různými středy vzniká zobrazení, které je složením podobnosti a inverze.* □

DEFINICE 3.3.1.

Transformaci Möbiova prostoru $\mathbb{M}_n$, která je buď podobností, nebo je složením podobnosti a sférické inverze, budeme nazývat **sférická transformace** prostoru $\mathbb{M}_n$. V případě $n = 2$ hovoříme o tzv. **kruhových transformacích**.

Navíc platí:

Věta 3.3.4. *Všechny sférické transformace prostoru $\mathbb{M}_n$ tvoří vzhledem k operaci skládání grupu.* □

Kapitola 4

Projektivní prostor a projektivní zobrazení

4.1 Projektivní rozšíření eukleidovského prostoru

Vlastnost *býti incidentní* vykazuje v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ nedostatek symetrie — zatímco např. každé dva body incidují s jednou přímkou, neplatí, že každé dvě přímky (speciálně dvě různé rovnoběžky) incidují s jedním bodem! Naše další úvahy jsou tudíž vedeny snahou odstranit tuto nejednotnost, a to přidáním speciálních objektů „v nekonečnu“.

- Ke každé přímce p eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ přidáme jeden bod P_∞ (tzv. **nevlastní bod** přímky p), který je společný všem přímkám rovnoběžným s přímkou p.

  Nevlastní bod P_∞ ztotožňujeme se **směrem** přímky p, tj. všechny navzájem rovnoběžné přímky mají týž směr.

- Ke každé rovině π eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ přidáme jednu přímku p_∞ (tzv. **nevlastní přímku** roviny π), na níž leží nevlastní body všech přímek roviny π; přímka p_∞ je společná všem rovinám rovnoběžným s rovinou π.

  Nevlastní přímku p_∞ ztotožňujeme s **dvojsměrem** roviny π, tj. všechny navzájem rovnoběžné roviny mají týž dvojsměr.

- K prostoru $\mathbb{E}_3$ přidáme jednu tzv. **nevlastní rovinu** π_∞ jakožto souhrn nevlastních bodů všech přímek a nevlastních přímek všech rovin prostoru $\mathbb{E}_3$.

Ostatní body, přímky a roviny nazýváme **vlastní**.

DEFINICE 4.1.1.

> Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_3$ doplněný o nevlastní rovinu π_∞ nazýváme (**projektivně**) **rozšířený eukleidovský prostor** a značíme jej $\overline{\mathbb{E}_3}$. Analogicky eukleidovskou rovinu $\mathbb{E}_2$ doplněnou o nevlastní přímku p_∞ nazýváme (**projektivně**) **rozšířená eukleidovská rovina** a značíme ji $\overline{\mathbb{E}_2}$.

Poznamenejme ještě, že eukleidovskou rovinu, resp. eukleidovský prostor je možné rozšířit i jiným způsobem — příkladem je Möbiova rovina, resp. Möbiův prostor, se kterými jsme se setkali v minulé kapitole.

Princip duality. V rozšířené eukleidovské rovině $\overline{\mathbb{E}_2}$ platí:

(i) Pro každé dva různé body A, B existuje právě jedna přímka p, která s oběma body inciduje; $p = \leftrightarrow AB$ — spojnice bodů A, B.

(ii) Pro každé dvě různé přímky a, b existuje právě jeden bod P, který s oběma přímkami inciduje; $P = a \cap b$ — průsečík přímek a, b.

Všimneme-li si podrobněji předcházejících vět, potom snadno nahlédneme, že zaměníme-li pojmy *bod* a *přímka*, resp. *spojnice* a *průsečík*, potom z (i) dostaneme (ii) a naopak. Uvedená záměna se nazývá **dualizace**.

> PRINCIP DUALITY V $\mathbb{E}_2$: *Každá věta geometrie roviny $\overline{\mathbb{E}_2}$ přechází v rovněž platnou větu geometrie roviny $\overline{\mathbb{E}_2}$, nahradíme-li v ní slovo bod slovem přímka a naopak se současným zachováním incidence.*

Uvedené věty (i), (ii) (a všechny další dvojice spojené pomocí principu duality) nazýváme **duální věty**. Obdobně hovoříme o **útvarech duálních** — např. *průsečík dvou přímek* (tj. *bod incidentní se dvěma přímkami*) a *spojnice dvou bodů* (tj. *přímka incidentní se dvěma body*) jsou duálními útvary.

Analogicky pracujeme s principem duality v prostoru $\overline{\mathbb{E}_3}$; duální dvojice jsou *bod-rovina*, *přímka-přímka*,...

V prostoru $\overline{\mathbb{E}_3}$ platí kromě (i):

- ♣ Pro každé tři nekolineární body A, B, C existuje právě jedna rovina ϱ, která s těmito body inciduje; $\varrho = \leftrightarrow ABC$.
- ♡ Pro každé dvě různé roviny α, β existuje právě jedna přímka p, která s oběma rovinami inciduje; $p = \alpha \cap \beta$ — průsečnice rovin α, β $\big($dualizace (i)$\big)$.
- ♠ Pro každé tři roviny α, β, γ nenáležející témuž svazku, existuje právě jeden bod P, který s těmito rovinami inciduje; $P = \alpha \cap \beta \cap \gamma$ — průsečík rovin α, β, γ $\big($dualizace ♣$\big)$.

Dělicí poměr nevlastního bodu. Připomeňme nejprve, že *dělicím poměrem* bodu C vzhledem k bodům A, B $(A, B, C \in \mathbb{E}_n)$ rozumíme reálné číslo $\lambda = (A, B, C)$, pro něž platí

$$\mathbf{c} - \mathbf{a} = \lambda(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

Uvažujme nyní přímku $p = AB$ v rozšířeném eukleidovském prostoru $\overline{\mathbb{E}_n}$. Ptáme se, zdali je možné určit dělicí poměr nevlastního bodu $P_\infty \in p$ vzhledem k bodům A, B. Uvažujeme-li proměnný bod $X \in p$, potom pro $\lambda = (A, B, X)$ dostáváme funkční předpis

$$\lambda = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\mathbf{x} - \mathbf{b}} = 1 + \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{\mathbf{x} - \mathbf{b}}. \tag{4.1}$$

S využitím (4.1) snadno odvodíme

$$\lim_{X \to P_\infty} (A, B, X) = 1,$$

a proto položíme $(A, B, P_\infty) = 1$.

4.2 Homogenní souřadnice v rovině a prostoru

Homogenní souřadnice bodů v $\overline{\mathbb{E}_2}$. *Vlastní body* rozšířené eukleidovské roviny $\overline{\mathbb{E}_2}$ můžeme vzhledem k jisté kartézské soustavě souřadnic $\mathcal{S}\langle O; x, y\rangle$ standardně popsat pomocí souřadných vektorů $\mathbf{x} = [x, y] \in \mathbb{R}^2$. Otázkou zůstává, jak analyticky zachytit *nevlastní bod* P_∞ společný všem přímkám rovnoběžným s přímkou $p = OX$.

Nechť uspořádaná trojice $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ (kde $x_0 \neq 0$ je libovolné reálné číslo) popisuje bod $X = [x, y]$, právě když platí

$$x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}. \tag{4.2}$$

Je zřejmé, že týž bod $X = [x, y]$ potom popisují všechny uspořádané trojice $(\varrho x_0, \varrho x_1, \varrho x_2) \in \mathbb{R}^3$ (kde $\varrho \neq 0$ je libovolné reálné číslo); speciálně pak pro $\varrho x_0 = 1$ trojice

$$(1, x, y). \tag{4.3}$$

Pro libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$ leží bod $Y = [\xi, \eta] = [\lambda x, \lambda y]$ na přímce $p = OX$, a proto

$$\lim_{\lambda \to \infty} Y = P_\infty \tag{4.4}$$

Vzhledem k (4.3) lze bod libovolný $Y \in p$ popsat uspořádanou trojicí $(1, \xi, \eta)$ a samozřejmě pro $\lambda \neq 0$ rovněž trojicí $(\frac{1}{\lambda}, \frac{\xi}{\lambda}, \frac{\eta}{\lambda}) = (\frac{1}{\lambda}, x, y)$. Použijeme (4.4) a pro nevlastní bod přímky p dostáváme vyjádření

$$P_\infty = \lim_{\lambda \to \infty} Y = \lim_{\lambda \to \infty} (\frac{1}{\lambda}, x, y) = (0, x, y) \tag{4.5}$$

Proveďme shrnutí — ke každé uspořádané trojici $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$ $(x_i \in \mathbb{R})$ existuje právě jeden bod $X \in \overline{\mathbb{E}_2}$, který je

- pro $x_0 \neq 0$ *vlastní* a má kartézské souřadnice $\mathbf{x} = (x, y) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0})$;
- pro $x_0 = 0$ *nevlastní*.

Jak již bylo uvedeno, každou uspořádanou trojicí $(x_0, x_1, x_2) \neq (0, 0, 0)$ $(x_i \in \mathbb{R})$ je popsán právě jeden bod $X \in \overline{\mathbb{E}_2}$, kdežto jednomu bodu je přiřazena celá *třída* uspořádaných trojic $(\varrho x_0, \varrho x_1, \varrho x_2) \neq (0, 0, 0)$ $(\varrho, x_i \in \mathbb{R})$. Prvky uspořádané trojice (x_0, x_1, x_2) se nazývají **homogenní kartézské souřadnice bodu** X a vektor

$$\widetilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2) \neq \widetilde{\mathbf{o}}$$

je *vektorem homogenních kartézských souřadnic bodu* X. Dva vektory $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2)$, $\widetilde{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, y_2)$ popisují týž bod X (píšeme $\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{y}}$), právě když existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho \neq 0$ takové, že $(x_0, x_1, x_2) = \varrho(y_0, y_1, y_2)$.

Homogenní souřadnice přímek v $\overline{\mathbb{E}_2}$. Vlastní přímku p v rozšířené eukleidovské rovině $\overline{\mathbb{E}_2}$ lze při pevně zvolené kartézské soustavě souřadnic $\mathcal{S}\langle O; x, y\rangle$ popsat pomocí obecné rovnice

$$n_1 x + n_2 y + n_0 = 0, \quad (n_1, n_2) \neq (0, 0). \tag{4.6}$$

Přímku p lze tedy jednoznačně určit pomocí uspořádané trojice $(n_0, n_1, n_2) \in \mathbb{R}^3$. Naopak tutéž přímku popisují všechny uspořádané trojice $(\varrho n_0, \varrho n_1, \varrho n_2) \in \mathbb{R}^3$ (kde $\varrho \neq 0$ je libovolné reálné číslo). Prvky uspořádané trojice (n_0, n_1, n_2) se nazývají **homogenní souřadnice přímky** p a vektor

$$\widetilde{\mathbf{n}} = (n_0, n_1, n_2) \neq \widetilde{\mathbf{o}}$$

je *vektorem homogenních souřadnic přímky* p.

Použijeme-li homogenní souřadnice bodů v $\overline{\mathbb{E}_2}$, potom můžeme obecnou rovnici přímky p převést na tvar

$$n_1 x + n_2 y + n_0 = n_1 \left(\frac{x_1}{x_0}\right) + n_2 \left(\frac{x_2}{x_0}\right) + n_0 = 0,$$

tj.

$$n_0 x_0 + n_1 x_1 + n_2 x_2 = \widetilde{\mathbf{n}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = 0. \tag{4.7}$$

Pro všechny nevlastní body roviny $\overline{\mathbb{E}_2}$ platí podmínka $x_0 = 0$, na kterou můžeme současně nahlížet jako na *rovnici nevlastní přímky* roviny $\overline{\mathbb{E}_2}$, tj.

$$p_\infty : \; x_0 = 0, \quad \widetilde{\mathbf{n}} = (1, 0, 0). \tag{4.8}$$

Homogenní souřadnice bodů a rovin v $\overline{\mathbb{E}_3}$. Zcela analogicky k přístupu v rovině můžeme vzhledem ke zvolené kartézské soustavě souřadnic $\mathcal{S}\langle O; x, y, z\rangle$ definovat **homogenní kartézské souřadnice bodu** X pomocí vektoru $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \neq \widetilde{\mathbf{o}}$ ($x_i \in \mathbb{R}$), přičemž

- pro $x_0 \neq 0$ je bod X *vlastní* a má kartézské souřadnice $\mathbf{x} = (x, y, z) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0})$;
- pro $x_0 = 0$ je bod X *nevlastní.*

Dva vektory $\widetilde{\mathbf{x}} = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\widetilde{\mathbf{y}} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ popisují týž bod X (píšeme $\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{y}}$), právě když existuje $\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho \neq 0$ takové, že $(x_0, x_1, x_2, x_3) = \varrho(y_0, y_1, y_2, y_3)$.

Použijeme-li homogenní souřadnice bodů v $\overline{\mathbb{E}_3}$, potom lze obecnou rovnici roviny ϱ převést na tvar

$$n_0x_0 + n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = \widetilde{\mathbf{n}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = 0, \quad \widetilde{\mathbf{n}} \neq \widetilde{\mathbf{o}}. \tag{4.9}$$

Dva vektory **homogenních souřadnic roviny** $\widetilde{\mathbf{n}} = (n_0, n_1, n_2, n_3)$, $\widetilde{\mathbf{m}} = (m_0, m_1, m_2, m_3)$ popisují tutéž rovinu ϱ (píšeme $\widetilde{\mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{m}}$), právě když existuje $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ takové, že $(n_0, n_1, n_2, n_3) = \varrho(m_0, m_1, m_2, m_3)$.

Rovnice nevlastní roviny prostoru $\overline{\mathbb{E}_3}$, má tvar

$$\pi_\infty : \ x_0 = 0, \quad \widetilde{\mathbf{n}} = (1, 0, 0, 0). \tag{4.10}$$

4.3 Projektivní prostor a jeho podprostory

DEFINICE 4.3.1.

Buď V^{n+1} vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{T}$ dimenze $n+1$, $n \geqq 0$. Množinu $\mathbb{P}_n$ všech *jednorozměrných* vektorových podprostorů prostoru V^{n+1}, tj.

$$\mathbb{P}_n = \{\langle \vec{x} \rangle : \ \vec{x} \in V^{n+1}, \vec{x} \neq \vec{o}\}$$

nazýváme **projektivní prostor** dimenze n nad tělesem $\mathbb{T}$ a jeho prvky nazýváme **body**. Vektor $\vec{x} \in V^{n+1}$, $\vec{x} \neq \vec{o}$, jenž generuje bod $X \in \mathbb{P}_n$ nazýváme (**vektorovým**) **zástupcem** bodu X.

Je zřejmé, že každý bod má nekonečně mnoho zástupců, neboť jednodimenzionální vektorový podprostor má nekonečně mnoho bází.

Je-li $\mathbb{T}$ těleso, potom $\mathbb{T}^{n+1}$ je vektorový prostor dimenze $n+1$. Vzhledem k izomorfismu obecného vektorového prostoru V^{n+1} nad tělesem $\mathbb{T}$ a *aritmetického* vektorového prostoru $\mathbb{T}^{n+1}$ můžeme uvažovat $\mathbb{P}_n$ jakožto množinu $\mathbb{P}_n$ všech tříd $\widetilde{\mathbf{x}} = \{\lambda\mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{T}\}$ určených zástupcem $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^{n+1}$. Ztotožňujeme $X = \widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_n$. Uspořádanou $(n+1)$-tici $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{T}^{n+1}$, nazýváme **aritmetickým zástupcem** bodu X a $\widetilde{\mathbf{x}}$ je tzv. vektor **homogenních souřadnic** bodu $X \in \mathbb{P}_n$.

Pro nás nejvýznamnějšími projektivními prostory jsou samozřejmě projektivní prostory $\mathbb{P}_n$ nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$, resp. tělesem komplexních čísel $\mathbb{C}$ (neuvedeme-li v dalším textu jinak, máme vždy na mysli reálné projektivní prostory).

Projektivní podprostory. Interpretace projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ pomocí vektorového prostoru V^{n+1} umožňuje s využitím aparátu lineární algebry snadno popsat základní objekty a operace v projektivním prostoru $\mathbb{P}_n$.

Body $X_0, X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{P}_n$ $(k \in \mathbb{N})$ nazýváme **lineárně závislé**, právě když

$$\mathrm{hod}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) < k+1;$$

v opačném případě hovoříme o **lineárně nezávislých** bodech. Je zřejmé, že v libovolné bodové podmnožině prostoru $\mathbb{P}_n$ existuje maximálně $n+1$ lineárně nezávislých bodů; ostatní body jsou jejich **lineárními kombinacemi**.

DEFINICE 4.3.2.

Množina všech bodů projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$, které jsou lineárními kombinacemi $k+1$ lineárně nezávislých bodů $X_0, X_1, \ldots, X_k$ se nazývá k-rozměrný **projektivní podprostor** $\mathbb{P}_k$ projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ (každý podprostor W^{k+1} vektorového prostoru V^{n+1} určuje projektivní podprostor $\mathbb{P}_k$ projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$).

Projektivní podprostor $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ je pro

$k = n-1$	**projektivní nadrovina**;
$k = 2$	**projektivní rovina**;
$k = 1$	**projektivní přímka**;
$k = 0$	**projektivní bod**;
$k = -1$	prázdná množina.

Parametrické vyjádření podprostoru $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ určeného $k+1$ lineárně nezávislými body $X_0, X_1, \ldots, X_k$ má tvar

$$\mathbb{P}_k: \ \widetilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{k} t_i \widetilde{\mathbf{x}}_i, \quad t_i \in \mathbb{R},\ \widetilde{\mathbf{t}} = (t_0, t_1, \ldots, t_k) \neq \widetilde{\mathbf{o}}. \tag{4.11}$$

Nadrovinu prostoru $\mathbb{P}_n$ lze kromě parametrického vyjádření (4.11) popsat ještě tzv. **obecnou rovnicí** (4.12).

Věta 4.3.1. *Nadrovina projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ je množina všech bodů $\widetilde{\mathbf{x}}$, jejichž souřadnice vyhovují lineární homogenní rovnici tvaru*

$$n_0x_0 + n_1x_1 + \ldots + n_nx_n = 0, \tag{4.12}$$

kde $\widetilde{\mathbf{n}} = (n_0, n_1, \ldots, n_n) \neq \widetilde{\mathbf{o}}$. □

Důkaz: Každý bod $\widetilde{\mathbf{x}}$ nadroviny η je lineární kombinací n lineárně nezávislých bodů $\widetilde{\mathbf{a}}_1 = (a_{10}, \ldots, a_{1n})$, …, $\widetilde{\mathbf{a}}_n = (a_{n0}, \ldots, a_{nn})$, a proto

$$\begin{vmatrix} x_0 & \ldots & x_n \\ a_{10} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Odtud již dostáváme (rozvoj podle 1. řádku)

$$n_0x_0 + n_1x_1 + \ldots + n_nx_n = 0.$$

Protože body $\widetilde{\mathbf{a}}_1$, …, $\widetilde{\mathbf{a}}_n$ jsou lineárně nezávislé, hodnota alespoň jednoho subdeterminantu n_i stupně $n-1$ se nerovná nule.

Naopak, každý kořen $\mathbf{x}$ lineární homogenní rovnice $\sum_{i=0}^{n} n_ix_i = 0$ je lineární kombinací $n-1$ lineárně nezávislých kořenů této rovnice — těchto $n-1$ kořenů jsou lineárně nezávislé body určující nadrovinu, jejímž prvkem je i bod $\widetilde{\mathbf{x}}$. □

Uspořádaná $(n+1)$-tice $\widetilde{\mathbf{n}} = (n_0, n_1, \ldots, n_n)$ se nazývá vektorem **homogenních souřadnic nadroviny** η. Zřejmě bod $\widetilde{\mathbf{x}}$ *inciduje* s nadrovinou $\widetilde{\mathbf{n}}$, právě když $\widetilde{\mathbf{n}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = 0$.

Soustava souřadnic v projektivním prostoru. Jak víme, v projektivním prostoru $\mathbb{P}_n$ existuje nejvýše $n+1$ lineárně nezávislých bodů. Libovolný bod $X \in \mathbb{P}_n$ lze potom vyjádřit jako lineární kombinaci $(n+1)$-tice E_0, E_1,…, E_n. Přirozeně vyvstává otázka, zdali koeficienty $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ této lineární kombinace je možné považovat za $(n+1)$-tici homogenních souřadnic, tj. zda tato $(n+1)$-tice je reprezentantem třídy

$$\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = \{\varrho(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) : \ \varrho \in \mathbb{R}, \varrho \neq 0, \ (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ukazuje se, že tomu tak není a že třída $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ určená $(n+1)$-ticí $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ závisí na výběru reprezentantů bodů E_0, E_1,…, E_n a není určená jednoznačně.

Jestliže např. uvažujeme $n+1$ lineárně nezávislých bodů $\widetilde{\mathbf{e}}_0 = (1,0,\dots,0)$, $\widetilde{\mathbf{e}}_1 = (0,1,\dots,0)$,..., $\widetilde{\mathbf{e}}_n = (0,0,\dots,1)$, potom reprezentant $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ bodu $X \in \mathbb{P}_n$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n. \tag{4.13}$$

Zvolíme-li však místo původních reprezentantů bodů E_0, E_1,..., E_n reprezentanty $(\lambda_0, 0, \dots, 0)$, $(0, \lambda_1, \dots, 0)$,..., $(0, 0, \dots, \lambda_n)$ ($\lambda_i \neq 0$, $\lambda_0 \neq \lambda_1$), potom

$$\mathbf{x} = \frac{x_0}{\lambda_0}\mathbf{e}_0 + \frac{x_1}{\lambda_1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{x_n}{\lambda_n}\mathbf{e}_n$$

a trojice

$$(x_0, x_1, \dots, x_n), \quad \left(\frac{x_0}{\lambda_0}, \frac{x_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{x_n}{\lambda_n}\right)$$

nepatří do téže třídy $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}$.

Nutnou a postačující podmínkou pro jednoznačnost třídy, jejíž reprezentantem je uspořádaná $(n+1)$-tice koeficientů lineární kombinace (4.13), je výběr pevných reprezentantů bodů E_0, E_1,..., E_n. Toho dosáhneme např. tak, že požadujeme, aby libovolný bod J s reprezentantem $\mathbf{j} = (j_0, j_1, \dots, j_n)$ ($j_i \neq 0$) měl vyjádření

$$\mathbf{j} = 1\cdot\mathbf{e}_0 + 1\cdot\mathbf{e}_1 + \ldots + 1\cdot\mathbf{e}_n. \tag{4.14}$$

Zdůrazněme, že bod J tvoří s každými n body z $(n+1)$-tice E_0, E_1,..., E_n $(n+1)$-tici lineárně nezávislých bodů.

Za reprezentanty bodů E_0, E_1,..., E_n bereme $(j_0, 0, \dots, 0)$, $(0, j_1, \dots, 0)$,..., $(0, 0, \dots, j_n)$ a pro výpočet koeficientů lineární kombinace (4.13) je nutné vzít reprezentanty $(\varrho j_0, 0, \dots, 0)$, $(0, \varrho j_1, \dots, 0)$,..., $(0, 0, \dots, \varrho j_n)$ ($\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho \neq 0$). V tomto smyslu již bude vyjádření bodu X jako lineární kombinace bodů E_0, E_1,..., E_n jednoznačné.

$(n+2)$-tici bodů $\langle E_0, E_1, \dots, E_n, J\rangle$ takových, že každých $(n+1)$ z nich je lineárně nezávislých a jejichž konkrétní reprezentanty jsou svázané podmínkou (4.14), nazýváme **projektivním repérem** prostoru $\mathbb{P}_n$. Body E_0,..., E_n označujeme jako **základní body** a bod J se nazývá **jednotkový bod**.

Definice 4.3.3.

Zobrazení $\mathcal{S}$ dané projektivním repérem $\langle E_0, E_1, \ldots, E_n, J\rangle$, které každému bodu $X = \widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_n$ přiřazuje uspořádanou $(n+1)$-tici $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ vztahem

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \text{kde } x_i \in \mathbb{R},$$

nazýváme **projektivní soustava souřadnic**. Uspořádanou $(n+1)$-tici $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ nazýváme **projektivní homogenní souřadnice** bodu X vzhledem k repéru $\langle E_0, E_1, \ldots, E_n, J\rangle$.

Mějme nyní v $\mathbb{P}_n$ dány dva projektivní repéry

$$\langle E_0, E_1, \ldots, E_n, J\rangle \quad \text{a} \quad \langle E_0', E_1', \ldots, E_n', J'\rangle.$$

Potom vektory $\langle \mathbf{e}_i\rangle$ a $\langle \mathbf{e}_i'\rangle$ tvoří dvě báze vektorového prostoru V^{n+1}. Vztah mezi oběma bázemi můžeme maticově zachytit ve tvaru

$$(\mathbf{e}_0', \mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n')^{\mathrm{T}} = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^{\mathrm{T}}, \tag{4.15}$$

kde $\mathbf{C}$ je tzv. *matice přechodu* od báze $\langle \mathbf{e}_i\rangle$ k bázi $\langle \mathbf{e}_i'\rangle$, jejíž řádky tvoří souřadnice vektorů $\mathbf{e}_i'$ v bázi $\langle \mathbf{e}_i\rangle$.

Vektor $\mathbf{x} \in V^{n+1}$, jenž je zástupcem bodu $X \in \mathbb{P}_n$, lze vyjádřit vzhledem k první bázi

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \cdot (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^{\mathrm{T}} \tag{4.16}$$

a vzhledem k druhé

$$\mathbf{x} = (x_0', x_1', \ldots, x_n') \cdot (\mathbf{e}_0', \mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n')^{\mathrm{T}}. \tag{4.17}$$

Dosazením (4.15) do (4.17) dostaneme další vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k první bázi

$$\mathbf{x} = (x_0', x_1', \ldots, x_n') \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^{\mathrm{T}} \tag{4.18}$$

Máme tedy dvě vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k první bázi. Jelikož se souřadnicová vyjádření bodu X vzhledem k témuž projektivnímu repéru mohou lišit o nenulový násobek, dostáváme

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \varrho(x_0', x_1', \ldots, x_n') \cdot \mathbf{C},$$

resp.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \varrho \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

$\varrho \in \mathbb{R}$, $\varrho \neq 0$. Matice $\varrho\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, jež je určena až na nenulový násobek, se nazývá **matice přechodu** od prvního projektivního repéru k druhému. Označíme-li $\widetilde{\mathbf{A}}$ třídu matic

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \{\varrho\mathbf{C}^{\mathrm{T}} : \ \varrho \in \mathbb{R}, \varrho \neq 0, \ \},$$

potom můžeme transformační rovnice psát

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}}'. \tag{4.20}$$

Spojení a průnik projektivních podprostorů. Využijeme znalosti o vektorových podprostorech a pro projektivní podprostory $\mathbb{P}_k$, $\mathbb{P}_l$ prostoru $\mathbb{P}_n$ $(k, l \leqq n)$ zavádíme:

- $\mathbb{P}_k \cap \mathbb{P}_l = \{X \in \mathbb{P}_n : \ X \in \mathbb{P}_k \ \wedge \ X \in \mathbb{P}_l\} = \mathbb{P}_r$ je projektivní podprostor, který nazýváme **průnik** podprostorů $\mathbb{P}_k$ a $\mathbb{P}_l$;
- $\mathbb{P}_k \vee \mathbb{P}_l = \{X \in \mathbb{P}_n : \ X \in AB$, kde $A \in \mathbb{P}_k, B \in \mathbb{P}_l\} = \mathbb{P}_s$ je projektivní podprostor, který nazýváme **spojení** podprostorů $\mathbb{P}_k$ a $\mathbb{P}_l$.[1]

Věta 4.3.2. *Pro dimenze k, l, r, s podprostorů $\mathbb{P}_k$, $\mathbb{P}_l$ projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ a jejich průniku $\mathbb{P}_r$ a spojení $\mathbb{P}_s$ platí*

$$k + l = r + s.$$

□

Důkaz: Přejdeme k vektorovým podprostorům U, V odpovídajícím projektivním podprostorům $\mathbb{P}_k$, $\mathbb{P}_l$. Vzhledem k tomu, že pro vektorové podprostory a jejich průnik a spojení platí

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U \vee V),$$

a jelikož dále platí $\dim(U) = k+1$, $\dim(V) = l+1$, $\dim(U \cap V) = r+1$ a $\dim(U \vee V) = s+1$, je dokazované tvrzení zřejmé. □

[1] $\mathbb{P}_k \vee \mathbb{P}_l$ je „nejmenší“ podprostor, který obsahuje $\mathbb{P}_k$ a $\mathbb{P}_l$. Příslušný vektorový prostor V^{s+1} získáme jakožto vektorový podprostor generovaný v prostoru V^{n+1} sjednocením $V^{k+1} \cup V^{l+1}$.

Jestliže platí $\mathbb{P}_k \cap \mathbb{P}_l = \emptyset$ a $\mathbb{P}_k \vee \mathbb{P}_l = \mathbb{P}_n$, potom se projektivní prostory $\mathbb{P}_k$ a $\mathbb{P}_l$ nazývají **komplementární** — v tomto případě je $k+l = n-1$.

Nechť $\mathbb{P}'$ je podprostor prostoru $\mathbb{P}_n$, jenž získáme jakožto průnik systému nadrovin

$$\eta_i : \ \widetilde{\mathbf{n}}_i \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, \dots, \ell. \tag{4.21}$$

Podprostor $\mathbb{P}'$ je tedy množinou všech bodů $X \in \mathbb{P}_n$, jejichž homogenní souřadnice vyhovují homogenní soustavě

$$\begin{pmatrix} n_{10} & n_{11} & \dots & n_{1n} \\ n_{20} & n_{21} & \dots & n_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{\ell 0} & n_{\ell 1} & \dots & n_{\ell n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Označme h $(1 \leqq h \leqq n)$ hodnost matice soustavy (4.22). Potom množina všech vektorů $\mathbf{x} \in V^{n+1}$, jež jsou řešením soustavy (4.22) tvoří podprostor $W \subset V^{n+1}$ dimenze $(n+1) - h$, který určuje $(n-h)$-rozměrný projektivní podprostor prostoru $\mathbb{P}_n$.

Platí, že každý podprostor $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ lze popsat způsobem (4.21), přičemž potřebujeme právě $n - k$ lineárně nezávislých nadrovin η_i. Uvedené vyjádření nazýváme **obecné vyjádření** podprostoru $\mathbb{P}_k$.

Přechod od projektivního prostoru k afinnímu. Ukážeme, že doplněk každé nadroviny v n-rozměrném projektivním prostoru je n-rozměrný afinní prostor.

Nechť je v projektivním prostoru $\mathbb{P}_n$ s vektorovým základem V^{n+1} dána libovolná nadrovina ω_0 popsaná vektorovým prostorem $W^n \subset V^{n+1}$ — bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je popsána rovnicí $x_0 = 0$. [2]

Uvažujme nyní množinu

$$\mathcal{U}_0 = \mathbb{P}_n \setminus \omega_0 = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{P}_n : \ x_0 \neq 0\};$$

reprezentant každého bodu X množiny $\mathcal{U}_0$ lze tedy uvést na tvar

$$\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right) = (1, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n).$$

[2] Toho lze vždy dosáhnout vhodnou volbou souřadného systému; $E_1, \dots, E_n \in \omega_0$ a $E_0, J \notin \omega_0$.

Souřadnice bodů projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ jsou vztaženy k projektivní soustavě souřadnic $\langle E_0, E_1, \dots, E_n, J\rangle$, a proto pro body $X, Y \in \mathcal{U}_0$ můžeme psát

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{e}_0 + \overline{x}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \overline{x}_n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{e}_0 + \overline{y}_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \overline{y}_n\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Definujeme zobrazení $\rightarrow\colon \mathcal{U}_0 \times \mathcal{U}_0 \to W^n$ předpisem

$$X, Y \in \mathcal{U}_0 \ \mapsto \overrightarrow{XY} = Y - X = (\overline{y}_1 - \overline{x}_1)\mathbf{e}_1 + \cdots + (\overline{y}_n - \overline{x}_n)\mathbf{e}_n \in W^n.$$

Snadno bychom dokázali, že trojice $(\mathcal{U}_0, W^n, \rightarrow)$ splňuje axiómy afinního prostoru

(i) $(\forall X, Y, Z \in \mathcal{U}_0)\colon \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}$;
(ii) $(\forall X \in \mathcal{U}_0, \forall \mathbf{u} \in W^n)(\exists!\, Y \in \mathcal{U}_0)\colon \overrightarrow{XY} = \mathbf{u}$,

tj. $(\mathcal{U}_0, W^n, \rightarrow)$ je *afinní prostor* $\mathbb{A}_n^0$ dimenze n se zaměřením W^n. Báze $\langle E_0, E_1, \dots, E_n, J\rangle$ přitom přejde v afinní repér $\langle E_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\rangle$.

Zdůrazněme jen, že platí:

- je-li dán bod $X \in \mathcal{U}_0$ s projektivními homogenními souřadnicemi $(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $x_0 \neq 0$, potom jeho souřadnice vzhledem k odpovídajícímu afinnímu repéru nabývají tvaru $\left[\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right]$;
- je-li dán bod $X \notin \mathcal{U}_0$ s projektivními homogenními souřadnicemi $(0, x_1, \dots, x_n)$, potom mu v afinním prostoru $(\mathcal{U}_0, W^n, \rightarrow)$ odpovídá *směr* generovaný vektorem $(x_1, \dots, x_n)$ ze zaměření W^n.

Projektivní rozšíření afinního prostoru. V předcházející části jsme ukázali, že vynecháním (odstraněním, vyjmutím) jediné nadroviny ω_0 projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ vznikne z tohoto prostoru afinní prostor $\mathbb{A}_n^0$.

Jestliže afinní prostor $\mathbb{A}_n$ se zaměřením W^n vložíme jako $\mathbb{A}_n^0$ do projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$, potom sjednocením $\mathbb{A}_n^0$ a nadroviny $\omega_0 \subset \mathbb{P}_n$, kde $\omega_0 = \{\langle\mathbf{u}\rangle : \ \mathbf{u} \in W^n, \mathbf{u} \neq \mathbf{o}\}$, dostaneme právě prostor $\mathbb{P}_n$. Tento n-rozměrný projektivní prostor s vyznačenou pevnou nadrovinou ω_0 představuje speciální model n-rozměrného projektivního prostoru, tzv. (**projektivně**) **rozšířený afinní prostor** — budeme jej označovat $\overline{\mathbb{A}_n}$.

Vyznačená pevná nadrovina ω_0 se nazývá **nevlastní nadrovina** a její body, resp. podmnožiny se nazývají **nevlastní body**,[3] resp. **nevlastní podmnožiny**. Body afinního prostoru $\mathbb{A}_n$ se nazývají **vlastní**.

Jelikož eukleidovský prostor je speciálním případem afinního prostoru (metrika!) lze obdobným způsobem vytvořit i (**projektivně**) **rozšířený eukleidovský prostor** $\overline{\mathbb{E}_n}$.

Princip duality v projektivním prostoru $\mathbb{P}_n$**.** Je zřejmé, že každou nenulovou uspořádanou $(n+1)$-tici můžeme interpretovat buďto jako *bod*, nebo jako *nadrovinu* v prostoru $\mathbb{P}_n$. Množina všech nadrovin projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ je tudíž sama projektivním prostorem, který nazýváme **projektivním prostorem duálním** k prostoru $\mathbb{P}_n$ — značíme jej $\mathbb{P}_n^*$. Platí:

- Body prostoru $\mathbb{P}_n^*$ jsou nadroviny prostoru $\mathbb{P}_n$.
- Prostorem duálním k prostoru $\mathbb{P}_n^*$ je prostor $\mathbb{P}_n$.

Uvažujme podprostor $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$, k jehož *obecnému vyjádření* (4.21) potřebujeme právě $(n-k)$ lineárně nezávislých nadrovin η_i. Těchto $(n-k)$ lineárně nezávislých nadrovin generuje $(n-k-1)$-rozměrný podprostor $\mathbb{P}_{n-k-1}^* \subset \mathbb{P}_n^*$.

Označme δ bijekci, jež podprostoru $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ přiřazuje podprostor $\mathbb{P}_{n-k-1}^* \subset \mathbb{P}_n^*$. Potom platí (jak bychom snadno dokázali)

$$\delta(\mathbb{P}_k \cap \mathbb{P}_l) = \delta(\mathbb{P}_k) \vee \delta(\mathbb{P}_l), \quad \delta(\mathbb{P}_k \vee \mathbb{P}_l) = \delta(\mathbb{P}_k) \cap \delta(\mathbb{P}_l),$$

$$\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_l \Leftrightarrow \delta(\mathbb{P}_k) \supset \delta(\mathbb{P}_l).$$

DEFINICE 4.3.4.

Jestliže ve větě týkající se k-rozměrného projektivního podprostoru, spojení, průniku a inkluze podprostorů projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ nahradíme uvedené pojmy za pojmy $(n-k-1)$-rozměrný projektivní podprostor, průnik, spojení a inkluzi nahradíme opačnou inkluzí podprostorů, potom obdržíme větu, která se označuje jako **duální věta** k větě původní. Uvedená záměna se nazývá **dualizace**.

Dualizací duální věty získáváme samozřejmě větu původní.

[3] Nevlastní body prostoru $\overline{\mathbb{A}_n}$ tedy ztotožňujeme se směry prostoru $\mathbb{A}_n$.

Věta 4.3.3. (Princip duality)

Každá věta geometrie prostoru $\mathbb{P}_n$ přechází dualizací v rovněž platnou větu geometrie prostoru $\mathbb{P}_n$

Princip duality nebyl dlouho znám — poprvé se o něm zmiňuje až francouzský matematik J. V. Poncelet (1788–1867) ve svém spise *Traité des propriétés projectives des figures* (1822). Velký přínos principu duality je ovšem evidentní — stačí dokazovat jen polovinu všech vět projektivní geometrie, z každé věty totiž plyne dualizací věta další.

Zdůrazněme ještě, že princip duality používáme jen v geometrii projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$, kde nečiníme rozdíl mezi útvary vlastními a nevlastními. V afinním, ani v eukleidovském prostoru princip duality nezavádíme! Je sice pravda, že prostory $\mathbb{A}_n$ i $\mathbb{E}_n$ jsou součástí $\mathbb{P}_n$, avšak jejich doplňky nejsou *samoduální* (tj. duální samy se sebou) — existuje nekonečně mnoho nevlastních bodů, ale jen jedna nevlastní nadrovina.

4.4 Dvojpoměr a harmonická čtveřice

Definice 4.4.1.

Nechť A, B, C, D jsou čtyři navzájem různé body projektivní přímky $\mathbb{P}_1$ a nechť platí

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1\mathbf{a} + \beta_1\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2\mathbf{a} + \beta_2\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Potom číslo

$$\mu = (A, B, C, D) = \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} \tag{4.24}$$

nazveme **dvojpoměr** uspořádané(!) čtveřice bodů (A, B, C, D).

Snadno bychom dokázali, že výše uvedená definice nezávisí na výběru aritmetických reprezentantů $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ bodů A, B, C, D.

Uvažujme na projektivní přímce $\mathbb{P}_1$ body $\widetilde{\mathbf{a}} = (a_0, a_1)$, $\widetilde{\mathbf{b}} = (b_0, b_1)$, $\widetilde{\mathbf{c}} = (c_0, c_1)$, $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_0, d_1)$; tj. vztahy (4.23) nabývají tvaru

$$\begin{aligned} c_0 &= \alpha_1 a_0 + \beta_1 b_0 \\ c_1 &= \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_0 &= \alpha_2 a_0 + \beta_2 b_0 \\ d_1 &= \alpha_2 a_1 + \beta_2 b_1. \end{aligned}$$

Dvojnásobným použitím *Cramerova pravidla* můžeme určit α_1, β_1, α_2, β_2 a po dosazení do (4.24) dostáváme pro dvojpoměr vyjádření

$$(A,B,C,D) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}. \tag{4.25}$$

Jestliže se omezíme jen na vlastní body přímky $\mathbb{A}_1$, resp. $\mathbb{E}_1$, tj. na body o souřadnicích $\widetilde{\mathbf{a}} = (1, a)$, $\widetilde{\mathbf{b}} = (1, b)$, $\widetilde{\mathbf{c}} = (1, c)$, $\widetilde{\mathbf{d}} = (1, d)$, potom z vyjádření (4.25) bezprostředně plyne

$$(A,B,C,D) = \frac{c-a}{b-c} \cdot \frac{d-a}{b-d} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(A,B,C)}{(A,B,D)}, \tag{4.26}$$

a proto v případě vlastních bodů A, B, C, D lze jejich dvojpoměr zapsat jako podíl dvou dělicích poměrů. V případě nevlastního bodu bodu D_∞ rozšířené eukleidovské přímky $\overline{\mathbb{E}_1}$ potom v souladu se vztahem $(A, B, D_\infty) = 1$ platí

$$(A, B, C, D_\infty) = (A, B, C).$$

DEFINICE 4.4.2.

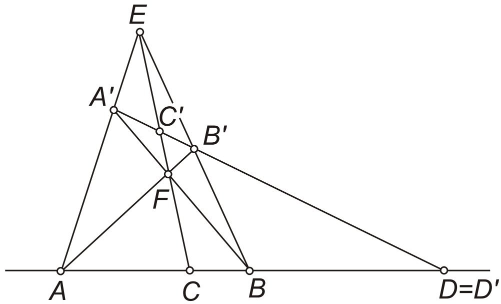
Jestliže pro čtyři kolineární body projektivního prostoru platí

$$(A, B, C, D) = -1,$$

potom *uspořádanou* čtveřici (A, B, C, D) nazýváme **harmonická čtveřice**; resp. říkáme, že body C, D jsou **harmonicky sdruženy** vzhledem k základním bodům A, B.

Z definice ihned plyne, že střed úsečky AB je *harmonicky sdružen* s nevlastním bodem přímky AB.

Harmonická čtveřice je často využívána v řadě konstrukcí. Za základní považujeme konstrukci nalézt ke třem různým kolineárním bodům $A, B, C \in p$ čtvrtý bod $D \in p$ tak, že $(A, B, C, D) = -1$. Tuto úlohu můžeme řešit např. s využitím tzv. úplného čtyřrohu. Skupina čtyř bodů B_1, B_2, B_3, B_4 v rovině, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce, se nazývá **úplný čtyřroh**, body B_1, B_2, B_3, B_4 se nazývají jeho *vrcholy*; šest přímek, z nichž každá je incidentní s dvěma z těchto vrcholů, nazýváme *stranami* úplného čtyřrohu.



Algoritmus nalezení bodu D je patrný z uvedeného obrázku. Nechť jsou dány body $A, B, C \in p$. Zvolíme libovolný bod $E \notin AB$, dále zvolíme bod $F \in EC$, $F \neq E, C$; následuje konstrukce bodů $A' \in BF \cap AE$, $B' \in AF \cap BE$ a jednoznačné sestrojení bodu D (body A, B, B', A' jsou vrcholy úplného čtyřrohu).

Zdůvodnění konstrukce je následující:
Obvyklým způsobem $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, … označíme reprezentanty bodů A, B, …, které je vždy možné zvolit tak, aby platilo

$$\begin{aligned}\mathbf{a} + \mathbf{a}' &= \mathbf{e},\\ \mathbf{b} + \mathbf{b}' &= \mathbf{e}.\end{aligned}$$

Jelikož z výše uvedeného plyne

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - \mathbf{b}' &= \mathbf{b} - \mathbf{a}', \text{ resp.}\\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{b}' - \mathbf{a}',\end{aligned}$$

lze vzhledem ke skutečnosti $AB' \cap A'B = \{F\}$, $AB \cap A'B' = \{D\}$ volit reprezentanty bodů F, D ve tvaru

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b}', \quad \mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}.$$

Po úpravě vztahu $\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{b}'$ dostaneme $\mathbf{b}' = \mathbf{a} - \mathbf{f}$, a proto

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} + \mathbf{b}' = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{f}, \quad \text{tj.}$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{e} + \mathbf{f}.$$

Vzhledem ke vztahu $AB \cap EF = \{C\}$ volíme reprezentant bodu C ve tvaru

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}.$$

Dosazením do (4.24) dostáváme $(A, B, C, D) = -1$.

Závěrem zdůrazněme, že přechodem k duálnímu prostoru $\mathbb{P}_n^*$ se pojem dvojpoměru uspořádané čtveřice bodů na přímce přenáší na uspořádanou čtveřici nadrovin, které mají společný podprostor dimenze $n - 2$ (podprostor duální k přímce má dimenzi $n - 1 - 1 = n - 2$). Množina všech nadrovin se společnýmn průnikem dimenze $n-2$ se nazývá **svazek nadrovin** a platí, že jsou-li $\widetilde{\mathbf{n}}$, $\widetilde{\mathbf{m}}$ dvě různé nadroviny prostoru $\mathbb{P}_n$, potom libovolnou nadrovinu $\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}$ svazku generovaného nadrovinami $\widetilde{\mathbf{n}}$, $\widetilde{\mathbf{m}}$ lze popsat rovnicí $\widetilde{\boldsymbol{\zeta}} = t_0\widetilde{\mathbf{n}} + t_1\widetilde{\mathbf{m}}$, kde $(t_0, t_1) \neq (0, 0)$, tj. všechny nadroviny svazku tvoří jednorozměrný projektivní podprostor v $\mathbb{P}_n^*$. **Dvojpoměr čtveřice nadrovin ve svazku** se definuje i počítá obdobně jako dvojpoměr čtyř bodů na přímce — definice 4.4.1 a vzorec (4.25).

4.5 Projektivní zobrazení a projektivní transformace

DEFINICE 4.5.1.

Nechť φ je lineární zobrazení operující mezi vektorovými prostory V_{n+1} a V'_{m+1}

$$\varphi: \ V_{n+1} \to V'_{m+1}.$$

Buďte $\mathbb{P}_n = \{\langle \mathbf{x} \rangle : \ \mathbf{x} \in V_{n+1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$ a $\mathbb{P}'_m = \{\langle \mathbf{x} \rangle : \ \mathbf{x} \in V'_{m+1}, \mathbf{x} \neq \mathbf{o}\}$ dva projektivní prostory. Zobrazení $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_m$ se nazývá **projektivní** nebo také **kolineární zobrazení**, jestliže pro každý bod $X = \widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_n$ a pro každého vektorového zástupce $\mathbf{x} \in V_{n+1}$ bodu X platí

$$f(X) = \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle.$$

Mohli bychom dokázat (vyplývá z vlastností lineárního operátoru φ), že pro každé tři různé kolineární body $X, Y, Z \in \mathbb{P}_n$ a jejich obrazy $X', Y', Z' \in \mathbb{P}'_m$ platí:

(K-1) X', Y', Z' buďto splynou, anebo jde rovněž o tři různé kolineární body.

Touto vlastností také bývá někdy projektivní zobrazení definováno.

Je-li φ izomorfismus, potom je kolineární zobrazení f *bijekce*. Takovéto zobrazení nazýváme **regulární projektivní**, resp. **kolineární zobrazení** nebo zkráceně **projektivita**, resp. **kolineace**. Projektivní zobrazení, která nejsou regulární, nazýváme **singulární**.

Analytické vyjádření projektivních zobrazení. Nechť V_{n+1} a V'_{m+1} jsou vektorové základy projektivních prostorů $\mathbb{P}_n$ a $\mathbb{P}'_m$. Potom projektivní zobrazení

$$f:\ \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_m, \quad X \mapsto f(X) = X'$$

je indukováno lineárním zobrazením $\varphi :\ V_{n+1} \to V'_{m+1}$. Ke každému bodu $X \in \mathbb{P}_n$ sestrojíme jeho kolineární obraz $f(X) \in \mathbb{P}'_m$ tak, že k libovolnému zástupci bodu $\mathbf{x}$ najdeme v zobrazení φ odpovídající vektor $\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x})$, který je pak zástupcem hledaného bodu $X' = f(X)$.

Projektivní zobrazení f je tudíž možné analyticky popsat pomocí vztahu mezi souřadnicemi vektorových zástupců $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}'$ (jejichž souřadnice jsou vztaženy ke zvoleným bázím v prostorech V_{n+1} a V'_{m+1}). Platí tedy

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \text{kde} \ \ \mathbf{A} = \mathbf{A}_{(m+1,n+1)} \tag{4.27}$$

neboli po rozepsání

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Jestliže místo reprezentanta $\mathbf{x}$ bodu X vezmeme reprezentant $\varrho\mathbf{x}$ ($\varrho \neq 0$), potom (4.27) nabude tvaru

$$\mathbf{x}' = \varrho\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{4.28}$$

Bod X' přiřazený kolineací bodu X zůstává stejný — nanejvýš se změní jeho reprezentant $\mathbf{x}'$. To znamená, že třídou matic

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \{\varrho\mathbf{A} : \ \varrho \in \mathbb{R}, \varrho \neq 0, \ \mathbf{A} = \mathbf{A}_{(m+1,n+1)}\}$$

je určeno *jediné* kolineární zobrazení prostoru $\mathbb{P}_n$ do prostoru $\mathbb{P}'_m$. Předpis (4.27) tak přesněji zapisujeme

$$f(\widetilde{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}, \quad \text{kde } \ \widetilde{\mathbf{A}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{(m+1,n+1)} \tag{4.29}$$

Protože v zobrazení φ odpovídá vektorovému podprostoru prostoru V_{n+1} vektorový podprostor prostoru V'_{m+1}, odpovídá v kolineárním zobrazení f projektivnímu podprostoru $\mathbb{P}_r$ prostoru $\mathbb{P}_n$ projektivní podprostor $\mathbb{P}'_s$ prostoru $\mathbb{P}'_m$:

$$f : \mathbb{P}_r \to f(\mathbb{P}_r) = \{Y \in \mathbb{P}'_m : \ Y = f(X), \ \text{kde } X \in \mathbb{P}_r\} = \mathbb{P}'_s.$$

O důležitém invariantu kolineárních zobrazení hovoří následující věta:

Věta 4.5.1. *Nechť je dáno projektivní zobrazení $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_m$. Potom pro čtyři různé kolineární body X, Y, Z, U a jejich obrazy $f(X) = X'$, $f(Y) = Y'$, $f(Z) = Z'$, $f(U) = U'$ platí buďto $(X, Y, Z, U) = (X', Y', Z', U')$, anebo $X' = Y'$ a dvojpoměr (X', Y', Z', U') není definován.* □

Důkaz: Zabývejme se pouze případem, kdy obrazy nesplynou. Projektivní zobrazení f je zprostředkováno lineárním zobrazením φ, který rovnosti (4.23) v definici dvojpoměru 4.4.1 převede na tvar

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}) &= \alpha_1 f(\mathbf{a}) + \beta_1 f(\mathbf{b}) \\ f(\mathbf{d}) &= \alpha_2 f(\mathbf{a}) + \beta_2 f(\mathbf{b}). \end{aligned}$$

Odtud vzhledem (4.24) již ihned plyne dokazované tvrzení. □

Regulární projektivní zobrazení. Regulární projektivní zobrazení (*projektivita*, *kolineace*) je popsáno čtvercovou *regulární* maticí $\widetilde{\mathbf{A}}_{(n+1,n+1)}$. V tomto případě má také smysl hovořit o inverzní kolineaci f^{-1}, která je popsána rovnicí:

$$f^{-1} : \ \widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{-1}\,\widetilde{\mathbf{x}}\,'. \tag{4.30}$$

S využitím vztahu

$$\widetilde{\mathbf{A}}^{-1} = \frac{\widetilde{\mathbf{A}}_{\text{adj}}}{\det(\widetilde{\mathbf{A}})},$$

kde $\widetilde{\mathbf{A}}_{\text{adj}}$ je matice *adjungovaná* k matici $\widetilde{\mathbf{A}}$, a vzhledem k použití homogenních souřadnic lze (4.30) přepsat na tvar

$$f^{-1}:\ \widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{A}}_{\text{adj}}\,\widetilde{\mathbf{x}}\,'. \tag{4.31}$$

Z regularity projektivního zobrazení f (resp. z vlastností izomorfismu φ) navíc plyne:

Věta 4.5.2. *Nechť $f : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ je kolineace. Potom platí*

(i) Obrazem každé množiny lineárně nezávislých bodů prostoru $\mathbb{P}_n$ je opět množina lineárně nezávislých bodů prostoru $\mathbb{P}'_n$.

(ii) Pro $\mathbb{P}_k \subset \mathbb{P}_n$ je $f(\mathbb{P}_k) = \mathbb{P}'_k \subset \mathbb{P}'_n$, tj. nemění se dimenze podprostorů (speciálně: obrazem přímky je přímka a obrazem nadroviny je nadrovina).

(iii) Zachovává se spojení $\bigvee$, průnik $\bigcap$ a inkluze $\subset$ podprostorů. □

Uvažujme nadrovinu η o rovnici

$$\widetilde{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=0}^{n} n_i x_i = 0.$$

Bod $\widetilde{\mathbf{x}}$ zobrazíme v kolineaci f a s využitím vztahu (4.31) můžeme psát

$$\eta':\ \widetilde{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\widetilde{\mathbf{A}}_{\text{adj}}\,\widetilde{\mathbf{x}}\,'\right) = \left(\widetilde{\mathbf{n}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{A}}_{\text{adj}}\right)\widetilde{\mathbf{x}}\,' = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}_{\text{adj}}\widetilde{\mathbf{n}}\right)^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{x}}\,' = 0$$

Odtud obdržíme pro vektor homogenních souřadnic nadroviny η a jejího obrazu η'

$$f:\ \widetilde{\mathbf{n}}\,' = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}_{\text{adj}}\widetilde{\mathbf{n}}, \tag{4.32}$$

kde $\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}_{\text{adj}}$ je matice algebraických doplňků prvků matice $\widetilde{\mathbf{A}}$. Vzhledem ke vztahu $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}_{\text{adj}} = \det\left(\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{E}$ a s ohledem na použití homogenních souřadnic dále dostáváme

$$f^{-1}:\ \widetilde{\mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\mathbf{n}}\,'. \tag{4.33}$$

Snadno nahlédneme, že rovněž platí

$$f:\ \widetilde{\mathbf{n}}\,' = \left(\widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\widetilde{\mathbf{n}}. \tag{4.34}$$

Zdůrazněme jeden důležitý fakt: lineární izomorfismus $\varphi: V_{n+1} \to V'_{m+1}$ je jednoznačně určen, popíšeme-li jeho fungování na $n+1$ vektorech báze prostoru V_{n+1}. Bázové vektory však nejsou geometrickými objekty v projektivním prostoru — každý vektor báze udává jediný projektivní bod, naopak to však neplatí. O určenosti kolineace hovoří následující věta.

Věta 4.5.3. *Kolineace $f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}'_n$ je jednoznačně určena zadáním $n+2$ dvojic navzájem si odpovídajících bodů, přičemž z daných $n+2$ bodů i z $n+2$ odpovídajících bodů žádných $n+1$ neleží v téže nadrovině (tj. tvoří množinu lineárně nezávislých bodů).* □

Důkaz a současně návod pro určení analytického vyjádření kolineace je následující: Uvažujme páry odpovídajích si bodů dle předpokladů věty

$$P_i \to P'_i = f(P_i), \quad i = 0, \ldots, n+1.$$

Potom vektory $\mathbf{p}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$, resp. $\mathbf{p}'_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ tvoří bázi vektorového prostoru V_{n+1}, resp. V'_{m+1}, a proto můžeme psát

$$\mathbf{p}_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \mathbf{p}_i, \quad \text{resp. } \mathbf{p}'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda'_i \mathbf{p}'_i.$$

Všechny koeficienty λ_i (a λ'_i) jsou nenulové, protože jinak by $n+1$ vektorů $\mathbf{p}_i$ (popř. $\mathbf{p}'_i$) bylo lineárně závislých.

Položme $\mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ a $\mathbf{q}'_i = \lambda'_i \mathbf{p}'_i$ — jedná se o jiné reprezentanty týchž bodů P_i a P'_i. Lineární zobrazení φ, jenž zobrazuje $\mathbf{q}_i \mapsto \mathbf{q}'_i$ $(i = 0, \ldots, n)$, indukuje projektivní zobrazení f, jež zobrazuje $P_i \mapsto P'_i$ $(i = 0, \ldots, n)$. Ovšem vzhledem k tomu, že platí

$$\varphi(\mathbf{p}_{n+1}) = \varphi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_1 + \ldots + \mathbf{q}_n) = \mathbf{q}'_0 + \mathbf{q}'_1 + \ldots + \mathbf{q}'_n = \mathbf{p}'_{n+1},$$

f rovněž zobrazuje $P_{n+1} \mapsto P'_{n+1}$. □

Projektivní transformace. Vzájemně jednoznačné projektivní zobrazení projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ na sebe $(f: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n)$ se nazývá **projektivní transformace**, resp. **autokolineace** prostoru $\mathbb{P}_n$ a má analytické vyjádření

$$f(\widetilde{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}, \tag{4.35}$$

kde $\widetilde{\mathbf{A}}$ je čtvercová regulární matice $(n+1) \times (n+1)$.

Snadno bychom dokázali větu:

Věta 4.5.4. *Množina všech autokolineací prostoru $\mathbb{P}_n$ tvoří vzhledem k operaci skládání tzv.* ***projektivní grupu****, kterou budeme značit* $PGL(\mathbb{P}_n)$. □

Platí, že projektivní grupa $PGL\big[\mathbb{P}_n(\mathbb{T})\big]$ projektivního prostoru nad tělesem $\mathbb{T}$ je *izomorfní* s faktorgrupou $GL(n+1,\mathbb{T})/ZGL(n+1,\mathbb{T})$, kde $GL(n+1,\mathbb{T})$ je multiplikativní grupa všech regulárních matic stupně $n+1$ nad tělesem $\mathbb{T}$ a $ZGL(n+1,\mathbb{T})$ je multiplikativní podgrupa všech matic typu $\varrho\mathbf{E}$, kde $\varrho \in \mathbb{T}$, $\varrho \neq 0$ a $\mathbf{E}$ je jednotková matice stupně $n+1$.[4]

Pro souřadnice **samodružného bodu $\widetilde{\mathbf{y}}$** projektivní transformace prostoru $\mathbb{P}_n$ platí

$$\widetilde{\mathbf{y}} = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{y}} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E})\mathbf{y} = \mathbf{o}, \quad \varrho \neq 0,$$

tj. bod $\widetilde{\mathbf{y}}$ je samodružný, právě když vektor $\mathbf{y}$ je *vlastním vektorem* matice $\mathbf{A}$ příslušným k *vlastnímu číslu* ϱ.

Obdobně můžeme uvažovat i **samodružnou nadrovinu $\widetilde{\mathbf{n}}$** projektivní transformace prostoru $\mathbb{P}_n$, pro níž s využitím vztahu (4.33) musí platit

$$\widetilde{\mathbf{n}} = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{n}},$$

a proto tentokrát hledáme *vlastní vektor* matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Při hledání samodružných bodů a nadrovin kolineace f (tj. při hledání vlastních vektorů matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ pracujeme s determinanty $|\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E}|$ a $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \varrho\mathbf{E}|$, jež se samozřejmě jakožto determinanty navzájem transponovaných matic sobě rovnají. Determinant $|\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E}|$ nazýváme **charakteristický determinant kolineace**, rovnice

$$|\mathbf{A} - \varrho\mathbf{E}| = 0 \tag{4.36}$$

se nazývá **charakteristická rovnice kolineace** a její kořeny označujeme jako **charakteristické hodnoty kolineace**.

Uvažujme nyní rozšířený afinní prostor $\overline{\mathbb{A}_n}$. Omezíme-li se jen na vlastní body, potom je možné provést *odhomogenizování* vyjádření (4.27) —

[4]Právě ke všem prvkům grupy $ZGL(n+1,\mathbb{T})$ je přiřazena identická kolineace prostoru $\mathbb{P}_n(\mathbb{T})$.

první až n-tou rovnici vydělíme nultou rovnicí a na pravých stranách takto získaných rovnic dělíme čitatele a jmenovatele výrazem x_0; pomocí vztahů $\overline{x}_i = x_i/x_0$ tak přecházíme od rovnic

$$\begin{aligned} x'_0 &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \ldots + a_{0n}x_n \\ x'_1 &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_2 \end{aligned}$$

k rovnicím

$$\begin{aligned} \overline{x}_1 &= \frac{a_{10} + a_{11}\overline{x}_1 + \ldots + a_{1n}\overline{x}_n}{a_{00} + a_{01}\overline{x}_1 + \ldots + a_{0n}\overline{x}_n} \\ &\vdots \\ \overline{x}_n &= \frac{a_{n0} + a_{n1}\overline{x}_1 + \ldots + a_{nn}\overline{x}_n}{a_{00} + a_{01}\overline{x}_1 + \ldots + a_{0n}\overline{x}_n} \end{aligned} \tag{4.37}$$

Afinní kolineace projektivního prostoru. Podívejme se nyní na jeden speciální typ projektivity, a to na kolineaci f v rozšířeném afinním prostoru $\overline{\mathbb{A}_n}$, při níž je nevlastní nadrovina π_∞ samodružná (obdobně bychom mohli hovořit i o obecnější kolineaci $f: \overline{\mathbb{A}_n} \to \overline{\mathbb{A}'_n}$ mezi dvěma různými prostory, která zobrazuje nevlastní nadrovinu prostoru $\overline{\mathbb{A}_n}$ na nevlastní nadrovinu prostoru $\overline{\mathbb{A}'_n}$). Kolineace tohoto typu se nazývá **afinní kolineace** (**transformace**) projektivního prostoru vzhledem k nadrovině π_∞.

Pro tuto kolineaci tedy platí podmínka

$$f: \ x_0 = 0 \ \to \ x'_0 = 0,$$

tj. afinní kolineace má zřejmě analytické vyjádření

$$f(\widetilde{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{\mathbf{x}}, \quad \text{kde} \ \ a_{01} = a_{02} = \ldots = a_{0n} = 0.$$

Jestliže volíme $a_{00} = 1$ a označíme-li $b_1 = a_{10}, \ldots, b_n = a_{n0}$, potom lze předcházející vyjádření přepsat na tvar

$$f(\widetilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} & \mathbf{A}_{(n,n)} \end{pmatrix} \widetilde{\mathbf{x}}. \tag{4.38}$$

Zúžení afinní transformace projektivního prostoru $\mathbb{P}_n = \overline{\mathbb{A}_n}$ na afinní prostor $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{P}_n$ je **afinní transformace** afinního prostoru $\mathbb{A}_n$, jež má analytické vyjádření

$$f: \; x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Současně vidíme, že každou afinitu lze popsat nejen pomocí matic $\mathbf{A}_{(n,n)}$ a $\mathbf{b}_{(n,1)}$, ale rovněž pomocí matice jediné typu $(n+1) \times (n+1)$.

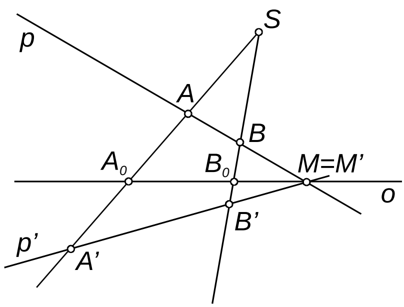
4.6 Středová kolineace

DEFINICE 4.6.1.

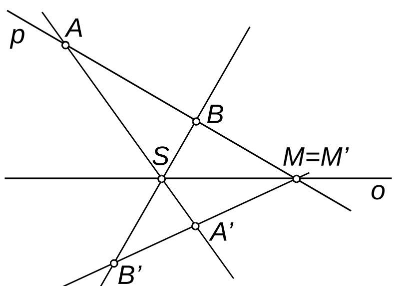
Projektivní transformace projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ různá od identity se nazývá **středová kolineace** (resp. **osová kolineace**, resp. **perspektivní kolineace**), jsou-li samodružné všechny body pevně zvolené nadroviny $\eta = \mathbb{P}'_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$ (tzv. **osy kolineace**) a rovněž všechny nadroviny procházející pevně zvoleným bodem $S \in \mathbb{P}_n$ (tzv. **středem kolineace**).
Jestliže střed inciduje s osou, potom hovoříme o tzv. **elaci**, v opačném případě se perspektivní kolineace nazývá **homologie**.

Věta 4.6.1. *Středová kolineace v prostoru $\mathbb{P}_n$ je určena středem S, osou o a jedním párem odpovídajících si různých bodů A a A', pro něž platí $A, A' \notin o$ $A, A' \neq S$ a $S \in AA'$.* □

Situace v rovině $\mathbb{P}_2$ je zachycena na následujících obrázcích:



Obr. 4.6.8



Obr. 4.6.9

Pro jednoduché analytické vyjádření středové kolineace f zvolíme projektivní soustavu souřadnic tak, že osová nadrovina je popsána rovnicí $x_0 = 0$ — za body $E_1, \ldots, E_n$ zvolíme libovolné různé body osy kolineace. Nechť všechny body osy kolineace, tj. i body $E_1, \ldots, E_n$ odpovídají n-násobnému kořenu ϱ_0 charakteristické rovnice kolineace. Potom má kolineace s nadrovinou samodružných bodů $x_0 = 0$ vyjádření

$$\begin{array}{rclccc} x'_0 & = & a_{00}x_0 & & & \\ x'_1 & = & a_{10}x_0 & +\ \varrho_0 x_1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ x'_n & = & a_{n0}x_0 & & & +\ \varrho_0 x_n \end{array} \tag{4.39}$$

(vektor $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ se zobrazuje na vektor $\mathbf{e}'_i = (0, \ldots, \varrho_0, \ldots, 0)$, $\varrho_0 \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, z čehož plyne pro všechna $j \neq i$ $a_{ji} = 0$ a pro $j = i$ $a_{ii} = \varrho_0$).

Uvažujme vektor $\mathbf{s} = (a_{00} - \varrho_0, a_{10}, \ldots, a_{n0})$ — snadno nahlédneme, že platí

$$\mathbf{x}' = x_0\mathbf{s} + \varrho_0\mathbf{x},$$

tj. pro každý vzor X a jeho obraz X' jsou body S, X, X' na základě výše uvedeného vztahu kolineární. Samodružný bod S je tedy středem kolineace. Pro případ $a_{00} = \varrho_0$ bod S inciduje s osou kolineace — jde o *elaci*; pro případ $a_{00} \neq \varrho_0$ jde o *homologii.*

Ještě poznamenejme, že aby byla středová kolineace (4.39) involucí, musí jít o homologii. Bez újmy na obecnosti pak můžeme zvolit projektivní soustavu souřadnic tak, že $E_0 = S$ neboli $\mathbf{s} = (1, 0, \ldots, 0)$. Matice involutorní kolineace nabývá tedy v tomto případě tvaru $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(1, -1, \ldots, -1)$.

Zvláštními případy středové kolineace v $\overline{\mathbb{A}_n}$ jsou:

- **základní** (resp. **osová**) **afinita** — je-li střed nevlastní a osa je vlastní (jestliže navíc S_∞ náleží ose afinity neboli směr afinity je rovnoběžný s osou, potom je základní afinita elací; jinak jde o homologii);
- **posunutí** — je-li střed nevlastní a osa je nevlastní (elace);
- **stejnolehlost** — je-li střed vlastní a osa je nevlastní (homologie).

Poznamenejme jen, že název *středová kolineace* se často používá jen pro případ *vlastního středu a vlastní osy.*

Středová kolineace mezi dvěma rovinami. Stejně jako v případě osové afinity v rovině, kdy lze princip této afinní transformace rozšířit na obdobnou afinitu odehrávající se mezi dvěma *různými* rovinami, taktéž nyní je možné studovat projektivitu, kterou označujeme (**středová**) **kolineace mezi dvěma rovinami** (zprostředkovaná středem S).

Zmíněnou kolineaci $f : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}'_2$ je možné zavést jako **středové promítání** bodů roviny $\varrho = \mathbb{P}_2$ do **průmětny** $\pi = \mathbb{P}'_2$, přičemž střed kolineace S je totožný se **středem promítání** a osa kolineace o je průsečnicí obou rovin ($X' \in SX \cap \pi$; $\varrho \cap \pi = o$ a $S \notin \varrho, \pi$).

V kolineaci mezi dvěma rovinami odpovídá bodu jedné roviny bod druhé roviny, přímce odpovídá přímka a bodu na přímce odpovídá bod na přímce. Jestliže $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}'_2$, potom je evidentně každý bod samodružný a daná kolineace *identitou*. Platí:

Nesamodružné přímky, které si odpovídají v neidentické kolineaci mezi dvěma rovinami, se protínají na ose kolineace.

Budeme-li rozlišovat mezi vlastními a nevlastními prvky, je možné rozlišit několik příbuzností, které jsou speciálními případy kolineace mezi dvěma rovinami — *střed i osa kolineace* totiž mohou být jak vlastní, tak nevlastní. Zvláštními případy jsou:

- **osová afinita mezi rovinami** ϱ a π — je-li střed S nevlastní a osa o je vlastní;
- **posunutí** roviny ϱ do roviny π — je-li střed S nevlastní a osa o je nevlastní;
- **stejnolehlost mezi rovinami** ϱ a π — je-li střed S vlastní a osa o je nevlastní.

Poznamenejme opět, že název *středová kolineace mezi rovinami* se často používá pouze pro případ *vlastního středu a vlastní osy.*

Konkrétním příkladem středové kolineace s vlastním středem je vztah, který platí mezi dvěma různými rovinnými řezy *jehlanové*, resp. *kuželové plochy* — *osou kolineace* je průsečnice obou řezných rovin a *středem kolineace* je vrchol jehlanové, resp. kuželové plochy.

Mezi *středovou kolineací v rovině* a *středovou kolineací mezi dvěma různými rovinami* platí úzký vztah. Středovou kolineaci mezi dvěma rovinami $g : {}^1\mathbb{P}_2 \to {}^2\mathbb{P}_2$ (s osou o_g a středem S_g) zobrazíme do roviny $\mathbb{P}_2$ ve středovém promítání Π se středem O ($O \neq S_g$, $O \notin {}^1\mathbb{P}_2, {}^2\mathbb{P}_2$). Geometrická příbuznost f mezi body roviny $\mathbb{P}_2$ ($f : X \mapsto X'$, kde $X = \Pi(X_1)$, $X' = \Pi(X_2)$ a $X_2 = g(X_1)$), která vznikla průmětem středové kolineace g, je **středová kolineace v rovině** s osou o_f a středem S_f, přičemž $o_f = \Pi(o_g)$, $S_f = \Pi(S_g)$.

Kapitola 5

Kvadriky

5.1 Projektivní vlastnosti kvadrik

Uvažujme symetrickou bilineární formu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}, \tag{5.1}$$

jež je v jisté bázi určena *reálnou* nenulovou symetrickou maticí

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} \\ c_{01} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dále uvažujme korespondující kvadratickou formu

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x_i x_j, \tag{5.2}$$

pro kterou platí $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Definice 5.1.1.

Množinu $\mathcal{Q}$ všech bodů $\widetilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{P}_n^C$, pro něž platí $F(\mathbf{x}) = 0$, kde $F(\mathbf{x})$ je kvadratická forma (5.2), nazýváme **kvadrika**; v případě $n = 2$ se kvadrika nazývá **kuželosečka**.

Jelikož platí $F(\varrho\mathbf{x}) = \varrho^2 F(\mathbf{x})$, je zřejmé, že pokud je $F(\mathbf{x}) = 0$ pro jistý nenulový vektor $\mathbf{x}$, potom je $F(\varrho\mathbf{x}) = 0$ i pro každý nenulový násobek vektoru $\mathbf{x}$ — rovnice $F(\mathbf{x}) = 0$ tedy opravdu určuje množinu *bodů* $\widetilde{\mathbf{x}}$ projektivního prostoru.

Matici $\mathbf{C}$ budeme nazývat **maticí kvadriky** $\mathcal{Q}$ a její determinant $D = \det(\mathbf{C})$ **diskriminant kvadriky**. Hodnost matice $\mathbf{C}$ je tzv. **hodnost kvadriky**.

Věta 5.1.1. *Hodnost kvadriky nezávisí na volbě projektivní soustavy souřadnic.* □

Důkaz: Jsou-li původní souřadnice $\mathbf{x}$ a nové souřadnice $\mathbf{x}'$ svázány vztahem $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$, kde $\mathbf{A}$ je regulární matice, potom pro kvadriku $\mathcal{Q}$ můžeme psát

$$\mathcal{Q}:\ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x}')^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}') = \mathbf{x}'^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}\right) \cdot \mathbf{x}' = 0. \tag{5.3}$$

Vzhledem k regularitě matice $\mathbf{A}$ platí $\mathrm{hod}(\mathbf{C}) = \mathrm{hod}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A})$. □

Je-li matice $\mathbf{C}$ regulární ($\Leftrightarrow D \neq 0$), nazveme kvadriku $\mathcal{Q}$ **regulární kvadrika**, v opačném případě ($\Leftrightarrow D = 0$) hovoříme o **singulární kvadrice**.

Dále snadno nahlédneme, že dvě reálné nenulové kvadratické formy F a G určují tutéž kvadriku, právě když existuje $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ takové, že $G = k \cdot F$. To znamená, že rovnice kuželosečky $F(\mathbf{x}) = 0$ je dána až na nenulový násobek. Podíváme-li se na maticové vyjádření podrobněji, potom jednu kvadriku popisuje celá třída matic

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \{k \cdot \mathbf{C} :\ k \in \mathbb{R}, k \neq 0,\ \mathbf{C} = \mathbf{C}_{(n+1,n+1)} \text{ je symetrická}\},$$

a proto bychom maticové vyjádření měli přesněji zapisovat

$$F(\widetilde{\mathbf{x}}) = \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \widetilde{\mathbf{C}} \cdot \widetilde{\mathbf{x}} = 0. \tag{5.4}$$

Zdůrazněme ještě, že zatímco všechny koeficienty c_{ij} jsou reálné, souřadnice bodů X jsou komplexní, neboť se pohybujeme v komplexním rozšíření projektivního prostoru. Je-li $\mathcal{Q} \cap \mathbb{P}_n = \emptyset$ (tj. kvadrika neobsahuje žádný reálný bod), potom kvadriku $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}_n^C$ nazýváme **imaginární** (popř. **formálně reálná**).

Polární vlastnosti kvadrik.

DEFINICE 5.1.2.

Body $A, B \in \mathbb{P}_n^C$ jsou **polárně konjugované** (resp. **polárně sdružené**) vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$, jestliže platí

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Platí, že je-li bod A konjugovaný se dvěma různými body B, C, potom je konjugovaný i s každým bodem X přímky BC — vyjádříme-li přímku parametricky, tj. $\widetilde{\mathbf{x}} = \alpha\widetilde{\mathbf{b}} + \beta\widetilde{\mathbf{c}}$, potom je zřejmě

$$\mathbf{a} \cdot^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \cdot \big(\alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}\big) = \alpha \underbrace{\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}}_{=0} + \beta \underbrace{\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{c}}_{=0} = 0.$$

Obdobně, je-li bod A polárně konjugován s každým z $k+1$ lineárně nezávislých bodů $P_0, P_1, \ldots, P_k$, potom je polárně konjugován s každým bodem projektivního podprostoru $\mathbb{P}_k$, jenž je body $P_0, P_1, \ldots, P_k$ generován.

DEFINICE 5.1.3.

Bod Y nazveme **singulárním bodem kvadriky** $\mathcal{Q}$, je-li polárně sdružen se všemi body prostoru $\mathbb{P}_n^C$. Body kvadriky, které nejsou singulární, nazýváme **regulární**.

Jelikož singulární bod Y je konjugován se všemi body prostoru $\mathbb{P}_n^C$ včetně sebe sama (tj. platí $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{y} = 0$), je zřejmé $Y \in \mathcal{Q}$.

Z podmínky $\forall X \in \mathbb{P}_n^C$: $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{y} = 0$ dostaneme homogenní soustavu rovnic $\mathbf{C} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{o}$, tj.

$$\begin{aligned} c_{00}y_0 + c_{01}y_1 + \ldots + c_{0n}y_n &= 0 \\ &\vdots \\ c_{0n}y_0 + c_{1n}y_1 + \ldots + c_{nn}y_n &= 0 \end{aligned}, \tag{5.5}$$

kterou musejí souřadnice singulárního bodu Y splňovat. Zdůrazněme, že přiřazení $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}$, kde Y je singulární bod kvadriky, není zobrazením bodu na nadrovinu (srovnej dále se situací u regulárních bodů)!

Diskutujeme-li počet řešení soustavy (5.5), pak snadno nahlédneme, že *regulární kvadrika* nemá singulární body a *singulární kvadrika* hodnosti h ($h = 1, 2, \ldots, n$) má reálný podprostor singulárních bodů dimenze $n - h$.

Věta 5.1.2. *Buď P singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$. Dále nechť $Q \in \mathcal{Q}$, $Q \neq P$. Potom $PQ \subset \mathcal{Q}$.* □

Důkaz: Přímka $p = \leftrightarrow PQ$ má parametrické vyjádření $\widetilde{\mathbf{x}} = \alpha\widetilde{\mathbf{p}} + \beta\widetilde{\mathbf{q}}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Potom pro libovolný bod $X \in p$ můžeme psát

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q})^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}\cdot(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q}) = \alpha^2\underbrace{\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{p}}_{=0}+2\alpha\beta\underbrace{\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{q}}_{=0}+\beta^2\underbrace{\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{q}}_{=0} = 0.$$

Pro libovolné α, β je tedy $X \in \mathcal{Q}$, tj. $p \subset \mathcal{Q}$. □

DEFINICE 5.1.4.

Nechť P není singulárním bodem kvadriky $\mathcal{Q}$. Nadrovinu všech bodů konjugovaných s bodem P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme **polární nadrovina** bodu P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$. Bod P nazýváme **pól** příslušné polární nadroviny vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

Je zřejmé, že polární nadrovina bodu P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ má vyjádření

$$\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = \big(p_0, p_1, \ldots, p_n\big)\cdot\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \ldots & c_{0n} \\ c_{01} & c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \tag{5.6}$$

resp. po úpravě

$$(c_{00}p_0+c_{01}p_1+\ldots+c_{0n}p_n)x_0+\ldots+(c_{0n}p_0+c_{1n}p_1+\ldots+c_{nn}p_n)x_n = 0. \tag{5.7}$$

Věta 5.1.3. (O VZÁJEMNOSTI PÓLU A POLÁRNÍ NADROVINY) *Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika a P, Q jsou dva nesingulární body. Leží-li bod Q v polární nadrovině bodu P, potom bod P leží v polární nadrovině bodu Q.* □

Důkaz: Rovnice polární nadroviny π_P bodu P je $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{x} = 0$, a tedy $Q \in \pi_P \Leftrightarrow \mathbf{p}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{q} = 0$. Ze symetrie matice $\mathbf{C}$ plyne $\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{p} = 0$, což značí, že bod P leží v polární nadrovině bodu Q. □

Věta 5.1.4. *Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika a π je reálná nadrovina v $\mathbb{P}_n^C$. Potom buď $\pi \subset \mathcal{Q}$, anebo $\mathcal{Q} \cap \pi = \mathcal{Q}_0$ je kvadrika v π.* □

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit projektivní soustavu souřadnic tak, že $\pi : x_n = 0$. Souřadnice bodů průniku $\mathcal{Q} \cap \pi$ potom splňují rovnici

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} c_{ij} x_i x_j = 0, \ \ x_n = 0.$$

Jestliže $\forall i, j$ platí $c_{ij} = 0$, potom zřejmě $\pi \subset \mathcal{Q}$. Jestliže $\exists c_{ij} \neq 0$, potom kvadratická rovnice $\sum_{i,j=0}^{n-1} c_{ij} x_i x_j = 0$ popisuje kvadriku hodnosti $\leqq n$ v nadrovině π. □

Věta 5.1.5. *Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika. Buď P bod nenáležející této kvadrice a π příslušná polární nadrovina. Potom kvadrika $\mathcal{Q}$ je samodružná vzhledem k involutorní perspektivní kolineaci se středem P a osou π.* □

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme zvolit projektivní soustavu souřadnic tak, že $\mathbf{p} = (1, 0, 0, \dots, 0)$ a $\pi : x_0 = 0$. Jelikož π je polární nadrovina bodu P, potom souřadnice π lze určit ze vztahu $\mathbf{C} \cdot (1, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$. Odtud plyne $(c_{00}, c_{01}, \dots, c_{0n}) = \lambda(1, 0, \dots, 0)$.

Involutorní perspektivní kolineace f se středem P a osou π je dána maticí $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(1, -1, \dots, -1)$.

Nyní již snadno nahlédneme, že $\mathcal{Q}$ je vůči f invariantní, neboť $X \in \mathcal{Q}$ (tj. $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$) implikuje $X' = f(X) \in \mathcal{Q}$. Pro $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ a $\mathbf{C}$ jsou matice výše uvedeného tvaru, totiž platí

$$\mathbf{x}'^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}. \qquad \square$$

Tečna a tečná nadrovina kvadriky. Následující definice je motivována zavedením tečny jako přímky, která je limitním případem sečny PQ s body $P, Q \in \mathcal{Q}$, jenž se k sobě neomezeně blíží.

DEFINICE 5.1.5.

Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika a t je přímka, která není přímkou singulárních bodů kvadriky $\mathcal{Q}$. Říkáme, že t je **tečnou** kvadriky $\mathcal{Q}$, jestliže buď $t \subset \mathcal{Q}$, anebo $t \cap \mathcal{Q}$ je dvojnásobný regulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$, který nazýváme **bod dotyku**.

Zdůrazněme jen, že tečny definujeme pro kvadriky hodnosti větší než jedna.

Věta 5.1.6. *Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika a T její regulární bod. Potom všechny tečny kvadriky $\mathcal{Q}$ s bodem dotyku T leží v polární nadrovině bodu T. Naopak, všechny přímky procházející bodem T a ležící v polární nadrovině bodu T jsou tečnami kvadriky $\mathcal{Q}$ s bodem dotyku T.* □

Důkaz: Nechť t je libovolná tečna kvadriky $\mathcal{Q}$ s bodem dotyku T. Jelikož $T \in \mathcal{Q}$, potom je $\mathbf{t}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} = 0$. Dále nechť $R \in t$, $R \neq T$ je libovolný bod. Přímka t má potom parametrické vyjádření $\widetilde{\mathbf{x}} = \alpha\widetilde{\mathbf{t}} + \beta\widetilde{\mathbf{r}}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Bod X je průsečíkem $t \cap \mathcal{Q}$, právě když

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{r})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot (\alpha\mathbf{t} + \beta\mathbf{r}) = \alpha^2\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{t} + 2\alpha\beta\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} + \beta^2\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = 0,$$

tj. úpravě

$$2\alpha\beta\big(\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r}\big) + \beta^2\big(\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r}\big) = 0. \tag{5.8}$$

Z definice 5.1.5 plyne, že rovnice (5.8) je buďto splněna identicky ($t \subset \mathcal{Q}$), anebo je T dvojnásobný průsečík. V prvním případě musí být $\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = 0$; v druhém případě pak $\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = 0 \neq \mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r}$. V obou případech je $\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = 0$, což značí, že body T a R jsou polárně sdruženy. Bod R a tedy i celá přímka $\leftrightarrow TR$ náleží polární nadrovině π_T bodu T.

Naopak nechť $t = \leftrightarrow TR$ je přímka ležící v polární nadrovině π_T bodu T vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$. Protože $R \in \pi_T$, je $\mathbf{t}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = 0$. Rovnice pro hledání společných bodů $t \cap \mathcal{Q}$ se v tomto případě zjednoduší na tvar

$$\beta^2\big(\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r}\big) = 0. \tag{5.9}$$

Pro $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} = 0$ je výše uvedená rovnice splněna identicky, tj. $t \subset \mathcal{Q}$.

Pro $\mathbf{r}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{r} \neq 0$ má rovnice dvojnásobný kořen $\beta = 0$, a tedy T je dvojnásobný průsečík přímky t a kvadriky $\mathcal{Q}$. V obou případech je podle definice 5.1.5 přímka t tečnou kvadriky s bodem dotyku T. □

Výše uvedená věta nás opravňuje vyslovit definici tečné nadroviny kvadriky následujícím způsobem:

DEFINICE 5.1.6.

Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika a T je její regulární bod. Polární nadrovinu τ bodu T vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ nazýváme **tečnou nadrovinou** kvadriky $\mathcal{Q}$ a bod T nazýváme **bod dotyku** nadroviny τ a kvadriky $\mathcal{Q}$.

Vyjádření tečné nadroviny v bodě $T \in \mathcal{Q}$ koresponduje samozřejmě s vyjádřením (5.6), popř. (5.7). Pro hledání tečné nadroviny z bodu $P \notin \mathcal{Q}$ lze použít následující větu.

Věta 5.1.7. *Tečné nadroviny vedené ke kvadrice $\mathcal{Q}$ z bodu $P \notin \mathcal{Q}$ se jí dotýkají v bodech, v nichž kvadriku $\mathcal{Q}$ protíná polární nadrovina bodu P vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.* □

Důkaz: Tato věta je přímým důsledkem věty 5.1.3. □

Spojnice bodu $P \notin \mathcal{Q}$ s dotykovým bodem některé tečné roviny vedené tímto bodem ke kvadrice $\mathcal{Q}$ je tečna kvadriky procházející bodem P. Všechny dotykové body náležejí podle předcházející věty průniku kvadriky $\mathcal{Q}$ a polární nadroviny π_P bodu $P \notin \mathcal{Q}$ — a to je podle věty 5.1.4 kvadrika $\mathcal{Q}_0$ v rovině π_P. Je-li kvadrika $\mathcal{Q}_0$ regulární, potom všechny tečny vedené z bodu P ke kvadrice $\mathcal{Q}$ vytvářejí tzv. **tečnou kuželovou plochu** — bod P se nazývá vrchol a kvadrika $\mathcal{Q}_0$ se nazývá tvořící kvadrika kuželové plochy.

5.2 Projektivní klasifikace kvadrik

Projektivní transformace a kvadrika. Jestliže na kvadriku $\mathcal{Q}: \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$ aplikujeme projektivní transformaci $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, potom pro obraz $\mathcal{Q}'$ dostaneme

$$\mathcal{Q}': \ \mathbf{y}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbf{A}^{-\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right) \cdot \mathbf{y} = 0, \tag{5.10}$$

což je vzhledem k regularitě matice $\mathbf{A}$ opět kvadrika, a to téže hodnosti jako kvadrika $\mathcal{Q}$.

Jedná se o obdobný výsledek, k němuž jsme dospěli v případě změny projektivní soustavy souřadnic.

Polární simplex. Ukážeme, že vždy existuje vhodná projektivní soustava souřadnic, v níž má kvadrika rovnici bez smíšených kvadratických členů.

DEFINICE 5.2.1.

Nechť $\mathcal{Q} \in \mathbb{P}_n^C$ je kvadrika a $P_0, P_1, \dots, P_n$ jsou projektivně nezávislé body takové, že pro každé $i, j \in \{0, \dots, n\}$ $(i \neq j)$ jsou body P_i a P_j polárně sdružené. (n+1)-tice $P_0, P_1, \dots, P_n$ se potom nazývá **polární simplex** kvadriky $\mathcal{Q}$. Jestliže $n = 2$, potom polární simplex nazýváme **polární trojúhelník** kuželosečky.

Jsou-li $P_0, P_1, \ldots, P_n$ nesingulární body kvadriky $\mathcal{Q}$, potom pro každé $i \in \{0, \ldots, n\}$ náležejí všechny body P_j $(j \neq i)$ polární nadrovině bodu P_i (polární nadrovina bodu P_i je tedy body P_j jednoznačně určena).

Nechť je dána projektivní soustava souřadnic $(E_0, \ldots, E_n; J)$ taková, že $(n+1)$-tice $E_0, E_1, \ldots, E_n$ představuje polární simplex kvadriky $\mathcal{Q}$. Je-li $\mathbf{C}$ matice kuželosečky $\mathcal{Q}$, jež je vztažena k uvedenému souřadnému systému, potom platí

$$0 = \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_j = c_{ij}, \qquad i \neq j.$$

Odtud plyne, že matice $\mathbf{C}$ je diagonální a kvadrika $\mathcal{Q}$ je popsána rovnicí

$$c_{00}x_0^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2 = 0, \quad \exists c_{ii} \neq 0. \tag{5.11}$$

Naopak, nabývá-li rovnice kvadriky tvaru (5.11), potom jsou základní body projektivní soustavy souřadnic polárním simplexem kvadriky $\mathcal{Q}$.

Věta 5.2.1. *Ke každé kvadrice lze nalézt polární simplex.* □

Důkaz: Každou symetrickou matici $\mathbf{C}$ lze transformovat na diagonální matici pomocí vhodné posloupnosti řádkových operací, jež jsou následovány analogickými sloupcovými operacemi. Tyto řádkové a sloupcové operace mají na matici $\mathbf{C}$ stejný efekt jako vynásobení matice $\mathbf{C}$ vhodnou maticí $\mathbf{B}$ zprava a odpovídající maticí $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ zleva. Rovnice (5.10) ukazuje, že tímto způsobem získáváme transformaci projektivní soustavy souřadnic ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x}'$ takovou, že vůči nové souřadné soustavě je kvadrika popsána diagonální maticí $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{B}$. □

Je zřejmé, že rovnici (5.11) můžeme ještě dále zjednodušit

Věta 5.2.2. *Ke každé kvadrice existuje taková projektivní soustava souřadnic, že kvadrika je popsána rovnici*

$$\varepsilon_0 x_0^2 + \ldots + \varepsilon_n x_n^2 = 0, \quad \varepsilon_i \in \{0, \pm 1\} \ \wedge \ \exists \varepsilon_i \neq 0. \tag{5.12}$$

Důkaz: Vyjdeme z rovnice (5.11) a za předpokladu $c_{ii} \neq 0$ použijeme transformaci souřadnic $x_i = x_i'/\sqrt{|c_{ii}|}$. □

Rovnice (5.12) se nazývá **normální rovnice kvadriky**.

Předpokládejme, že všechna $\varepsilon_i \neq 0$ mají stejné znaménko — potom je kvadrika imaginární. Označme p počet kladných znamének a q počet záporných znamének ($p + q \leqq n + 1$). Vždy můžeme zajistit (vhodné uspořádání, případně vynásobení -1), že kladné členy předcházejí záporným a navíc je $q \leqq p$. Rovnici (5.12) je tedy možné uvést na tvar

$$x_0^2 + \ldots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \ldots - x_{p+q-1}^2 = 0, \quad q \leqq p,\ p+q \leqq n+1 \quad (5.13)$$

Podprostor maximální dimenze, který je součástí kvadriky, nazýváme **tvořící podprostor kvadriky**. O problematice reálných tvořících podprostorů hovoří následující věta.

Věta 5.2.3. *Nechť $\mathcal{Q}$ je kvadrika popsaná rovnicí (5.13). Potom*

(i) $p - 1$ *je největší číslo takové, že existuje* reálný $(p-1)$*-rozměrný podprostor $\mathcal{F}$, který nemá s $\mathcal{Q}$ žádný reálný bod.*

(ii) $n - p$ *je největší číslo takové, že existuje* reálný $(n-p)$*-rozměrný podprostor $\mathcal{G}$, který je částí $\mathcal{Q}$.* □

Důkaz: Nejprve dokážeme existenci podprostorů s výše uvedenými vlastnostmi.

(i) Uvažujme reálný podprostor $\mathcal{F}$ popsaný obecnými rovnicemi $x_p = 0, \ldots, x_n = 0$, jehož dimenze je $\dim(\mathcal{F}) = p - 1$. Vzhledem k tomu, že $\mathcal{Q} \cap \mathcal{F}:\ x_0^2 + \ldots + x_{p-1}^2 = 0, \quad x_p = 0, \ldots, x_n = 0$ neobsahuje zřejmě žádný reálný bod, dokázali jsme existenci hledaného podprostoru.

(ii) Rovnici (5.13) můžeme přepsat na tvar $(x_0 - x_p)(x_0 + x_p) + \ldots + (x_{q-1} - x_{p+q-1})(x_{q-1} + x_{p+q-1}) + x_q^2 + \ldots + x_{p-1}^2 = 0$. Pro reálný podprostor $\mathcal{G}$, který je určen rovnicemi

$$x_0 - x_p = \cdots = x_{q-1} - x_{p+q-1} = 0, \quad x_q = \cdots = x_{p-1} = 0$$

a jehož dimenze je $\dim(\mathcal{G}) = n - p$, zřejmě platí $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}$.

Maximálnost dimenzí:

(i) Nechť $\mathcal{F}'$ je reálný podprostor takový, že $\dim(\mathcal{F}') \geqq p$. Ze vztahu

$$\dim(\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}) + \underbrace{\dim(\mathcal{F}' \vee \mathcal{G})}_{\leqq n} = \underbrace{\dim(\mathcal{F}')}_{\geqq p} + \underbrace{\dim(\mathcal{G})}_{=n-p}$$

potom plyne $\dim(\mathcal{F}' \cap \mathcal{G}) \geqq 0$. Protože $\mathcal{G} \subset \mathcal{Q}$, obsahuje $\mathcal{F}' \cap \mathcal{Q}$ reálný podprostor dimenze $\geqq 0$, tj. alespoň reálný bod, a tedy $(p-1)$ je maximální dimenze hledaných podprostorů.

(ii) Nechť $\mathcal{G}'$ je reálný podprostor takový, že $\dim(\mathcal{G}') \geqq n-p+1$. Ze vztahu

$$\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}') + \underbrace{\dim(\mathcal{F} \vee \mathcal{G}')}_{\leqq n} = \underbrace{\dim(\mathcal{F})}_{=p-1} + \underbrace{\dim(\mathcal{G}')}_{\geqq n-p+1}$$

potom plyne $\dim(\mathcal{F} \cap \mathcal{G}') \geqq 0$, tj. $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}'$ obsahuje alespoň jeden reálný bod. Protože ale $\mathcal{F}$ nemá s kvadrikou $\mathcal{Q}$ žádný společný reálný bod, nemůže být $\mathcal{G}'$ podmnožinou $\mathcal{Q}$, a tedy $(n-p)$ je maximální dimenze hledaných podprostorů. □

Projektivní klasifikace kuželoseček. V rovině $\mathbb{P}_2^C$ má kuželosečka právě jednu z následujících normálních rovnic:

(Pk1) $\quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0,$

(Pk2) $\quad x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0,$

(Pk3) $\quad x_0^2 + x_1^2 = 0,$

(Pk4) $\quad x_0^2 - x_1^2 = 0,$

(Pk5) $\quad x_0^2 = 0.$

Kuželosečka typu (Pk1) je regulární kuželosečka, jež neobsahuje žádný reálný bod — jedná se tedy o kuželosečku imaginární. (Pk2) určuje reálnou regulární kuželosečku. (Pk3) a (Pk4) určují singulární kuželosečky hodnosti 2, které jsou tvořeny dvojicí tvořících přímek — pro (Pk3) jsou imaginární komplexně sdružené a pro (Pk4) reálné. (Pk3) obsahuje jediný reálný bod, a to průsečík komplexně sdružených tvořících přímek. (Pk5) je singulární kuželosečka hodnosti 1, jež je tvořena jedinou (reálnou) dvojnásobnou přímkou.

Zdůrazněme ještě, že je nutné striktně rozlišovat mezi projektivní klasifikací a klasifikací afinní (viz kap. 5.4). V projektivní geometrii např. existuje jediná(!) reálná regulární kuželosečka — typ (Pk2). Běžné dělení regulárních kuželoseček na elipsu, parabolu a hyperbolu není provedeno z projektivního hlediska.

Projektivní klasifikace kvadrik v $\mathbb{P}_3$. V prostoru $\mathbb{P}_3^C$ má kvadrika právě jednu z následujících normálních rovnic:

(PK1) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$

(PK2) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$

(PK3) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0,$

(PK4) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0,$

(PK5) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0,$

(PK6) $x_0^2 + x_1^2 = 0,$

(PK7) $x_0^2 - x_1^2 = 0,$

(PK8) $x_0^2 = 0.$

Kvadrika typu (PK1) je regulární imaginární kvadrika. Kvadrika s rovnicí (PK2) je regulární kvadrika, která podle věty 5.2.3 obsahuje jako reálné tvořící podprostory pouze body — budeme ji označovat jako *regulární nepřímková kvadrika.* Rovnice (PK3) popisuje regulární kvadriku, která podle věty 5.2.3 obsahuje reálné tvořící přímky, a proto ji budeme nazývat *regulární přímková kvadrika.*

Kvadriky (PK4) a (PK5) jsou singulární kvadriky hodnosti 3 a jedná se o *kuželové plochy.* Přitom pro (PK4) obsahuje tato kvadrika podle věty 5.2.3 jediný reálný bod (a to *vrchol*), všechny ostatní body jsou imaginární; proto se nazývá *imaginární kuželová plocha.* (PK5) obsahuje podle věty 5.2.3 reálné tvořící přímky a jedná se tedy o *reálnou kuželovou plochu.*

(PK6) a (PK7) určují singulární kvadriky hodnosti 2, které jsou tvořeny dvojicí tvořících rovin — pro (PK6) jsou imaginární komplexně sdružené a pro (PK7) reálné. (PK6) obsahuje přímku reálných bodů, a to průsečnici komplexně sdružených tvořících rovin.

(PK8) je singulární kvadrika hodnosti 1, jež je tvořena jedinou (reálnou) dvojnásobnou rovinou.

5.3 Afinní vlastnosti kvadrik

Připomeňme nejprve, že vynecháním jedné nadroviny projektivního prostoru dostaneme *prostor afinní.* Projektivní prostor s vyznačenou pevnou nadrovinou (tzv. *nevlastní nadrovinou*) se nazývá *rozšířený afinní prostor.* V této části uvažujeme $\mathbb{A}_n$ reálný afinní prostor, $\mathbb{A}_n^C$ jeho komplexní rozšíření a $\overline{\mathbb{A}_n^C}$ projektivní rozšíření $\mathbb{A}_n^C$. Zdůrazněme ještě, že nevlastní body prostoru $\overline{\mathbb{A}_n}$ ztotožňujeme se směry prostoru $\mathbb{A}_n$. Budeme vždy předpokládat, že nevlastní nadrovina je popsána rovnicí $x_0 = 0$.

Kvadriku $\mathcal{Q}$ lze v $\overline{\mathbb{A}_n^C}$ samozřejmě popsat rovnicí (5.2), tj.

$$\mathcal{Q}: \ (x_0 \ x_1 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} \\ c_{01} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Dále víme, že má-li bod $X \in \mathbb{A}_n^C$ nehomogenní souřadnice $[\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n]$, potom má homogenní souřadnice $(1, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$. Tím můžeme přejít k rovnici

$$\mathcal{Q}: \ (1 \ \overline{x}_1 \ \dots \ \overline{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \dots & c_{0n} \\ c_{01} & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{0n} & c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = 0, \tag{5.14}$$

jež ovšem popisuje jen vlastní body kvadriky $\mathcal{Q}$. Pokud tedy pracujeme s nevlastními body, je nutné použít rovnici (5.2).

Při přechodu od homogenních souřadnic k nehomogenním podle vztahu

$$\overline{x}_i = \frac{x_i}{x_0}, \qquad x_0 \neq 0$$

přechází rovnice

$$\mathcal{Q}: \ \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x_i x_j = 0$$

na tvar

$$\mathcal{Q}: \ \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \overline{x}_i \overline{x}_j + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{x}_i + c_{00} = 0. \tag{5.15}$$

Rovnici (5.15) můžeme rovněž zkráceně psát maticově

$$\mathcal{Q}: \ \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \overline{\mathbf{x}} + 2\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}} + c_{00} = 0, \tag{5.16}$$

kde

$$\overline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{01} \\ \vdots \\ c_{0n} \end{pmatrix}.$$

Zřejmě platí

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{00} & \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{c} & \overline{\mathbf{C}} \end{pmatrix}.$$

V praxi se setkáváme především s kvadrikami, jejichž rovnice jsou zadány v nehomogenních souřadnicích. Takto se však nedají zadat kvadriky, jejichž součástí je nevlastní nadrovina prostoru $\overline{\mathbb{A}_n^C}$; tj. tyto kvadriky nelze popsat rovnicemi (5.14), (5.15) a (5.16). Zmiňovaný případ nastává, právě když

$$\mathcal{Q}: \sum_{i,j=0}^{n} c_{ij} x_i x_j = x_0 \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} c_{0j} x_j \right) = 0, \tag{5.17}$$

tj. právě když $c_{ij} = 0$ pro $i, j > 0$ (kdybychom se v rovnici (5.17) omezili jen na body prostoru $\mathbb{A}_n^C$, potom bychom dostali nadrovinu). Předpokládáme-li tedy, že kvadrika nemá za svoji součást nevlastní nadrovinu, potom to v souřadnicovém vyjádření znamená, že matice $\overline{\mathbf{C}}$ v rovnici (5.16) je *nenulová*!

Střed a průměrové nadroviny kvadriky. Při studiu vztahu polárně sdružených bodů v $\overline{\mathbb{A}_n^C}$ se nyní zaměříme speciálně na nevlastní body. Nevlastní bod U_∞ ztotožníme se směrem $\langle \vec{u} \rangle$ a nevlastní bod V_∞ ztotožníme se směrem $\langle \vec{v} \rangle$. Jsou-li body U_∞ a V_∞ polárně sdružené vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$, potom hovoříme o **polárně sdružených směrech** $\langle \vec{u} \rangle$, $\langle \vec{v} \rangle$ vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

Obdobně můžeme v $\overline{\mathbb{A}_n^C}$ studovat i vztah mezi vlastním pólem a nevlastní nadrovinou, resp. nevlastním pólem a vlastní nadrovinou vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$.

DEFINICE 5.3.1.

Bod S nazveme **středem** kvadriky $\mathcal{Q}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{Q}$ polárně sdružen se všemi nevlastními body.

Z definice plyne, že každý singulární bod kvadriky $\mathcal{Q}$ je jejím středem. Střed, který není singulárním bodem, má za svou polární nadrovinu nevlastní nadrovinu.

Věta 5.3.1. *Nechť je dána kvadrika* $\mathcal{Q}: \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$. *Bod* S *je středem kvadriky* $\mathcal{Q}$, *právě když jeho souřadnice splňují soustavu*

$$\begin{aligned} c_{01}s_0 + c_{11}s_1 + \ldots + c_{1n}s_n &= 0 \\ &\vdots \quad , \\ c_{0n}s_0 + c_{1n}s_1 + \ldots + c_{nn}s_n &= 0 \end{aligned} \tag{5.18}$$

kterou můžeme psát maticově ve tvaru $\overline{\mathbf{C}} \cdot (s_1, \ldots, s_n)^{\mathrm{T}} + \mathbf{c} \cdot s_0 = \mathbf{o}$. □

Důkaz: ($\Rightarrow$) Je-li bod S středem kvadriky $\mathcal{Q}$, potom je konjugován se všemi nevlastními body, tj. i s nevlastními body $X_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, jež mají na i-tém místě jedničku a jinak samé nuly, $i = 1, 2, \ldots, n$. Z podmínky $f(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}) = 0$ (polárně sdružené body) dostáváme výše uvedených n rovnic soustavy (5.18)

$$c_{0i}s_0 + \ldots c_{ii}s_i + \ldots + c_{in}s_n = 0.$$

($\Leftarrow$) Nechť naopak souřadnice bodu S splňují soustavu (5.18). Platí-li navíc $c_{00}s_0 + \ldots c_{0i}s_i + \ldots + c_{0n}s_n = 0$, potom od soustavy (5.18) přejdeme k soustavě (5.5) a S je singulární bod, a tedy střed. Je-li $c_{00}s_0 + \ldots c_{0i}s_i + \ldots + c_{0n}s_n \neq 0$, potom polární nadrovina bodu S má obecnou rovnici

$$(c_{00}s_0 + \ldots c_{0i}s_i + \ldots + c_{0n}s_n)x_0 = 0$$

a to je rovnice nevlastní nadroviny. Tedy S je polárně sdružen se všemi nevlastními body, tj. jde o střed. □

Soustava (5.18) n rovnic o $n + 1$ neznámých má vždy nenulové řešení. Podle počtu řešení soustavy (5.18), může mít kvadrika právě jeden střed, přímku středů,..., nadrovinu středů nebo každý bod je středem. Poslední případ nastává, právě když je kvadrika tvořena dvojnásobnou nevlastní nadrovinou.

Přepsáním soustavy (5.18) do nehomogenních souřadnic dostaneme soustavu

$$\overline{\mathbf{C}} \cdot \overline{\mathbf{s}}^{\mathrm{T}} + \mathbf{c} = \mathbf{o}, \tag{5.19}$$

jež nemusí mít řešení, tj. kvadrika $\mathcal{Q}$ nemusí mít vlastní střed.

DEFINICE 5.3.2.

Kvadrika, jež má alespoň jeden vlastní střed, se nazývá **středová kvadrika**. V opačném případě hovoříme o **nestředové kvadrice**.

Věta 5.3.2. *Je-li $\mathcal{Q}$ středová kvadrika, potom je středově souměrná podle každého vlastního středu.* □

Důkaz: Je-li S regulární bod, potom je tato věta přímým důsledkem věty 5.1.5 — involutorní perspektivní kolineace s nevlastní osou a vlastním středem je totiž středová souměrnost. Je-li S singulární bod, potom dokazované tvrzení plyne z věty 5.1.2 a ze skutečnosti, že přímka je středově souměrný útvar. □

Z rovnice (5.19) snadno nahlédneme, že platí následující dvě věty:

Věta 5.3.3. *Kvadrika $\mathcal{Q}$ je středová, právě když* $\operatorname{hod}(\overline{\mathbf{C}}) = \operatorname{hod}(\overline{\mathbf{C}}, \mathbf{c})$*; speciálně má právě jeden vlastní střed, právě když* $\Delta = \det(\overline{\mathbf{C}}) \neq 0$. □

Věta 5.3.4. *Regulární kvadrika $\mathcal{Q}$ je středová, právě když $\Delta \neq 0$.* □

DEFINICE 5.3.3.

Nechť U_∞ je nevlastní bod, jenž není bodem kvadriky $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathbb{A}_n^C}$. Polární nadrovinu bodu U_∞ budeme nazývat **průměrová nadrovina** kvadriky $\mathcal{Q}$ sdružená s nevlastním bodem U_∞ (resp. směrem $\langle \vec{u} \rangle$). Jestliže $n = 2$, potom se průměrová nadrovina nazývá **průměr** kuželosečky. Průměry, z nichž každý je sdružený se směrem druhého nazýváme **sdružené průměry** kuželosečky.

Věta 5.3.5. *Je-li rovina průměrovou nadrovinou kvadriky $\mathcal{Q}$, potom obsahuje všechny její středy.* □

Důkaz: Tato věta je přímým důsledkem věty 5.1.3. □

Věta 5.3.6. *Je-li nevlastní bod $U_\infty \notin \mathcal{Q}$ určen nenulovým vektorem* $\mathbf{u}$*, potom se kvadrika $\mathcal{Q}$ reprodukuje v involutorní osové afinitě, jejíž osou je průměrová nadrovina sdružená s bodem U_∞ a směr afinity je dán vektorem* $\mathbf{u}$. □

Důkaz: Podle věty 5.1.5 se kvadrika reprodukuje v involutorní středové kolineaci, jejíž osou je *vlastní* průměrová nadrovina a středem je *nevlastní* bod U_∞ — jde tedy o involutorní osovou afinitu. □

Asymptotické nadroviny kvadriky. V projektivním prostoru nerozlišujeme mezi vlastními a nevlastními body, a proto nebylo nutné nějak vymezovat tečné nadroviny v nevlastních bodech. V prostoru $\overline{\mathbb{A}_n^C}$ zavádíme pro tyto nadroviny tradičně speciální označení.

DEFINICE 5.3.4.

> Nevlastní bod (tj. směr) kvadriky $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathbb{A}_n^C}$ se nazývá **asymptotický směr** kvadriky $\mathcal{Q}$. Vlastní tečná nadrovina kvadriky $\mathcal{Q}$ s nevlastním bodem dotyku se nazývá **asymptotická nadrovina** kvadriky $\mathcal{Q}$. Jestliže $n = 2$, potom se asymptotická nadrovina nazývá **asymptota** kuželosečky.

Věta 5.3.7. *Je-li rovina asymptotickou nadrovinou kvadriky $\mathcal{Q}$, potom obsahuje všechny její středy.* $\square$

Důkaz: Tato věta je přímým důsledkem věty 5.1.3. $\square$

Jak víme, všechny dotykové body tečen vedených z bodu $P \notin \mathcal{Q}$ ke kvadrice $\mathcal{Q}$ náležejí průniku kvadriky $\mathcal{Q}$ a polární nadroviny π_P bodu $P \notin \mathcal{Q}$ — a to je podle věty 5.1.4 kvadrika $\mathcal{Q}_0$ v rovině π_P. V případě, že $P = S$ je vlastní střed kvadriky $\mathcal{Q}$, potom jeho polární nadrovina je nevlastní nadrovina π_∞. Je-li absolutní kvadrika $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty$ regulární, potom všechny tečny vedené ze středu S ke kvadrice $\mathcal{Q}$ vytvářejí tzv. **asymptotickou kuželovou plochu** kvadriky $\mathcal{Q}$.

5.4 Afinní klasifikace kvadrik

Pro první rozdělení kvadrik uvažujeme jejich polohu vzhledem k nevlastní nadrovině.

DEFINICE 5.4.1.

> Nechť $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathbb{A}_n^C}$ $(n \geqq 2)$ je kvadrika, která má s nevlastní nadrovinou společnou kvadriku $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty$. Je-li $\mathcal{Q}_0$ imaginární regulární kvadrika, potom $\mathcal{Q}$ nazýváme kvadrika **eliptického typu**; je-li $\mathcal{Q}_0$ reálná regulární kvadrika, potom $\mathcal{Q}$ nazýváme kvadrika **hyperbolického typu**; je-li $\mathcal{Q}_0$ singulární kvadrika, potom $\mathcal{Q}$ nazýváme kvadrika **parabolického typu**.

Výše uvedená definice nepostihuje speciální případ, kdy kvadrika $\mathcal{Q}$ obsahuje nevlastní nadrovinu, tj. $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q} \cap \pi_\infty = \pi_\infty$.

Zastavme se speciálně v rovině $\overline{\mathbb{A}_2^C}$. Kuželosečku zařadíme podle výše uvedené definice do hyperbolického, resp. parabolického, resp. eliptického typu, právě když protíná nevlastní přímku ve dvou různých reálných, resp. ve dvou splývajících reálných, resp. ve dvou komplexně sdružených imaginárních bodech. Jinými slovy — kuželosečka eliptického typu nemá žádný reálný(!) asymptotický směr, kuželosečka parabolického typu má právě jeden a kuželosečka hyperbolického typu má dva různé reálné asymptotické směry. Dosazením $x_0 = 0$ do (5.2) dostaneme rovnici pro hledání asymptotických směrů kuželosečky

$$c_{11}x_1^2 + 2c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 = 0 \tag{5.20}$$

a snadno se diskuzí diskriminantu této kvadratické rovnice přesvědčíme, že pro

$$\Delta = \det(\overline{\mathbf{C}}) = \begin{vmatrix} c_{00} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} > 0, \\ = 0, \\ < 0 \end{matrix} \quad \text{jde o kuželosečku} \quad \begin{matrix} \text{eliptického,} \\ \text{parabolického,} \\ \text{hyperbolického} \end{matrix} \quad \text{typu.}$$

Pro další úvahy je důležitá následující věta, jejíž význam je obdobný jako v případě projektivní klasifikace význam věty o existenci polárního simplexu.

Věta 5.4.1. *Ke každé kvadrice $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathbb{A}_n^C}$ existuje n lineárně nezávislých nevlastních bodů (tj. směrů), které jsou navzájem polárně sdruženy vzhledem ke $\mathcal{Q}$.* □

Důkaz: Provedeme konstrukční důkaz, který popisuje, jak danou n-tici nalézt. Tento důkaz má *nejvýše n* kroků.

1. `krok` (+) Jestliže $\pi_\infty \subset \mathcal{Q}$, potom libovolná n-tice lineárně nezávislých nevlastních bodů $E_1, \ldots, E_n$ splňuje podmínku věty.

   (−) Nechť naopak $\pi_\infty \not\subset \mathcal{Q}$. Potom existuje nevlastní bod $E_1 \in \pi_\infty$, který nenáleží $\mathcal{Q}$. Označme ω_1 jeho polární nadrovinu.

2. `krok` (+) Jestliže $\omega_1 \cap \pi_\infty \subset \mathcal{Q}$, potom libovolná $(n-1)$-tice lineárně nezávislých nevlastních bodů $E_2, \ldots, E_n$ náležejících prostoru $\omega_1 \cap \pi_\infty$ doplněná o bod E_1 splňuje podmínku věty.

   (−) Nechť naopak $\omega_1 \cap \pi_\infty \not\subset \mathcal{Q}$. Potom existuje nevlastní bod $E_2 \in \omega_1 \cap \pi_\infty$, který nenáleží $\mathcal{Q}$. Označme ω_2 jeho polární nadrovinu.

`3. krok` (+) Jestliže $\omega_2 \cap \omega_1 \cap \pi_\infty \subset \mathcal{Q}$, potom libovolná $(n-2)$-tice lineárně nezávislých nevlastních bodů $E_3, \dots, E_n$ náležejících prostoru $\omega_2 \cap \omega_1 \cap \pi_\infty$ doplněná o body E_1, E_2 splňuje podmínku věty.

(−) Nechť naopak $\omega_2 \cap \omega_1 \cap \pi_\infty \not\subset \mathcal{Q}$. Potom existuje nevlastní bod $E_3 \in \omega_2 \cap \omega_1 \cap \pi_\infty$, který nenáleží $\mathcal{Q}$. Označme ω_3 jeho polární nadrovinu.

$\vdots$

$(n-1)$`-tý krok` (+) Jestliže $\omega_{n-2} \cap \dots \cap \omega_1 \cap \pi_\infty \subset \mathcal{Q}$, potom libovolná dvojice lineárně nezávislých nevlastních bodů E_{n-1}, E_n náležejících nevlastní přímce $\omega_{n-2} \cap \dots \cap \omega_1 \cap \pi_\infty$ doplněná o body $E_1, \dots, E_{n-2}$ splňuje podmínku věty.

(−) Nechť naopak $\omega_{n-2} \cap \dots \cap \omega_1 \cap \pi_\infty \not\subset \mathcal{Q}$. Potom existuje nevlastní bod $E_{n-1} \in \omega_{n-2} \cap \dots \cap \omega_1 \cap \pi_\infty$, který nenáleží $\mathcal{Q}$. Označme ω_{n-1} jeho polární nadrovinu.

n`-tý krok` (+) Nevlastní bod $E_n \in \omega_{n-1} \cap \omega_{n-2} \cap \dots \cap \omega_1 \cap \pi_\infty$ spolu s body body $E_1, \dots, E_{n-1}$ splňuje podmínku věty. □

Věta 5.4.2. *Nechť $\langle O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ je afinní repér takový, že vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ určují polárně sdružené směry vzhledem ke kvadrice $\mathcal{Q}$. Potom v rovnici kvadriky vzhledem k tomuto repéru je $c_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.* □

Důkaz: Označme $E_i = \widetilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, \dots, n$. Z polární sdruženosti bodů $\mathbf{e}_i$ dostaneme

$$0 = \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_j = c_{ij}, \qquad i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \qquad \square$$

Věta 5.4.3. *Je-li počátek souřadného systému vlastním středem kvadriky $\mathcal{Q}$, je v rovnici $\mathcal{Q}$ vzhledem k této soustavě souřadnic $c_{0i} = 0$, $i = 1, \dots, n$.* □

Důkaz: Nechť O je vlastní střed kvadriky $\mathcal{Q}$, který zvolíme za počátek soustavy souřadnic. Potom O má homogenní souřadnice $(1, 0, \dots, 0)$. Jelikož O je střed, potom je polárně sdružen se všemi nevlastními body, a tedy i s body $E_i = \widetilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, \dots, n$. Potom dostáváme

$$0 = (1, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_i = c_{0i}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \qquad \square$$

Věta 5.4.4. *Ke každé středové kvadrice $\mathcal{Q}$ existuje taková soustava souřadnic, že $\mathcal{Q}$ je popsána rovnici*

$$c_{00}x_0^2 + c_{11}x_1^2 + \ldots + c_{nn}x_n^2 = 0 \tag{5.21}$$

a pro kvadriku, která neobsahuje nevlastní nadrovinu, je příslušná nehomogenní rovnice

$$c_{11}\overline{x}_1^2 + \ldots + c_{nn}\overline{x}_n^2 + c_{00} = 0. \tag{5.22}$$

Důkaz: Zvolíme soustavu souřadnic tak, že vlastní střed kvadriky je počátkem a směry souřadných os jsou polárně sdruženy vzhledem ke kvadrice, potom dokazované tvrzení přímo plyne z vět 5.4.2 a 5.4.3. □

Věta 5.4.5. *Ke každé nestředové kvadrice $\mathcal{Q}$ existuje taková soustava souřadnic, že $\mathcal{Q}$ je popsána rovnici*

$$c_{11}x_1^2 + \ldots + c_{n-1,n-1}x_{n-1}^2 + 2c_{0n}x_0x_n = 0, \tag{5.23}$$

kde $c_{0n} \neq 0$, a pro kvadriku, která neobsahuje nevlastní nadrovinu, je příslušná nehomogenní rovnice

$$c_{11}\overline{x}_1^2 + \ldots + c_{n-1,n-1}\overline{x}_{n-1}^2 + 2c_{0n}\overline{x}_n = 0. \tag{5.24}$$

Důkaz: Je-li $\mathcal{Q}$ nestředová kvadrika, pak její hodnost je nejméně 2. Zvolíme libovolný regulární bod $\mathcal{Q}$ za počátek souřadného systému O a nevlastní střed $\mathcal{Q}$ za $\mathbf{e}_n$. Dále $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ volíme tak, že $E_1, \ldots, E_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé polárně sdružené nevlastní body náležející tečné nadrovině sestrojené v bodě O (jejich existenci bychom prokázali stejně jako u věty 5.4.1).

Z $O = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{Q}$ plyne $c_{00} = 0$.

Tečná nadrovina kvadriky $\mathcal{Q}$ v bodě $O = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{Q}$ má rovnici $c_{00}x_0 + \ldots + c_{0n}x_n = 0$ a vzhledem k tomu, že E_i, $i = 1, \ldots, n-1$, jsou body náležející této tečné nadrovině, dostáváme $c_{0i} = 0$, kde $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Pro $\forall i, j \in \{1, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$, je E_i polárně sdružený s E_j, a proto

$$0 = \mathbf{e}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_j = c_{ij}, \qquad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

A konečně jelikož $\mathbf{e}_n$ určuje nevlastní střed (střed je polárně sdružen se všemi nevlastními body — včetně $E_1, \dots, E_{n-1}$), potom platí

$$0 = (0, 0, \dots, 1)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e}_i = c_{in}, \qquad i \in \{1, \dots, n-1\}.$$

Matice $\mathbf{C}$ kvadriky $\mathcal{Q}$ tedy nabývá tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{0n} \\ 0 & c_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1,n-1} & 0 \\ c_{0n} & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Soustava pro výpočet vlastního středu má nyní podobu

$$c_{11}\overline{x}_1 = 0,\ c_{22}\overline{x}_2 = 0,\ \dots,\ c_{n-1,n-1}\overline{x}_{n-1} = 0,\ c_{nn}\overline{x}_n + c_{0n} = 0,$$

a protože podle předpokladu vlastní střed $\mathcal{Q}$ neexistuje, musí být tato soustava neřešitelná — to nastává pouze pro $c_{nn} = 0$ a $c_{0n} \neq 0$. $\square$

Rovnici (5.21), popř. (5.22) nebo (5.23), popř. (5.24) nazýváme **afinní kanonická rovnice kvadriky**.

Obdobně jako v případě projektivní klasifikace můžeme afinní kanonickou rovnici kvadriky ještě upravit. Je-li $\mathcal{Q}$ středová kvadrika popsaná rovnicí (5.21) a současně $c_{00} \neq 0$, potom za předpokladu $c_{ii} \neq 0$ použijeme transformaci souřadnic $x_i = x_i' / \sqrt{\left|\frac{c_{ii}}{c_{00}}\right|}$; za předpokladu $c_{00} = 0$ a $c_{ii} \neq 0$ použijeme transformaci souřadnic $x_i = x_i' / \sqrt{|c_{ii}|}$ — v rovnici (5.21) se tak vyskytují pouze koeficienty 0, 1 nebo -1. Je-li $\mathcal{Q}$ nestředová kvadrika popsaná rovnicí (5.23), potom opět za předpokladu $c_{ii} \neq 0$ použijeme transformaci souřadnic $x_i = x_i' / \sqrt{\left|\frac{c_{ii}}{c_{0n}}\right|}$ — v rovnici (5.23) se tak opět vyskytují s výjimkou koeficientu u $x_0 x_n$ pouze koeficienty 0, 1 nebo -1.

Kanonická rovnice kvadriky upravená jedním z výše uvedených postupů se nazývá **afinní normovaná rovnice kvadriky**.

Afinní klasifikace kuželoseček. V rovině $\overline{\mathbb{A}_2^C}$ má kuželosečka právě jednu z následujících afinních normovaných rovnic:

	homogenní s.	***nehomogenní s.*** $\left(x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}\right)$
(Ak1)	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 = -1,$
(Ak2)	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 = 1,$
(Ak3)	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 - y^2 = 1,$
(Ak4)	$x_1^2 + 2x_0x_2 = 0,$	$x^2 + 2y = 0$
(Ak5)	$x_1^2 + x_2^2 = 0.$	$x^2 + y^2 = 0$
(Ak6)	$x_1^2 - x_2^2 = 0.$	$x^2 - y^2 = 0$
(Ak7)	$x_1^2 + x_0^2 = 0.$	$x^2 + 1 = 0$
(Ak8)	$x_1^2 - x_0^2 = 0.$	$x^2 - 1 = 0$
(Ak9)	$x_0x_2 = 0,$	*nelze vyjádřit*
(Ak10)	$x_1^2 = 0,$	$x^2 = 0$
(Ak11)	$x_0^2 = 0,$	*nelze vyjádřit*

Kuželosečka (Ak1) je **imaginární elipsa** (regulární, imaginární, eliptický typ, středová), (Ak2) je **elipsa** (regulární, reálná, eliptický typ, středová), (Ak3) je **hyperbola** (regulární, reálná, hyperbolický typ, středová), (Ak4) je **parabola** (regulární, reálná, parabolický typ, nestředová), (Ak5) je dvojice komplexně sdružených imaginárních různoběžek (singulární, imaginární, eliptický typ, středová), (Ak6) je dvojice reálných různoběžek (singulární, reálná, hypebolický typ, středová), (Ak7) je dvojice komplexně sdružených imaginárních rovnoběžek (singulární, imaginární, parabolický typ, středová), (Ak8) je dvojice reálných rovnoběžek (singulární, reálná, parabolický typ, středová), (Ak9) je tvořena jednou vlastní a jednou nevlastní přímkou, (Ak10) je dvojnásobná vlastní přímka (singulární, reálná, parabolický typ, středová) a (Ak11) je dvojnásobná nevlastní přímka.

Připomeňme, že při projektivní klasifikaci jsme dostali jedinou(!) reálnou regulární kuželosečku — typ (Pk2), zatímco při afinní klasifikaci rozlišujeme tři různé reálné regulární kuželosečky — *elipsu*, *hyperbolu* a *parabolu*. Musí tedy existovat projektivní transformace, která zobrazuje tyto tři afinní typy na sebe.

Vyjděme z kuželosečky $\mathcal{Q}$, jež je dána rovnicí (Pk2) $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$, resp. v nehomogenních souřadnicích $y^2 - x^2 = 1$, tj. jde o rovnici hyperboly. Použijeme projektivní transformaci $x_0' = x_2$, $x_1' = x_1$, $x_2' = x_0$

a dostaneme rovnici elipsy $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, popř. v nehomogenních souřadnicích $x^2+y^2 = 1$. Kolineace $x_0 = x_0'+x_2'$, $x_1' = x_1$, $x_2 = x_0'-x_2'$ zobrazí $\mathcal{Q}$ na parabolu s rovnicí $x_1^2 + 4x_0x_2 = 0$, resp. $x^2 + 4y = 0$.

Pouze zdůrazněme, že vzhledem ke skutečnosti, že vůči všem afinním transformacím rozšířeného afinního prostoru je nevlastní nadrovina (zde přímka) samodružná, neexistuje afinita, jež by zobrazovala různé afinní typy na sebe.

Afinní klasifikace kvadrik v $\overline{\mathbb{A}_3^C}$**.** V prostoru $\overline{\mathbb{A}_3^C}$ má kvadrika právě jednu z následujících afinních normovaných rovnic:

	homogenní s.	***nehomogenní s.*** $\left(x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}, z = \frac{x_3}{x_0}\right)$
(AK1)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0,$
(AK2)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$
(AK3)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0,$
(AK4)	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0,$
(AK5)	$x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_3 = 0,$	$x^2 + y^2 + 2z = 0$
(AK6)	$x_1^2 - x_2^2 + 2x_0x_3 = 0,$	$x^2 - y^2 + 2z = 0$
(AK7)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$	$x^2 + y^2 + z^2 = 0$
(AK8)	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$	$x^2 + y^2 - z^2 = 0$
(AK9)	$x_1^2 + x_2^2 + x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 + 1 = 0$
(AK10)	$x_1^2 + x_2^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 + y^2 - 1 = 0$
(AK11)	$x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 - y^2 - 1 = 0$
(AK12)	$x_1^2 + 2x_0x_3 = 0,$	$x^2 + 2z = 0$
(AK13)	$x_1^2 + x_2^2 = 0,$	$x^2 + y^2 = 0$
(AK14)	$x_1^2 - x_2^2 = 0,$	$x^2 - y^2 = 0$
(AK15)	$x_1^2 + x_0^2 = 0,$	$x^2 + 1 = 0$
(AK16)	$x_1^2 - x_0^2 = 0,$	$x^2 - 1 = 0$
(AK17)	$x_0x_1 = 0,$	*nelze vyjádřit*
(AK18)	$x_1^2 = 0,$	$x^2 = 0$
(AK19)	$x_0^2 = 0,$	*nelze vyjádřit*

Kvadrika (AK1) je **imaginární elipsoid**, (AK2) je (reálný) **elipsoid**, (AK3) je **jednodílný hyperboloid**, (AK4) je **dvoudílný hyperboloid**, (AK5) je **eliptický paraboloid**, (AK6) určuje **hyperbolický paraboloid**, (AK7) popisuje imaginární kuželovou plochu, (AK8) popisuje (reálnou) kuželovou plochu, (AK9) je imaginární eliptická válcová plocha, (AK10) je (reálná) eliptická válcová plocha, (AK11) je hyperbolická válcová plocha, (AK12) je parabolická válcová plocha, (AK13) popisuje dvojici komplexně sdružených imaginárních různoběžných rovin, (AK14) je dvojice reálných různoběžných rovin, (AK15) je dvojice komplexně sdružených imaginárních rovnoběžných rovin, (AK16) je dvojice reálných rovnoběžných rovin, (AK17) je tvořena jednou rovinou vlastní a jednou nevlastní, (AK18) představuje dvojnásobnou vlastní rovinu a (AK19) je dvojnásobná nevlastní tvořící rovina.

Připomeňme opět, že při projektivní klasifikaci jsme dostali pouze dvě reálné regulární kvadriky — typ (PK2) a (PK3). *Reálná regulární nepřímková kvadrika* (PK2) se nyní rozdělila na tři typy (eliptický, parabolický a hyperbolický) podle průniku s nevlastní rovinou, a to na reálný elipsoid (AK2), nepřímkový paraboloid (AK5) a nepřímkový hyperboloid (AK4). *Reálná regulární přímková kvadrika* (PK3) nemůže být eliptického typu, protože nevlastní bod každé reálné tvořící přímky je reálným bodem nevlastní kuželosečky kvadriky, a proto se rozdělila jen na dva typy (parabolický a hyperbolický) — dostali jsme přímkový paraboloid (AK6) a přímkový hyperboloid (AK3).

5.5 Metrické vlastnosti kvadrik

V této části uvažujeme $\mathbb{E}_n$ reálný eukleidovský prostor, $\mathbb{E}_n^C$ jeho komplexní rozšíření a $\overline{\mathbb{E}_n^C}$ projektivní rozšíření $\mathbb{E}_n^C$.

Jelikož eukleidovský prostor je zvláštní případ prostoru afinního, budeme opět předpokládat, že kvadrika $\mathcal{Q}$ je v prostoru $\overline{\mathbb{E}_n^C}$ popsána stejnými rovnicemi jako v kapitole 5.3 — pouze souřadnice bodů jsou tentokrát vztaženy k jisté kartézské soustavě souřadnic. Ponecháme i další úmluvy a označení, které jsme zavedli v $\overline{\mathbb{A}_n^C}$. Směr je tak jako dříve jednorozměrný podprostor zaměření prostoru $\mathbb{E}_n^C$ — tj. nevlastní bod prostoru $\overline{\mathbb{E}_n^C}$.

Přijmeme ještě následujícím úmluvu — jelikož se v nehomogenních souřadnicích nedají bez dalšího upřesnění vyjádřit kvadriky, jež obsahují nevlastní nadrovinu, budeme předpokládat, že žádná kvadrika nemá za svou tvořicí nadrovinu nevlastní nadrovinu. To znamená, že matice $\overline{\mathbf{C}}$ je nenulová!

DEFINICE 5.5.1.

Směr určený nevlastním bodem $U_\infty = \widetilde{\mathbf{u}}$ se nazývá **hlavní směr** kvadriky $\mathcal{Q}$, je-li vzhledem ke $\mathcal{Q}$ polárně sdružen se všemi k němu kolmými směry.

Z definice středu kvadriky (polární konjugace se všemi nevlastními body, tj. směry) plyne, že směr, jenž určuje nevlastní střed kvadriky, je hlavním směrem kvadriky. Totéž samozřejmě platí i pro nevlastní singulární bod.

★ Ukažme si výpočet hlavních směrů kvadriky. Přímo z definice plyne, že nutnou a postačující podmínkou pro to, aby byl směr $U_\infty = \widetilde{\mathbf{u}} = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ hlavním směrem kvadriky $\mathcal{Q} : F(\mathbf{x}) = 0$, je

$$\mathbf{xu} = 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \tag{5.25}$$

pro každý vektor $\mathbf{x} = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Pro pevné $\mathbf{u}$ jsou rovnice $\mathbf{ux} = 0$ a $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0$ lineární. Z anulování jedné rovnice vyplývá anulování druhé, a to platí, právě když je druhá rovnice násobkem první. Vektor $\mathbf{u} = (0, u_1, u_2, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$ tedy určuje hlavní směr právě tehdy, existuje-li $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \lambda(\mathbf{xu}) \tag{5.26}$$

pro každý vektor $\mathbf{x} = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

Po rozepsání rovnosti (5.26) dostáváme

$$(0, x_1, \ldots, x_n) \cdot \mathbf{C} \cdot (0, u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}} = \lambda \left[(0, x_1, \ldots, x_n) \cdot (0, u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}} \right],$$

tj.

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i u_j = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i u_i. \tag{5.27}$$

Vztah (5.27) můžeme psát v maticovém tvaru

$$(x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \lambda\, (x_1 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Protože rovnost (5.28) má platit pro každý vektor, tj. pro každou n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, musí platit

$$\overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} \quad (5.29)$$

Vidíme, že hledání hlavních směrů kvadriky vede na výpočet *charakteristických* (*vlastních*) *směrů* matice $\overline{\mathbf{C}}$. Řešení provádíme obvyklým způsobem. Soustavu (5.29) přepíšeme do tvaru

$$\left(\overline{\mathbf{C}} - \lambda \mathbf{E}\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o} \quad (5.30)$$

a hledáme λ tak, aby determinant matice soustavy (5.30) byl nulový. Řešíme tedy rovnici

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.31)$$

Řešení *charakteristické rovnice* (5.31) (*vlastní čísla*) dosadíme do soustavy (5.30) a jejím vyřešením obdržíme aspoň jeden hlavní směr. Připomeňme dvě tvrzení z teorie matice — vzhledem k tomu, že $\overline{\mathbf{C}}$ je reálná symetrická matice řádu n,

(i) potom jsou všechny kořeny rovnice (5.31) reálné.

(ii) dále je-li λ k-násobný kořen rovnice (5.31), potom má podprostor řešení homogenní soustavy (5.30) příslušných číslu λ dimenzi k.

V dosavadním postupu jsme uvažovali, že souřadnice jsou vztaženy k jistému kartézskému repéru, vzhledem k němuž je kvadrika popsána rovnicí (5.16)

$$\mathcal{Q}: \ \overline{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \overline{\mathbf{x}} + 2\mathbf{c}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}} + c_{00} = 0.$$

Zvolme jiný ortonormální repér; vztah mezi původními souřadnicemi $\overline{\mathbf{x}}$ a novými souřadnicemi $\overline{\mathbf{x}}'$ je svázán vztahem $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}}' + \mathbf{b}$, kde matice přechodu $\mathbf{A}$ je ortonormální. Rovnice kvadriky vzhledem k novému repéru má potom tvar

$$\mathcal{Q}: \ \overline{\mathbf{x}}'^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{D}} \cdot \overline{\mathbf{x}}' + 2\mathbf{d}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{x}}' + d_{00} = 0, \tag{5.32}$$

kde $\overline{\mathbf{D}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A}$. Charakteristická rovnice matice $\overline{\mathbf{D}}$ je

$$\left|\overline{\mathbf{D}} - \lambda\mathbf{E}\right| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{A}^{\mathrm{T}}| \cdot |\overline{\mathbf{C}} - \lambda\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{A}| = 0 \tag{5.33}$$

a neboť matice $\mathbf{A}$ je ortonormální, tj. $|\mathbf{A}| = 1$, zřejmě platí:

Věta 5.5.1. *Charakteristická rovnice kvadriky (5.31), jakož i její kořeny (hlavní čísla kvadriky) jsou nezávislé na zvolené kartézské soustavě souřadnic.* □

Další významnou vlastnost hlavních směrů popisuje následující věta:

Věta 5.5.2. *Dva hlavní směry kvadriky $\mathcal{Q}$ odpovídající různým kořenům rovnice (5.31) jsou navzájem kolmé.* □

Důkaz: Nechť $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$ je vlastní vektor matice $\overline{\mathbf{C}}$ příslušný vlastnímu číslu λ_1, resp. λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), tj.

$$\overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{u}, \quad \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{v} = \lambda_2\mathbf{v}.$$

Vzhledem k symetrii matice $\overline{\mathbf{C}}$ je $\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{u}$, a proto lze psát

$$0 = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot \overline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot (\lambda_2\mathbf{v}) - \mathbf{v}^{\mathrm{T}} \cdot (\lambda_1\mathbf{u}) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{uv})$$

Jelikož podle předpokladů je $(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$, potom dostáváme $\mathbf{uv} = 0$. □

Dále platí:

Věta 5.5.3. *Ke každé kvadrice $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathbb{E}_n}$ existuje právě n na sebe kolmých hlavních směrů.* □

Jestliže *jednotkový* vektor $\mathbf{u}$ generuje hlavní směr (nevlastní bod) U_∞ odpovídající kořenu λ_0 rovnice (5.31), potom po dosazení $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ do vztahu (5.26) dostaneme

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \lambda_0\mathbf{u}^2 = \lambda_0.$$

Odtud plyne, že $U_\infty = \widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{Q}$, právě když $\lambda_0 = 0$.

Z rovnosti (5.26) navíc plyne, že $\lambda_0 = 0$ právě tehdy, když je bod U_∞ polárně sdružen s každým nevlastním bodem, což platí, právě když je buď U_∞ singulární nevlastní bod kvadriky $\mathcal{Q}$, anebo nevlastní (nesingulární) střed kvadriky $\mathcal{Q}$.

Jestliže $\lambda_0 \neq 0$, potom není směr U_∞ konjugován sám se sebou a jeho polární nadrovina je vlastní.

Definice 5.5.2.

Polární nadrovina hlavního směru kvadriky $\mathcal{Q}$, jenž není bodem kvadriky, se nazývá **osová nadrovina** kvadriky $\mathcal{Q}$. Je-li hlavní směr kvadriky jejím nevlastním singulárním bodem, pak definujeme jako osovou nadrovinu libovolnou vlastní nadrovinu, která je kolmá na tento hlavní směr. Osová nadrovina hlavního směru kuželosečky se nazývá **osa** kuželosečky.
Pro $n \geqq 3$ rozumíme **osou kvadriky** každou vlastní přímku, která je průsečnicí $n - 1$ osových nadrovin kvadriky (pokud existují). Vlastní průsečík kvadriky s její osou se nazývá **vrchol** kvadriky.

Přímo z definic 5.5.1 a 5.5.2 navíc plyne, že osová nadrovina je kolmá na hlavní směr, jehož je polární nadrovinou.

Aplikujeme-li na osovou nadrovinu, jakožto speciální případ *průměrové nadroviny* kvadriky $\mathcal{Q}$, větu 5.3.6, potom dostáváme:

Věta 5.5.4. *Kvadrika $\mathcal{Q}$ je (kolmo) souměrná podle každé své osové nadroviny.* □

Závěrem se zabývejme jedním speciálním případem — má-li charakteristická rovnice kvadriky $\mathcal{Q} \subset \overline{\mathbb{E}_n^C}$ n-násobný kořen (jenž musí být nenulový z podmínky, že kvadrika neobsahuje nevlastní nadrovinu), potom je *každý* směr hlavním směrem kvadriky. Každá průměrová nadrovina takovéto kvadriky je pak osovou nadrovinou, tj. kvadrika je v tomto případě souměrná podle každé průměrové nadroviny. Navíc má tato kvadrika právě jeden vlastní střed — což plyne z věty 5.3.3 a ze skutečnosti, že charakteristická rovnice má pouze nenulové kořeny, a proto je její absolutní člen $\Delta = \left|\overline{\mathbf{C}}\right|$ různý od nuly.

Kvadriky výše uvedeného typu nazýváme **zobecněné kulové plochy** (**sféry**). Sféry definované tímto způsobem se však poněkud liší od sfér definovaných pomocí vzdálenosti bodů — shodu dostaneme, pokud navíc připustíme i nulovou, popř. ryze imaginární vzdálenost.

5.6 Metrická klasifikace kvadrik

Všechny afinní vlastnosti a afinní klasifikace kvadrik zůstávají v platnosti i v eukleidovském prostoru. Při převodu rovnic kvadrik do jednoduššího kanonického tvaru však nemůžeme provést poslední krok — normování koeficientů v rovnici kvadriky. To je dáno tím, že souřadné vektory ortonormálního repéru musejí být jednotkové a nemůžeme je tedy vynásobit vhodnými konstantami.

Věta 5.6.1. *Nechť Q je středová kvadrika. Potom existuje kartézská soustava souřadnic, že Q je popsána rovnicí*

$$\lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n^2 + c_{00} = 0, \tag{5.34}$$

kde λ_i, $i = 1, 2 \ldots, n$, jsou hlavní čísla kvadriky, z nichž alespoň jedno je různé od nuly. □

Důkaz: Zvolme vlastní střed kvadriky za počátek kartézské soustavy souřadnic a jednotkové vektory hlavních směrů za souřadné směrové vektory. Potom podle věty 5.4.4 má Q rovnici

$$c_{11} \overline{x}_1^2 + \ldots + c_{nn} \overline{x}_n^2 + c_{00} = 0.$$

Charakteristická rovnice kvadriky má v těchto souřadnicích tvar

$$(c_{11} - \lambda)(c_{22} - \lambda) \cdots (c_{nn} - \lambda) = 0$$

a odtud již plyne dokazované tvrzení. □

Navíc se dá dokázat, že má-li kvadrika *právě jeden* střed ($\Leftrightarrow \Delta \neq 0$, tj. právě když jsou všechna vlastní čísla nenulová), potom pro rovnici (5.34) platí

$$\lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n \overline{x}_n^2 + \frac{D}{\Delta} = 0, \tag{5.35}$$

kde D je diskriminant kvadriky a Δ je determinant matice $\overline{\mathbf{C}}$.

Věta 5.6.2. *Nechť Q je nestředová kvadrika. Potom existuje kartézská soustava souřadnic, že Q je popsána rovnicí*

$$\lambda_1 \overline{x}_1^2 + \lambda_2 \overline{x}_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1} \overline{x}_{n-1}^2 + 2c_{0n} \overline{x}_n = 0, \tag{5.36}$$

kde λ_i, $i = 1, 2 \ldots, n-1$, jsou hlavní čísla kvadriky, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, a $c_{0n} \neq 0$. □

Důkaz: Zvolme vrchol kvadriky za počátek kartézské soustavy souřadnic a jednotkové vektory hlavních směrů za souřadné směrové vektory. Potom podle věty 5.4.5 má $\mathcal{Q}$ rovnici

$$c_{11}\overline{x}_1^2 + c_{22}\overline{x}_2^2 + \ldots + c_{n-1,n-1}\overline{x}_{n-1}^2 + 2c_{0n}\overline{x}_n = 0.$$

Charakteristická rovnice kvadriky má v těchto souřadnicích tvar

$$-(c_{11} - \lambda)(c_{22} - \lambda) \cdots (c_{n-1,n-1} - \lambda)\lambda = 0$$

a odtud již plyne dokazované tvrzení. □

Všimněme si, že v případě nestředové kvadriky je *vždy* alespoň jeden kořen charakteristické rovnice nulový, zde $\lambda_n = 0$. Ze zbývajících $n-1$ kořenů je pak alespoň jeden různý od nuly.

Metrická klasifikace kuželoseček. Ke každé kuželosečce, která neobsahuje jako svou část nevlastní přímku, existuje taková kartézská soustava souřadnic, že vzhledem k ní má kuželosečka jednu z následujících rovnic:

(Mk1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$	$a, b > 0,$
(Mk2)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$a, b > 0,$
(Mk3)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$a, b > 0,$
(Mk4)	$x^2 + 2py = 0,$	$p > 0,$
(Mk5)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0,$	$a, b > 0,$
(Mk6)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$	$a, b > 0,$
(Mk7)	$x^2 + c^2 = 0,$	$c > 0,$
(Mk8)	$x^2 - c^2 = 0,$	$c > 0,$
(Mk9)	$x^2 = 0,$	

kde a, b, c, p jsou reálná čísla.

Kladná čísla a, b v rovnicích (Mk1)–(Mk3) elipsy (imaginární i reálné) a hyperboly se nazývají **délky poloos** a pro osy kuželosečky, na kterých leží reálné vrcholy, udávají vzdálenost vrcholů od středu kuželosečky. Pro reálnou elipsu jsou všechny vrcholy reálné a větší z čísel a, b se nazývá **délkou hlavní poloosy**, menší se nazývá **délkou vedlejší poloosy**. Vrcholy elipsy, jejichž vzdálenost od středu elipsy je rovna

délce hlavní poloosy, se nazývají **hlavní vrcholy elipsy**, vrcholy elipsy, jejichž vzdálenost od středu elipsy je rovna délce vedlejší poloosy, se nazývají **vedlejší vrcholy elipsy**. Je-li $a = b$, potom je (Mk1) rovnicí **imaginární kružnice** a (Mk2) rovnicí **reálné kružnice**.
Pro hyperbolu s rovnicí (Mk3) jsou vrcholy na ose x reálné a nazývají se **hlavní vrcholy hyperboly**, číslo a je **délka hlavní poloosy**. Vrcholy na ose y jsou komplexně sdružené; číslo b se nazývá **délka vedlejší poloosy**. Pro $a = b$ dostáváme tzv. **rovnoosou hyperbolu**.
Číslo p v rovnici paraboly (Mk4) se nazývá **parametr paraboly**.

Metrická klasifikace kvadrik v $\mathbb{E}_3^C$. Ke každé kvadrice v eukleidovském prostoru $\mathbb{E}_3^C$, která neobsahuje jako svou část nevlastní rovinu, existuje taková kartézská soustava souřadnic, že vzhledem k ní má kvadrika jednu z následujících rovnic:

(MK1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a, b, c > 0,$

(MK2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$

(MK3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$

(MK4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0,$

(MK5) $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 2z = 0, \quad p, q > 0,$

(MK6) $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} + 2z = 0, \quad p, q > 0,$

(MK7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0,$

(MK8) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a, b, c > 0,$

(MK9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad a, b > 0,$

(MK10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$

(MK11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0,$

(MK12) $\frac{x^2}{p^2} + 2z = 0, \quad p > 0,$

(MK13) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b > 0,$

(MK14) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a, b > 0,$

(MK15) $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0, \quad a > 0,$

(MK16) $\frac{x^2}{a^2} - 1 = 0, \quad a > 0,$

(MK17) $x^2 = 0,$

kde a, b, c, p, q jsou reálná čísla.

Kladná čísla a, b, c v rovnicích (MK1)–(MK4) elipsoidů (imaginárního a reálného) a hyperboloidů (jedno- a dvojdílného) se nazývají **délky poloos**. Pro osy kvadriky, na nichž leží reálné vrcholy, udávají tato čísla vzdálenost vrcholů od středu kvadriky.
Čísla p, q v rovnicích (MK5)–(MK6) paraboloidů jsou parametry parabol, v nichž protínají paraboloid všechny roviny rovnoběžné s jednou ze dvou osových rovin paraboloidu.
Rovnice (MK7), popř. (MK8) popisuje imaginární, popř. reálnou kuželovou plochu. Čísla a, b jsou délky poloos řídicí kuželosečky — imaginární, popř. reálné elipsy.
Čísla a, b v rovnicích (MK9)–(MK11) jsou délky poloos řídicí kuželosečky (imaginární elipsy, reálné elipsy, popř. hyperboly) imaginární eliptické, reálné eliptické, popř. hyperbolické válcové plochy.
Číslo p v rovnici (MK12) je parametr řídicí paraboly parabolické válcové plochy.

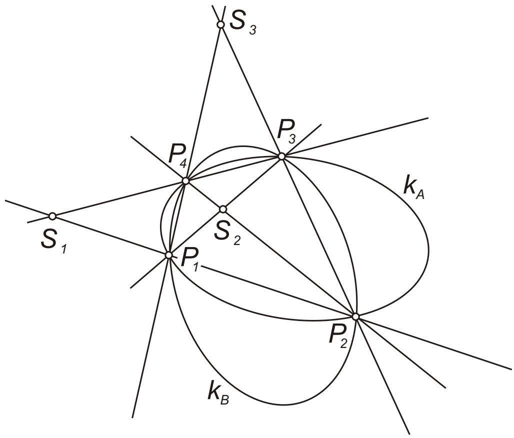
5.7 Pascalova a Brianchonova věta

Svazky kuželoseček. Hledáme-li společné body dvou *různých* kuželoseček k_A a k_B, potom je nutné uvažovat řadu případů, které mohou nastat — na jedné straně mohou být kuželosečky k_A, k_B regulární či singulární; na straně druhé jejich průsečíky mohou být vícenásobné či jednoduché, reálné či komplexně sdružené, vlastní či nevlastní. O počtu společných bodů (průsečíků) hovoří následující věta:

Věta 5.7.1. (Bezoutova věta) — Bezout (1764)
Dvě algebraické křivky k_1, k_2 stupňů $\underline{m}$ a $\underline{n}$ bez společné komponenty mají právě $\underline{mn}$ průsečíků (včetně nevlastních a imaginárních a počítáno i s jejich násobností). □

Kuželosečky k_A, k_B (algebraické křivky 2. stupně), jež nemají společnou komponentu (tj. přímku), se tedy protínají v $2 \cdot 2 = 4$ různých bodech P_1, P_2, P_3, P_4. Množina všech kuželoseček k v rovině, které obsahují tyto čtyři po třech nekolineární body $\{P_1, P_2, P_3, P_4\} = k_A \cap k_B$, tvoří tzv. **svazek kuželoseček**; říkáme, že svazek Σ je kuželosečkami $k_A : F_A(\mathbf{x}) = 0$, $k_B : F_B(\mathbf{x}) = 0$ určen. Pro libovolnou kuželosečku $k : F(\mathbf{x}) = 0$ svazku Σ pak existují taková čísla λ_A a λ_B, že platí

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_A \cdot F_A(\mathbf{x}) + \lambda_B \cdot F_B(\mathbf{x}) = 0, \qquad (\lambda_A, \lambda_B) \neq (0, 0).$$



Pokud určujeme svazek kuželoseček dvěma kuželosečkami k_A, k_B, bývá nejvýhodnější (pokud to jde!), zvolit za k_A, k_B kuželosečky singulární — u singulárních kuželoseček se totiž nejsnáze určují jejich rovnice. Je-li tedy svazek Σ dán **základními body** P_1, P_2, P_3, P_4, potom můžeme např. zvolit

$$k_A: \ p_{12}(\mathbf{x}) \cdot p_{34}(\mathbf{x}) = 0, \qquad k_B: \ p_{13}(\mathbf{x}) \cdot p_{24}(\mathbf{x}) = 0,$$

kde $p_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ je rovnice přímky procházející body P_i a P_j.

Věta 5.7.2. *Pěti body v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce, je jednoznačně určena regulární kuželosečka, která danými body prochází.* □

Při důkazu si stačí uvědomit, že čtyři body určují svazek Σ popsaný rovnicí $f(\mathbf{x}) = \lambda_A \cdot f_A(\mathbf{x}) + \lambda_B \cdot f_B(\mathbf{x})$ a pátý bod slouží k výpočtu čísel λ_A, λ_B (poměr $\lambda_A : \lambda_B$ je určen jednoznačně) a tím i k jednoznačnému určení kuželosečky k.

Dualizací pak získáváme další větu:

Věta 5.7.3. *Pěti přímkami v rovině, z nichž žádné tři neprocházejí týmž bodem, je jednoznačně určena regulární kuželosečka, která se daných přímek dotýká.* □

Pascalova věta. Protože pěti body je regulární kuželosečka jednoznačně určena, je zřejmé, že šest bodů již musí být vázáno nějakou podmínkou (zvolíme-li totiž v rovině namátkou šest bodů, pak kuželosečka určená pěti z nich už nemusí procházet šestým bodem).

Věta 5.7.4. (Pascalova věta) — Pascal (1640)
Mějme na regulární kuželosečce k dány různé body $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Potom existuje přímka p tak, že body $K \in \leftrightarrow P_1P_2 \cap \leftrightarrow P_4P_5$, $L \in \leftrightarrow P_2P_3 \cap \leftrightarrow P_5P_6$, $M \in \leftrightarrow P_3P_4 \cap \leftrightarrow P_6P_1$ leží na přímce p. □

Důkaz: Nechť je kuželosečka k popsána kvadratickou rovnicí $F(\mathbf{x}) = 0$. Dále nechť $p_{ij}(\mathbf{x}) = 0$ je rovnice přímky P_iP_j $(i, j = 1, \ldots, 6)$. Buď Σ svazek kuželoseček určený body P_1, P_2, P_3, P_4. Svazek Σ určíme dvěma singulárními kuželosečkami $k_1 = \leftrightarrow P_1P_2 \cup \leftrightarrow P_3P_4$, resp. $k_2 = \leftrightarrow P_2P_3 \cup \leftrightarrow P_1P_4$. Rovnice kuželosečky k_1, resp. k_2 je tedy $p_{12}(\mathbf{x}) \cdot p_{34}(\mathbf{x}) = 0$, resp. $p_{23}(\mathbf{x}) \cdot p_{14}(\mathbf{x}) = 0$. Protože $k \in \Sigma$, existují taková čísla λ_1, λ_2, že

$$F(\mathbf{x}) = \lambda_1 \cdot \big[p_{12}(\mathbf{x}) \cdot p_{34}(\mathbf{x})\big] + \lambda_2 \cdot \big[p_{23}(\mathbf{x}) \cdot p_{14}(\mathbf{x})\big]. \tag{5.37}$$

Označíme-li Σ' svazek kuželoseček určený body P_4, P_5, P_6, P_1, potom obdobným způsobem dostaneme čísla μ_1, μ_2 taková, že

$$F(\mathbf{x}) = \mu_1 \cdot \big[p_{45}(\mathbf{x}) \cdot p_{16}(\mathbf{x})\big] + \mu_2 \cdot \big[p_{56}(\mathbf{x}) \cdot p_{14}(\mathbf{x})\big]. \tag{5.38}$$

Porovnáním (5.37) a (5.38) dostáváme

$$\lambda_1 \cdot \big[p_{12}(\mathbf{x}) \cdot p_{34}(\mathbf{x})\big] - \mu_1 \cdot \big[p_{45}(\mathbf{x}) \cdot p_{16}(\mathbf{x})\big] = p_{14}(\mathbf{x}) \cdot \big[\mu_2 \cdot p_{56}(\mathbf{x}) - \lambda_2 \cdot p_{23}(\mathbf{x})\big]. \tag{5.39}$$

Buď p přímka o rovnici

$$\mu_2 \cdot p_{56}(\mathbf{x}) - \lambda_2 \cdot p_{23}(\mathbf{x}) = 0.$$

Evidentně platí $L \in p$. Pro bod K můžeme psát: $K \in \leftrightarrow P_1P_2$, $K \in \leftrightarrow P_4P_5$ a $K \notin \leftrightarrow P_1P_4$ (kdyby totiž platilo $K \in \leftrightarrow P_1P_4$, potom by muselo platit $K = P_4$, a proto buďto $P_1 = P_4$, nebo $P_2 = P_4$ — což je spor). Pro bod K tedy platí

$$p_{12}(\mathbf{k}) = 0, \quad p_{45}(\mathbf{k}) = 0, \quad p_{14}(\mathbf{k}) \neq 0.$$

Jestliže dosadíme souřadnice bodu K do rovnice (5.39)

$$\lambda_1 \cdot \big[\underbrace{p_{12}(\mathbf{k})}_{=0} \cdot p_{34}(\mathbf{k})\big] - \mu_1 \cdot \big[\underbrace{p_{45}(\mathbf{k})}_{=0} \cdot p_{16}(\mathbf{k})\big] = \underbrace{p_{14}(\mathbf{k})}_{\neq 0} \cdot \big[\mu_2 \cdot p_{56}(\mathbf{k}) - \lambda_2 \cdot p_{23}(\mathbf{k})\big],$$

snadno nahlédneme, že

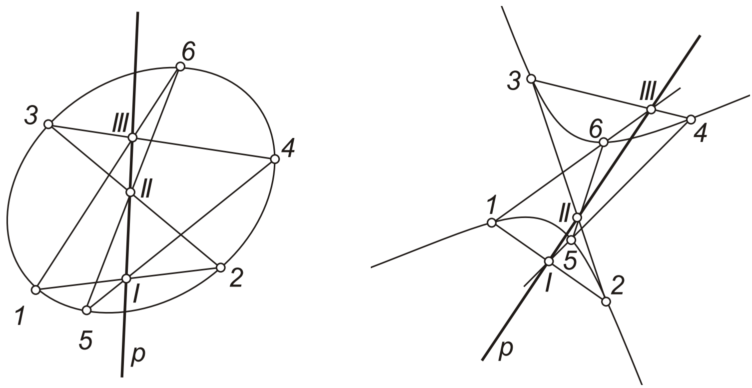
$$\mu_2 \cdot p_{56}(\mathbf{k}) - \lambda_2 \cdot p_{23}(\mathbf{k}) = 0,$$

tj. $K \in p$. Analogicky bychom ukázali i $M \in p$. □

Body $P_1, P_2, \ldots, P_6$ můžeme považovat za vrcholy šestiúhelníka vepsaného regulární kuželosečce a přímky spojující dva sousední vrcholy za strany tohoto šestiúhelníka. *Pascalova věta* pak může znít:

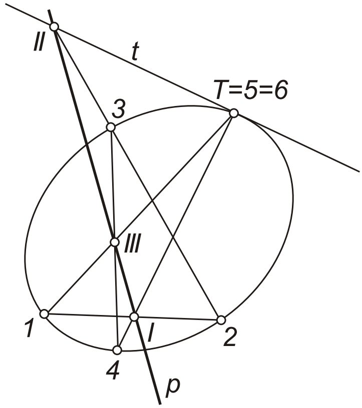
Průsečíky protějších stran šestiúhelníka vepsaného kuželosečce jsou tři body ležící na jedné přímce, která se nazývá ***Pascalova přímka****.*

Abychom Pascalově větě správně porozuměli, je nutné si uvědomit, že tato věta platí pro libovolný šestiúhelník kuželosečce vepsaný — je-li tedy na kuželosečce určeno šest bodů, můžeme je v šestiúhelník „uspořádat“ několika způsoby. Dostáváme tak různé šestiúhelníky s různými Pascalovými přímkami (obecně přísluší daným šesti bodům 60 Pascalových přímek, jak se snadno přesvědčíme jednoduchou kombinatorickou úvahou). Dále je nutné se oprostit od představy, že šestiúhelník vepsaný kuželosečce musí ležet uvnitř kuželosečky!

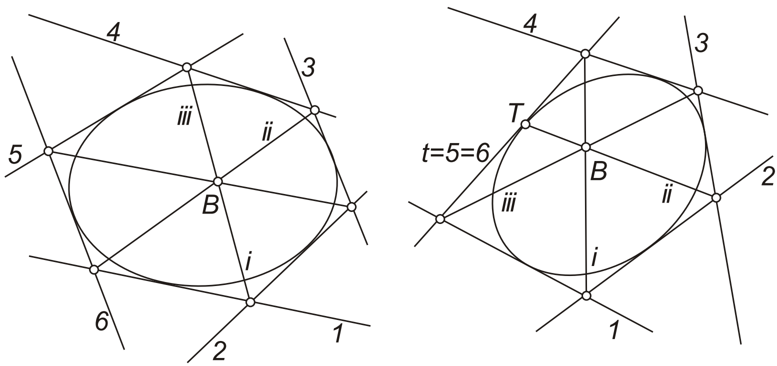


Poznamenejme ještě, že pro označení vrcholů šestiúhelníka vepsaného kuželosečce se často (a to z tradičních důvodů) používají arabské číslice 1, 2,..., 6 a pro průsečíky protějších stran římské číslice I, II, III (tj. body $12 \cap 45 = I$, $23 \cap 56 = II$, $34 \cap 61 = III$ leží na přímce p).

Kromě sestrojování bodů kuželosečky je možné využít Pascalovu větu i při řešení některých úloh o tečnách. Tato věta totiž zůstává v platnosti i v případě, když některé dva sousední vrcholy šestiúhelníka splynou; strana šestiúhelníka, která je jejich spojnicí, potom přejde v tečnu kuželosečky v tomto dvojnásobném vrcholu.



Brianchonova věta. Duální věta k Pascalově větě nebyla dlouho známa (od uveřejnění Pascalovy věty uplynulo přes 160 let, než byla tato duální věta nalezena). Hlavním důvodem byla skutečnost, že princip duality, který nám dnes umožňuje větu vyslovit téměř současně s vyslovením věty Pascalovy, nebyl v té době ještě znám.



Věta 5.7.5. (Brianchonova věta) — Brianchon (1806)
Přímky spojující protější vrcholy šestiúhelníka opsaného regulární kuželosečce jsou tři přímky procházející jedním bodem, který se nazývá ***Brianchonův bod.*** □

Jinými slovy, jsou-li přímky $1, 2, \ldots, 6$ tečnami téže kuželosečky, potom přímky spojující průsečíky přímek 12 a 45, 23 a 56, 34 a 61 procházejí jedním bodem B.

Opět připomeňme, že Brianchonova věta zůstává v platnosti i v tom případě, když některé sousední strany šestiúhelníka kuželosečce opsaného splynou v tečnu jedinou; jejich průsečík je pak zastoupen příslušným bodem dotyku.

Kapitola 6

Slovo závěrem aneb Klasifikace geometrií

Motto:
„Každá geometrie je projektivní geometrie"

Arthur Cayley (1821–1895)

V roce 1872 se německý matematik Felix Klein (1849–1925) stal profesorem na univerzitě v Erlangen. Ve své nástupní přednášce, kterou nazval *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, objasnil nový sjednocující pohled na geometrii využívající grupy geometrických zobrazení. Tato přednáška se stala známou pod názvem **Erlangenský program**.

Geometrie v Kleinově smyslu je dvojice (S, G), kde S je jistá neprázdná bodová množina a G je určitá grupa geometrických transformací, která operuje na množině S. Za charakteristické vlastnosti každé geometrie (eukleidovská geometrie, hyperbolická geometrie, projektivní geometrie apod.) vzal Klein ty vlastnosti, které jsou invariantní (tj. neměnné) vůči určité grupě geometrických zobrazení. Pomocí grupového přístupu lze provést klasifikaci jednotlivých geometrií a ukázat jejich vzájemné vztahy a souvislosti.

Projektivní geometrie. Základní myšlenkou uvedeného přístupu je volba projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ za výše uvedenou bodovou množinu S. **Projektivní geometrie** je potom geometrie určená působením grupy PGL_n (**projektivní grupa**, grupa projektivních transformací) na body prostoru $\mathbb{P}_n$. Další typy geometrií získáme studiem různých podgrup grupy PGL_n.

Afinní geometrie. Vynecháním jedné nadroviny $\pi_\infty : x_0 = 0$ projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ vznikne z projektivního prostoru prostor afinní. Je-li naopak afinní prostor $\mathbb{A}_n$ rozšířen na prostor projektivní (přidáním jedné, tzv. nevlastní nadroviny), potom body rozšířeného afinního prostoru $\mathbb{P}_n = \overline{\mathbb{A}_n}$ nenáležející afinnímu prostoru (tj. ležící v přidané nadrovině) označujeme jako nevlastní.

Mezi kolineacemi prostoru $\mathbb{P}_n = \overline{\mathbb{A}_n}$ sehrávají významnou roli ty, jež lze popsat vztahem

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} & \mathbf{A}_{(n,n)} \end{pmatrix} (x_0, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

Tyto speciální kolineace (tzv. **afinní kolineace**) zobrazují vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní, tj. nevlastní nadrovina $x_0 = 0$ je vzhledem k afinním kolineacím samodružná.

Zúžení afinní transformace projektivního prostoru $\mathbb{P}_n = \overline{\mathbb{A}_n}$ na afinní prostor $\mathbb{A}_n \subset \mathbb{P}_n$ je tzv. **afinní transformace** (afinita) afinního prostoru $\mathbb{A}_n$, jíž lze popsat transformačními vztahy

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}. \tag{6.1}$$

$$f:\ x_i' = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

Afinní grupa, jež je podgrupou projektivní grupy PGL_n, se značí GA_n.

Vlastnosti geometrických objektů, které zůstávají vzhledem k prvkům afinní grupy nezměněny a jsou tedy předmětem studia **afinní geometrie**, se nazývají **afinní invarianty**, popř. afinní vlastnosti daných objektů. Uveďme některé příklady:

Rovnoběžné přímky jsou takové přímky, jež mají společný nevlastní bod. Platí, že množina nevlastních bodů je invariantní vzhledem ke každé afinní transformaci a dále každá přímka se zobrazuje na přímku, neboť to je splněno již vzhledem k PGL_n. Odtud plyne, že rovnoběžnost je afinní vlastnost.

Afinní podprostor je projektivní podprostor, jež není obsažen v nevlastní nadrovině. Tato vlastnost není tedy dotčena prvky grupy GA_n a tedy *býti afinním podprostorem* je afinní vlastnost.

Vzhledem ke vztahu

$$(A, B, C, D_\infty) = (A, B, C)$$

a vzhledem ke skutečnosti, že projektivní transformace zachovávají dvojpoměr čtyř bodů na přímce, je zřejmě *dělicí poměr* afinním invariantem.

Dalšími afinními invarianty jsou např. střed kvadriky, vlastnost býti průměrovou nadrovinou kvadriky a klasifikace kvadrik na eliptický, hyperbolický a parabolický typ.

Ekviafinní geometrie. Uvažujme v afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ rovnoběžnostěn, jehož míra je V (pro $n = 1$ jde o úsečku a její délku, pro $n = 2$ jde o rovnoběžník a jeho obsah, pro $n = 3$ o rovnoběžnostěn a jeho objem atd.). Míra V' obrazu daného rovnoběžnostěnu v jisté afinitě (6.1), což je opět rovnoběžnostěn, je rovna

$$V' = |\det(\mathbf{A})| \cdot V.$$

Všechny afinity, pro něž platí $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$, tvoří podgrupu GA_n, která se nazývá **ekviafinní grupa**, resp. grupa afinit zachovávajících míru. Značíme ji SA_n. Ze zavedení je vidět, že např. míra rovnoběžnostěnu je invariantem **ekviafinní geometrie**.

Eukleidovská geometrie. Za účelem přechodu od afinní geometrie k eukleidovské (tj. chceme zavést eukleidovskou metriku) volíme v afinním prostoru $\mathbb{A}_n$ jistý elipsoid Φ (jde o regulární kvadriku, jež v $\overline{\mathbb{A}_n}$ nemá žádný reálný nevlastní bod; v $\mathbb{A}_2$ hovoříme o elipse). Tento elipsoid pojmenujeme **jednotková sféra** a použijme jej k definici vzdálenosti bodů. Nechť O je střed Φ a P je jeden z jeho bodů — potom vzdálenost bodů O a P je rovna 1. Je-li dále $Q = O + \lambda(P - O)$, potom vzdálenost bodů O a Q je $|\lambda|$. Vzdálenost libovolných bodů A, B určíme s využitím translace, která převádí bod A na bod O.

Je-li střed O jednotkové sféry Φ zvolen za počátek soustavy souřadnic, potom je rovnice Φ

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = 1,$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ a $\mathbf{Q}$ je jistá reálná pozitivně definitní symetrická matice. Pomocí matice $\mathbf{Q}$ pak definujeme skalární součin vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, a to vztahem

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}.$$

S využitím skalárního součinu lze zavést **velikost** (**normu**) **vektoru** $\mathbf{x}$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

a tím i (eukleidovskou) vzdálenost dvou bodů A, B

$$|AB| = \|B - A\| = \sqrt{\langle B - A, B - A \rangle}.$$

Obdobně definujme úhel $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ dvou nenulových vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

$$\cos \varphi = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}}$$

a s využitím směrových vektorů i odchylku dvou přímek. Speciálně v případě

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$$

hovoříme o dvou **ortogonálních** vektorech.

Afinní transformace (6.1), která zachovává eukleidovskou vzdálenost, se nazývá **eukleidovská** (**shodná**) **transformace**. Vlastnosti, které zůstávají zachovány působením každého prvku tzv. **eukleidovské grupy** OA_n (grupa eukleidovských transformací, jež je podgrupou grupy GA_n), jsou **eukleidovskými invarianty** a tvoří obsah **eukleidovské geometrie**.

Matice $\mathbf{A}$ shodné transformace musí zachovávat skalární součin dvou vektorů, a tudíž nutná a postačující podmínka pro to, aby afinita (6.1) byla shodností, zní

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{Q}.$$

Je-li $\mathbf{Q}$ jednotková matice (tj. kvadrika Φ je dána rovnicí $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$), potom se soustava souřadnic nazývá **kartézská soustava souřadnic**. Pro skalární součin dvou vektorů, jejichž souřadnice jsou vztaženy ke kartézské soustavě, pak dostáváme $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$, což stručně zapisujeme $\mathbf{xy}$. Podmínka pro matici $\mathbf{A}$ shodné transfomace potom nabývá speciálního tvaru

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

což znamená, že $\mathbf{A}$ je ortonormální matice.

Jelikož eukleidovský prostor je speciálním případem afinního prostoru, lze obdobně hovořit o (**projektivně**) **rozšířeném eukleidovském prostoru** $\overline{\mathbb{E}_n}$. Uvažujme nyní jednotkovou sféru $\Phi \subset \overline{\mathbb{E}_n}$, jež je vzhledem ke zvolené projektivní soustavě souřadnic popsána rovnicí

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \text{kde } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{o}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{o} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

Nevlastní nadrovina $\pi_\infty : x_0 = 0$ protíná kvadriku Φ v kvadrice Ω, jejíž rovnice zní

$$x_0 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \text{kde } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

Tato nevlastní kvadrika se nazývá **absolutní kvadrika** a zdůrazněme, že v případě eukleidovské geometrie na ní leží pouze imaginární body.

Je zajímavé, že každá imaginární přímka, jejíž nevlastní bod $U_\infty = (0, \mathbf{u})$ leží na Ω, je evidentně ortogonální sama k sobě (neboť $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} = 0$). Takovéto přímky nazýváme **izotropické**, resp. **minimální přímky**. Další zajímavou vlastností je, že každé dva body téže izotropické přímky mají nulovou vzdálenost!

V případě, že pracujeme s kartézskou soustavou souřadnic, potom je rovnice absolutní kvadriky Ω

$$x_0 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0.$$

Závěrem poznamenejme, že množinou všech izotropických přímek, které procházejí počátkem O, je (kvadratická) **izotropická kuželová nadplocha** s rovnicí (resp. je-li soustava souřadnic kartézská)

$$\Gamma : \ \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (\text{resp. } x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0).$$

***Příklad* 6.1.1.** Chceme-li zavést eukleidovskou metriku v afinní rovině (a tím přejít k rovině eukleidovské), zvolíme nejprve elipsu Σ (**jednotkovou kružnici**). Všechny sdružené průměry elipsy se pak stávají ortogonálními a mohou být použity k volbě kartézské soustavy souřadnic, v níž je Σ popsána nehomogenní rovnicí $x^2 + y^2 = 1$.

Absolutní kvadrika Ω má rovnici $x_0 = x_1^2 + x_2^2 = 0$ a je tedy tvořena dvěma komplexně sdruženými body $J = (0, 1, i)$ a $\overline{J} = (0, 1, -i)$. Tyto body se nazývají **absolutní** (resp. **cirkulární**) **body** a je zřejmé, že každá kružnice $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ prochází body J, $\overline{J}$. Naopak platí, že každá kuželosečka procházející absolutními body je kružnice.

Izotropické přímky procházející počátkem mají rovnici $x \pm iy = 0$, tj. jejich sjednocení (izotropická kuželová nadplocha v rovině) je dáno rovnicí

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = 0$$

Uvedený pár izotropických přímek lze tedy považovat za kružnici o nulovém poloměru. □

***Příklad* 6.1.2.** V projektivním rozšíření eukleidovského prostoru $\overline{\mathbb{E}}_3$ s kartézskou soustavou souřadnic je absolutní kuželosečka Ω popsána rovnicí

$$\Omega: \; x_0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Kvadriky, jež procházejí kuželosečkou Ω, jsou právě všechny kulové plochy. Izotropická kuželová plocha Γ má rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. □

Ekviformní geometrie. Afinní transformace, která zachovává eukleidovskou ortogonalitu, se nazývá **ekviformní** (**podobná**) **transformace**. Lze ukázat, že nutná a postačující podmínka pro to, aby afinita (6.1) byla podobností, zní

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} = k^2 \mathbf{Q}, \quad k \neq 0,$$

tj. matice $\mathbf{A}$ je k-násobkem jisté ortonormální matice.

Snadno se přesvědčíme, že každá podobnost je taková projektivní transformace, vzhledem k níž je absolutní kvadrika Ω samodružná.

Grupa ekviformit (tzv. **ekviformní grupa**) je podgrupou grupy GA_n. Vlastnosti, které zůstávají zachovány působením každého prvku ekviformní grupy, jsou **ekviformními invarianty** a jsou předmětem studia **ekviformní** (**elementární**) **geometrie** — příkladem může být úhel dvou přímek.

Cayley-Kleinovy geometrie. Zmínili jsme se o tom, že všechny afinní a ekviformní transformace mají tu vlastnost, že nechávají na místě jistý geometrický útvar. U afinit je to samodružná nevlastní nadrovina, u podobností samodružná absolutní kvadrika. Na druhou stranu existují transformace (např. shodnosti či ekviafinity), jež tímto způsobem charakterizovat nelze.

Geometrie, které definujeme pomocí podgrup grupy PGL_n takových, že jejich všechny prvky (jisté speciální projektivní transformace) zachovávají určitý absolutní (fundametální) objekt, se nazývají **Cayley-Kleinovy geometrie**. Uvedeme několik významných příkladů:

***Příklad* 6.1.3.** V eukleidovské rovině $\mathbb{E}_2$ zvolíme kružnici γ a její vnitřek budeme považovat za **hyperbolickou rovinu** $\mathbb{H}_2$. **Grupa hyperbolických transformací** v rovině je definována jako grupa těch projektivit, vůči nimž je kružnice γ (a tím i její vnitřek) samodružná. Teorie invariantů uvedené grupy operující na $\mathbb{H}_2$ je rovinnou **hyperbolickou geometrií**.

Hyperbolická a eukleidovská geometrie mají řadu společných vlastností, které jsou obsahem tzv. **absolutní geometrie**. Z hlediska historie geometrie se matematici pokusili popsat nejprve geometrii eukleidovskou — a to pomocí **axiómů**. Axiómy jsou výchozí tvrzení (tj. apriorně pravdivé věty) axiomaticky budované teorie, která se přijímají bez důkazu a z nichž se pomocí daných odvozovacích pravidel odvozují všechna ostatní tvrzení dané teorie. Je sice pravdou, že geometrie začala být axiomatizována z celé matematiky nejdříve, a to v knize *Stoicheia* (*Základy*) řeckého matematika Eukleida z Alexandrie (≈ 340 – ≈ 280 p.n.l.), ale přesného stanovení všech výchozích tvrzení se dočkala až po více než dvou tisíciletích v díle Davida Hilberta (1862–1943) *Grundlagen der Geometrie* (*Základy geometrie*).

Při formulaci axiómů eukleidovské geometrie dospějeme do fáze, že přidáním *jediného* axiómu (tzv. **axiómu rovnoběžnosti**) dostaneme geometrii eukleidovskou, resp. přidáním negace uvedeného axiómu geometrii hyperbolickou. Axióm rovnoběžnosti říká: „*V eukleidovské rovině lze každým bodem mimo přímku vést nejvýše jednu s ní se neprotínající přímku*“. Toto neplatí v hyperbolické rovině, kde vždy existuje nekonečně mnoho přímek, jež danou přímku neprotnou. Je nutné připomenout, že objev hyperbolické geometrie učinili, a to téměř ve stejné době a nezávisle na sobě, Němec Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Maďar János Bolyai (1802–1860) a Rus Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856). Podle posledně jmenovaného se hyperbolická geometrie také označuje jako **Lobačevského geometrie**. □

***Příklad* 6.1.4.** Dalším příkladem Cayley-Kleinovy geometrie je **eliptická geometrie**. Uvažujme projektivní prostor $\mathbb{P}_n$, jehož body jsou jednodimenzionální vektorové podprostory (tj. směry) vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. Nechť je dále definován skalární součin a velikost vektoru

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}.$$

Vzdáleností bodů A, B rozumíme úhel odpovídajících jednodimenzionálních vektorových podprostorů, tj. úhel vektorových zástupců $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$

$$\cos d(A, B) = \left| \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \right| ;$$

eliptická vzdálenost bodů se tedy pohybuje v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. **Eliptické transformace** jsou takové projektivity $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$, vůči nimž je eliptická vzdálenost invariantní. Ukazuje se, že jde o ty projektivní transformace, pro něž platí podmínka $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{C}$.

Pro každou eliptickou transformaci $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ platí

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x}'^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{A}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0,$$

a proto leží-li bod X na kvadrice $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$, potom na této kvadrice leží i jeho obraz X' v každé kolineaci $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{C}$. Odtud je vidět, že eliptická geometrie je Cayley-Kleinova geometrie s absolutní kvadrikou $\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = 0$. V případě, že $\mathbf{C}$ je jednotková matice, potom rovnice absolutní kvadriky Ω zní

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0.$$

Eliptická geometrie se odehrává např. v nevlastní nadrovině π_∞ rozšířeného eukleidovského prostoru $\overline{\mathbb{E}}_n$. Souřadnice vlastních bodů mají tvar $(1, \mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a nevlastní body mají souřadnice $(0, \mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Podobnosti v $\overline{\mathbb{E}}_n$ mají vyjádření

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{o}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} & \lambda \mathbf{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$ a $\lambda \neq 0$; speciálně zobrazení nevlastních bodů se odehrává podle vztahu

$$(0, \mathbf{x}) \mapsto (0, \lambda \mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Nevlastní nadrovina $x_0 = 0$, která je sama projektivním prostorem dimenze $(n - 1)$, je tedy podle výše uvedeného vybavena eliptickou geometrií, jejíž absolutním útvarem je kvadrika $x_0 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$. $\square$

Příloha A

Komplexní rozšíření reálného prostoru

Komplexní rozšíření reálného projektivního prostoru. V mnoha případech je vhodné provést tzv. **komplexní rozšíření** reálného projektivního prostoru $\mathbb{P}_n$ — obzvláště tehdy, řešíme-li polynomické rovnice, neboť ty mají v tělese komplexních čísel $\mathbb{C}$ *vždy* kořen (což v tělese reálných čísel $\mathbb{R}$ zaručeno není).

Rozšíříme lineární prostor $\mathbb{R}^{n+1}$ na komplexní $\mathbb{C}^{n+1}$ a uvažujeme příslušný projektivní prostor $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Bodem prostoru $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ tedy rozumíme všechny komplexní násobky vektoru $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1}$, tj.

$$\widetilde{\mathbf{z}} = \{\lambda\mathbf{z} : \ \lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0, \ \mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\}.$$

Jestliže dva *reálné* body nemají společný reálný násobek, potom samozřejmě nemají ani žádný komplexní násobek, a proto je rozšíření

$$\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbf{x} \in \mathbb{C}^{n+1}$$

dobře definované.

Je-li speciálně $\mathbb{P}_n = \overline{\mathbb{A}_n}$ rozšířený afinní prostor, potom hovoříme o komplexním rozšíření projektivně rozšířeného afinního prostoru — budeme značit $\overline{\mathbb{A}_n}(\mathbb{C})$ nebo stručně $\overline{\mathbb{A}_n^C}$. Vynecháním nevlastní nadroviny získáme komplexní rozšíření afinního prostoru $\mathbb{A}_n(\mathbb{C})$, popř. $\mathbb{A}_n^C$. Samozřejmě je možné hovořit i o komplexním rozšíření eukleidovského prostoru $\mathbb{E}_n(\mathbb{C})$, popř. $\mathbb{E}_n^C$ a jeho projektivním rozšíření $\overline{\mathbb{E}_n}(\mathbb{C})$, resp. $\overline{\mathbb{E}_n^C}$.

Na souřadnicích se uvedené rozšíření projeví zřejmým způsobem — budeme pracovat s body, jejichž souřadnice jsou komplexní. Samozřejmě i reálný bod může mít imaginární souřadnice; např. trojice $(1, 1, 1)$ a (i, i, i) představují zástupce téhož bodu v $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Nicméně je velmi snadné určit, zdali je bod s reprezentantem $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ reálný či nikoliv — nutnou a postačující podmínkou je, aby všechny poměry $z_i : z_j$ byly reálné.

Jestliže $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, potom aritmetický zástupce $\overline{\mathbf{z}} = (\overline{z_0}, \overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ je **komplexně sdružený** se $\mathbf{z}$. Obdobně budeme hovořit i o komplexně sdružených bodech $\widetilde{\mathbf{z}}$ a $\widetilde{\overline{\mathbf{z}}}$.

Věta A.1.1. Platí, že $\widetilde{\mathbf{z}} = \widetilde{\overline{\mathbf{z}}}$, právě když $\widetilde{\mathbf{z}}$ je reálný bod. $\square$

Důkaz: Jestliže $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ a $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x}$, kde $\lambda \in \mathbb{C}$, potom $\overline{\mathbf{z}} = \overline{\lambda\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\mathbf{x}$, a proto $\widetilde{\mathbf{z}} = \widetilde{\overline{\mathbf{z}}}$. Naopak jestliže $\widetilde{\mathbf{z}} = \widetilde{\overline{\mathbf{z}}}$, potom existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ takové, že $\overline{\mathbf{z}} = \lambda\mathbf{z}$. Z toho však plyne, že reálný vektor $\mathbf{x} = \mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}$ je roven $(1 + \lambda)\mathbf{z}$, a proto $\widetilde{\mathbf{z}} = \widetilde{\mathbf{x}}$ (je nutné pouze ošetřit případ, kdy $\mathbf{z}$ je ryze imaginarní, neboť potom by bylo $\mathbf{x} = \mathbf{o}$; v této situaci volíme např. $\mathbf{x} = i \cdot \mathbf{z}$). $\square$

Reálné a komplexní podprostory. Podprostor projektivního prostoru $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, který vzniká spojením reálných bodů, nazýváme **reálný podprostor**. *Reálná přímka* spojující body $\widetilde{\mathbf{a}}$ a $\widetilde{\mathbf{b}}$ s reálnými reprezentanty $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ obsahuje v $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ jednak všechny body $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ s $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ale i všechny body $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ s $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, jež už nemusejí být reálné. Zřejmě platí

Věta A.1.2. *Projektivní podprostor prostoru $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ je reálný, právě když je roven podprostoru komplexně sdruženému (tj. podprostoru, jež vznikl spojením komplexně sdružených bodů).* $\square$

Reálné podprostory jsou tedy samodružnými podprostory zobrazení

$$\psi : \ \mathbf{z} \mapsto \overline{\mathbf{z}}.$$

Navíc jelikož platí $\overline{\mathbf{n} \cdot \mathbf{z}} = \overline{\mathbf{n}} \cdot \overline{\mathbf{z}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{z} = 0$, potom nadrovina komplexně sdružená k nadrovině $\widetilde{\mathbf{n}}$ je $\widetilde{\overline{\mathbf{n}}}$.

Věta A.1.3. *Jestliže mají reálné podprostory G_1 a G_2 společný neprázdný průnik, potom je tento průnik reálný podprostor.* □

Důkaz plyne ihned ze vztahu $\overline{G_1 \cap G_2} = \overline{G_1} \cap \overline{G_2} = G_1 \cap G_2$. □

Věta A.1.4. *Imaginární bod $\widetilde{\mathbf{z}}$ náleží právě jedné reálné přímce, jež spojuje body $\widetilde{\mathbf{z}}$ a $\widetilde{\overline{\mathbf{z}}}$.* □

Důkaz: Přímka $\widetilde{\mathbf{z}} \vee \widetilde{\overline{\mathbf{z}}}$ je reálná, neboť je určena dvěma reálnými body $\widetilde{\mathbf{z} + \overline{\mathbf{z}}}$ a $\widetilde{i(\mathbf{z} - \overline{\mathbf{z}})}$. Tato přímka je jediná, neboť jinak by imaginární bod $\widetilde{\mathbf{z}}$ byl průnikem průnikem dvou reálných přímek a muselo by se jednat o reálný bod. □

Dualizací získáme další větu

Věta A.1.5. *Imaginární nadrovina $\widetilde{\mathbf{n}}$ obsahuje právě jeden reálný $(n-2)$-rozměrný podprostor, konkrétně její průnik s nadrovinou $\widetilde{\overline{\mathbf{n}}}$.* □

Reálné kolineace. Kolineaci v komplexním prostoru nazveme *reálná*, jestliže existuje projektivní soustava souřadnic, v níž je tato kolineace popsána reálným lineárním zobrazením. Nicméně toto zobrazení lze samozřejmě aplikovat i na imaginární body!

Navíc je nutné si uvědomit, že těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$ je algebraicky uzavřené (každá polynomická rovnice má kořen), a proto v prostoru $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ má každá kolineace alespoň jeden samodružný bod i nadrovinu.