MILAN SEKANINA
LEO BOČEK
MILAN KOČANDRLE
JAROSLAV ŠEDIVÝ

GEOMETRIE I

STÁTNÍ
PEDAGOGICKÉ
NAKLADATELSTVÍ
PRAHA

Zpracovali:
Doc. RNDr. Milan Sekanina, CSc., RNDr. Leo Boček, CSc., RNDr. Milan Kočandrle, CSc., RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc.
Lektorovali:
Doc. RNDr. Jarolím Bureš, CSc., prof. RNDr. Ernest Jucovič, DrSc.

Schváleno rozhodnutím ministerstva školství České socialistické republiky č. j. 24 800/84-31 ze dne 5. listopadu 1984 jako celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty matematicko-fyzikální, přírodovědeckých a pedagogických fakult studijního oboru 76-12-8 Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů aprobačního předmětu matematika.

OBSAH

PŘEDMLUVA

Tato kniha je prvním dílem učebnice geometrie pro studium matematiky učitelského směru na univerzitách. Byla zpracována podle platných celostátních osnov a jejím základem byly první tři kapitoly učebního textu L. Boček, M. Kočandrle: Geometrie I, vydaného v roce 1980 MFF UK Praha.

Výuka geometrie začíná v nejnižších třídách základní školy. Žáci postupně poznávají vlastnosti dvojrozměrného a trojrozměrného prostoru, studují význačné geometrické útvary, geometrická zobrazení, seznamují se se základy analytické geometrie. Cílem univerzitního studia geometrie v učitelském směru je seřadit geometrické poznatky získané na nižších stupních škol do systematicky budovaného celku, ukázat, jak se tyto poznatky staly základem tvorby obecnějších pojmů a teorií, zejména vícedimenzionálních prostorů. Tato zobecnění byla vynucena jednak systematizací geometrických poznatků, jednak potřebami jiných vědních disciplín.

Formalizace, která je nezbytná pro takové zpracování látky, nese s sebou jistý stupeň abstrakce. Snažili jsme se, aby při této nutné abstrakci byla vždy jasná souvislost s reálnou situací, a aby tak výchova ke geometrické představivosti zůstala jedním z hlavních článků výuky.

Autoři děkují oběma lektorům, prof. RNDr. E. Jucovičovi, DrSc., a doc. RNDr. J. Burešovi, CSc., za pečlivé pročtení rukopisu a cenné připomínky k jeho obsahu.

V Praze dne 20. 5. 1986

Autoři

ÚVOD

Základním úkolem geometrie je popis tzv. prostorových útvarů. Rozvojem této vědy se měnil jednak rozsah obsahu, jednak prostředky tohoto popisu. Po stránce obsahové bude základem našeho popisu pojem afinního a euklidovského prostoru, hlavními výrazovými prostředky bude teorie množin a algebra. Zatímco definice či konstrukce prostoru je záležitost geometrická, s teorií množin a algebrou jste se seznámili v potřebném rozsahu v přednáškách z algebry, popř. analýzy. V následujících řádcích stručně shrneme a připomeneme základní fakta z algebry.

1. Je-li $\mathbf{M}$ množina a je-li dáno zobrazení f: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$, říkáme, že f je násobením na množině $\mathbf{M}$. Místo symbolu $f(a, b)$ pro zápis funkční hodnoty v uspořádané dvojici $(a, b) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M}$ používáme i jiné symboly, např. $a + b$ nebo $a \,.\, b$ nebo prostě ab. Množinu $\mathbf{M}$, na níž je definováno násobení f, značíme často $(\mathbf{M}, f)$ (resp. $(\mathbf{M}, +)$ nebo $(\mathbf{M}, .)$).

Množina s násobením $(\mathbf{M}, .)$ se nazývá grupa, když platí

1. $a, b, c \in \mathbf{M} \Rightarrow a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$ (asociativní zákon);
2. existuje prvek $e \in \mathbf{M}$ (nazývaný neutrálním prvkem), pro nějž platí: $a \in \mathbf{M} \Rightarrow e \,.\, a = a \,.\, e = a$;
3. pro každý prvek $a \in \mathbf{M}$ existuje prvek $a^{-1} \in \mathbf{M}$ takový, že $a^{-1} \,.\, a = a \,.\, a^{-1} = e$.

Prvek a^{-1} se nazývá opačný k prvku a.

Když pro prvky $a, b \in \mathbf{M}$ platí $a \,.\, b = b \,.\, a$, říkáme, že prvky a a b jsou zaměnitelné. Jsou-li v grupě $(\mathbf{M}, .)$ každé dva prvky zaměnitelné, říkáme, že grupa $(\mathbf{M}, .)$ je Abelova. Násobení ., v němž každé dva prvky jsou zaměnitelné, nazýváme komutativní nebo abelovské.

V grupě se definuje n-tá mocnina a^n prvku a takto:
Je-li $n = 0$, klademe $a^0 = e$.
Je-li $n > 0$, definujeme indukcí $a^n = a^{n-1} \,.\, a$.
Je-li $n < 0$, položíme $a^n = (a^{-n})^{-1}$.

Je-li $(\mathbf{M}, +)$ Abelova grupa, užíváme tzv. aditivní symboliku a názvy. Tak místo neutrální prvek e užíváme pojmenování nulový prvek a značíme 0, opačný prvek místo a^{-1} značíme $-a$, místo a^n píšeme na.

2. Je-li $(\mathbf{M}, +)$ Abelova grupa a je-li na množině $\mathbf{M}$ dáno komutativní násobení . takové, že

1. $(\mathbf{M} - \{0\}, .)$ je grupa,
2. platí $a, b, c \in \mathbf{M} \Rightarrow a \,.\, (b + c) = (a \,.\, b) + (a \,.\, c)$ (tzv. distributivní zákon),

říkáme, že $\mathbf{M}$ je těleso a zapisujeme je $(\mathbf{M}, +, .)$.

Připomeňme, že místo $(a \,.\, b) + (a \,.\, c)$ obyčejně píšeme $a \,.\, b + a \,.\, c$. Příkladem tělesa je množina racionálních či reálných čísel s aritmetickým sčítáním a násobením. Obvykle budeme značit těleso jediným symbolem, a to většinou $\mathbf{T}$. Neutrální prvek násobení . obvykle značíme 1 a nazýváme jednotkový prvek tělesa $\mathbf{T}$. Prvek a^{-1} $(a \neq 0)$ nazýváme inverzní prvek k prvku a. Existuje-li celé kladné číslo m takové, že $m1 = 0$, potom nejmenší takové číslo m se nazývá charakteristika tělesa $\mathbf{T}$. Pokud takové m neexistuje, nazýváme $\mathbf{T}$ těleso charakteristiky 0 (nebo ∞). Těleso reálných čísel budeme značit $\mathbf{R}$.

Dalšími důležitými pojmy z teorie grup, jež budeme ve svém výkladu užívat, jsou podgrupa a normální podgrupa. Je-li $(\mathbf{M}, .)$ grupa, $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}$, $e \in \mathbf{M}_1$ a pro libovolné prvky $a, b \in \mathbf{M}_1$ také $a \,.\, b^{-1} \in \mathbf{M}_1$, říkáme, že $\mathbf{M}_1$ je podgrupa v $(\mathbf{M}, .)$. $\mathbf{M}_1$ je vzhledem k násobení . definovanému na $\mathbf{M}$ grupou. Je-li navíc pro každé $a \in \mathbf{M}_1$ a $b \in \mathbf{M}, b \,.\, a \,.\, b^{-1} \in \mathbf{M}_1$, říkáme, že $\mathbf{M}_1$ je normální (invariantní) podgrupa v $(\mathbf{M}, .)$.

3. Pro nás nejdůležitějšími příklady grup budou podgrupy grup definovaných následujícím způsobem:

Budiž dána množina $\mathbf{A}$. Množina $\{f; f$ je bijekce množiny $\mathbf{A}$ na $\mathbf{A}\}$ je vzhledem ke skládání zobrazení grupou. Připomeňme, že pro dvě zobrazení f a g je složení $f \circ g$ dáno předpisem: Pro každé $a \in \mathbf{A}$ $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Tak např. dostaneme grupu všech posunutí v trojrozměrném prostoru (či v rovině) jako speciální třídu bijekcí prostoru (roviny) na sebe. Popišme názorně, i když ne dostatečně systematicky, posunutí např. roviny takto:

Je-li f posunutí různé od identity v rovině ϱ, A, B body z ϱ, potom

1. $A \neq f(A)$;
2. přímky $Af(A)$, $Bf(B)$ jsou rovnoběžné;
3. úsečky $Af(A)$, $Bf(B)$ jsou stejně dlouhé;
4. body A, B, $f(A)$, $f(B)$, pokud $A \neq B$, leží v jedné uzavřené polorovině určené přímkou AB.

Jinými slovy úsečky $Af(A)$, $Bf(B)$ mají tutéž velikost a stejnou orientaci. Identické zobrazení pokládáme též za posunutí.

Snaha o vhodnější popis posunutí nás přivádí k pojmu vektor. Podmínky 2–4 z definice posunutí se dají nahradit podmínkou, že úsečky $Af(B)$ a $f(A)B$ mají společný střed. Říkáme, že tyto úsečky jsou ekvipolentní.

Na základě poznatků ze střední školy se dá ukázat, že posunutí v rovině či v prostoru tvoří Abelovu grupu (označme ji $\mathscr{T}$) vzhledem ke skládání zobrazení. Viděli jsme, že zadat posunutí různé od identity znamená přiřadit ke každému bodu A úsečku AA' tak, aby každé dvě takto získané úsečky $A_1A'_1$ a $A_2A'_2$ byly ekvipolentní, tj. aby úsečky $A_1A'_2$ a A'_1A_2 měly týž střed. Mějme tedy posunutí f a nějaké reálné číslo $a > 0$. Sestrojme pro každý bod A bod $g(A)$ takto:

1. $g(A)$ leží na polopřímce $Af(A)$.

2. Délka úsečky $Ag(A)$ je a-násobek délky úsečky $Af(A)$.

Po jisté námaze se dá dokázat, že zobrazení g takto získané je posunutí. Je-li $a < 0$, uvažujeme v bodě 1 polopřímku opačnou. Je-li $a = 0$, klademe $g(A) = A$, tj. dostáváme identické zobrazení. Tedy ke každému reálnému číslu a a posunutí f jsme přiřadili posunutí g, které označujeme též jako $a.f$. Tak jsme definovali zobrazení (tzv. násobení skalárem) $\mathbf{R} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$. Přitom se dá dokázat, že platí pro $f, g \in \mathcal{T}$, $a, b \in \mathbf{R}$ (když místo složení $f.g$ píšeme $f + g$)

V_1) $(a.b)f = a(bf)$,

V_2) $(a + b)f = af + bf$,

V_3) $a(f + g) = af + ag$,

V_4) $1.f = f$.

Proto množina $\mathcal{T}$ vzhledem ke skládání zobrazení (nyní je značíme +) a násobení skaláry tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$.

4. Obecně, je-li dána Abelova grupa $(\mathbf{G}, +)$ a těleso $\mathbf{T}$, spolu s násobením skaláry $\mathbf{T} \times \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ splňujícím pro $f, g \in \mathbf{G}$ a $a, b \in \mathbf{T}$ podmínky $V_1)-V_4)$, dostáváme vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Prvky grupy $(\mathbf{G}, +)$ se nazývají vektory, prvky tělesa $\mathbf{T}$ skaláry. Nulový prvek grupy $(\mathbf{G}, +)$ značíme $\mathbf{o}$. Teorie vektorových prostorů byla dostatečně osvětlena v algebře. Připomeňme jen pro nás nejdůležitější skutečnosti. Je-li $(\mathbf{G}, +)$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbf{G}$ vektory z $\mathbf{G}$, řekneme, že tyto vektory jsou (lineárně) nezávislé, když platí:

$$x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{T}, \qquad x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{u}_k = \mathbf{o} \Rightarrow x_1 = \ldots = x_k = 0.$$

Jinak vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ nazýváme (lineárně) závislé. Existují-li pro vektor $\boldsymbol{v}$ prvky $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{T}$ tak, že $\boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{u}_k$, říkáme, že vektor $\boldsymbol{v}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$. Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ nezávislé a každý vektor z $\mathbf{G}$ je lineární kombinací těchto vektorů, říkáme, že uspořádaná k-tice vektorů $\mathcal{B} = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{G}, +)$. Potom každá báze v $(\mathbf{G}, +)$ má k vektorů. Říkáme, že $(\mathbf{G}, +)$ je k-rozměrný vektorový prostor. Prostor, skládající se z jediného vektoru $\mathbf{o}$, má za bázi prázdnou množinu a jeho dimenze je 0. k-rozměrný vektorový prostor označujeme většinou symbolem $\mathbf{V}_k$ (popř. $\mathbf{W}_k$, někdy též $\mathbf{V}$ nebo $\mathbf{W}$). Číslo k nazýváme rozměrem neboli dimenze prostoru $\mathbf{V}_k$ a píšeme $k = \dim \mathbf{V}_k$. Dá se ukázat, že jsou-li $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_h \in \mathbf{V}_k$ nezávislé vektory, potom $h \leqq k$ a existují vektory $\boldsymbol{u}_{h+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ takové, že $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ je báze ve $\mathbf{V}_k$ (Steinitzova věta).

Je-li $\mathbf{V}_k$ k-rozměrný prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a je-li $\mathbf{V}$ podmnožina ve $\mathbf{V}_k$ taková, že

a) $\mathbf{V} \neq \emptyset$,

b) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}$,

c) $a \in \mathbf{T}, \boldsymbol{u} \in \mathbf{V} \Rightarrow a\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}$,

potom $\mathbf{V}$ je vektorový podprostor ve $\mathbf{V}_k$. $\mathbf{V}$ má konečnou dimenzi a $\dim \mathbf{V} \leqq k$. Přitom $\dim \{\mathbf{o}\} = 0$.

Jsou-li $\mathbf{V}$ a $\mathbf{W}$ vektorové prostory nad týmž tělesem $\mathbf{T}$ a platí-li pro zobrazení $f: \mathbf{V} \to \mathbf{W}$

$$a, b \in \mathbf{T}, \qquad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V} \Rightarrow f(a.\boldsymbol{u} + b.\boldsymbol{v}) = a.f(\boldsymbol{u}) + b.f(\boldsymbol{v}),$$

říkáme, že f je homomorfní zobrazení prostoru $\mathbf{V}$ do prostoru $\mathbf{W}$. Je-li f bijekce, nazývá se f izomorfismus prostoru $\mathbf{V}$ na prostor $\mathbf{W}$ a prostor $\mathbf{V}$ se nazývá izomorfní s prostorem $\mathbf{W}$. Potom f^{-1} je izomorfismus $\mathbf{W}$ na $\mathbf{V}$ a relace „být izomorfní" je reflexívní, symetrická a tranzitivní na třídě všech vektorových prostorů nad tělesem $\mathbf{T}$. Důležitým příkladem k-rozměrných prostorů je prostor, popsaný následujícím způsobem.

Nechť $\mathbf{T}^k = \{(a_1, \ldots, a_k); a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}\}$ a nechť

$$(1) \qquad (a_1, \ldots, a_k) + (b_1, \ldots, b_k) = (a_1 + b_1, \ldots, a_k + b_k)$$

a pro $a \in \mathbf{T}$

$$(2) \qquad a.(a_1, \ldots, a_k) = (a.a_1, \ldots, a.a_k).$$

Snadno se vidí, že vzhledem ke sčítání + popsanému (1) a násobení skalárem danému (2) je $\mathbf{T}^k$ k-rozměrný vektorový prostor, kde jednou z bází je

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, \ldots, 1).$$

Izomorfismus f k-rozměrného prostoru $\mathbf{V}_k$ na prostor $\mathbf{T}^k$ dostaneme takto: Zvolíme ve $\mathbf{V}_k$ bázi $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ a potom pro každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_k$ existují (jednoznačně určené) prvky $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{T}$ tak, že

$$(3) \qquad \boldsymbol{v} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_k\boldsymbol{u}_k.$$

Položíme $f(\boldsymbol{v}) = (x_1, \ldots, x_k)$ a takto definované zobrazení $f: \mathbf{V}_k \to \mathbf{T}^k$ je izomorfismus.

Rovnice tvaru (3) můžeme použít pro konstrukci bází ve $\mathbf{V}_k$. Je-li opět $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ báze ve $\mathbf{V}_k$ a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_h \in \mathbf{V}_k$, přičemž

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{k1}\boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{v}_2 &= a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{k2}\boldsymbol{u}_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{v}_h &= a_{1h}\boldsymbol{u}_1 + a_{2h}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{kh}\boldsymbol{u}_k, \end{aligned}$$

pak vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_h$ jsou nezávislé, právě když matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{k1} \\ a_{12}, \ldots, a_{k2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{1h}, \ldots, a_{kh} \end{pmatrix}$$

má hodnost h. Speciálně, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ je báze, právě když determinant matice $\boldsymbol{A}$ je nenulový ($\det \boldsymbol{A} \neq 0$).

5. Zabývejme se nyní podprostory $\mathbf{V}$ ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_k$. Předně, pokud $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h$ jsou vektory z $\mathbf{V}_k$, potom

$$\mathbf{V}' = \{x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_h\mathbf{v}_h;\ x_1, \ldots, x_h \in \mathbf{T}\}$$

je vektorový podprostor ve $\mathbf{V}$, $\dim \mathbf{V}' \leqq h$. Přitom $\dim \mathbf{V}' = h$ právě když $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h$ jsou nezávislé vektory. Potom $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h$ tvoří bázi ve $\mathbf{V}'$. O prostoru $\mathbf{V}'$ říkáme, že je generován vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h$, a píšeme $\mathbf{V}' = [\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h\}]$. $\mathbf{V}'$ je nejmenší (vzhledem k množinové inkluzi) podprostor ve $\mathbf{V}_k$, obsahující vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_h$. Obecněji, je-li $\mathbf{M} \subset \mathbf{V}_k$, značíme symbolem $[\mathbf{M}]$ nejmenší vektorový podprostor ve $\mathbf{V}_k$ obsahující množinu $\mathbf{M}$. $[\mathbf{M}]$ je roven průniku systému $\mathscr{S}$ všech podprostorů $\mathbf{V}$ ve $\mathbf{V}_k$ obsahujících $\mathbf{M}$. Tedy $[\mathbf{M}] = \bigcap_{\mathbf{V}_k \supset \mathbf{V} \supset \mathbf{M}} \mathbf{V}$. To, že průnik neprázdného systému podprostorů ve $\mathbf{V}_k$ je opět vektorový podprostor ve $\mathbf{V}_k$, plyne snadno z definice vektorového podprostoru. Speciálně, mějme dva podprostory $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}''$ ve $\mathbf{V}_k$. Potom též $\mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''$, $[\mathbf{V}' \cup \mathbf{V}'']$ jsou podprostory ve $\mathbf{V}_k$ a platí

$$\dim \mathbf{V}' + \dim \mathbf{V}'' = \dim [\mathbf{V}' \cup \mathbf{V}''] + \dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''.$$

Přitom bázi ve $[\mathbf{V}' \cup \mathbf{V}'']$ získáme takto: Zvolíme bázi ve $\mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''$ (pokud $\mathbf{V}' \cap \mathbf{V}'' = \{\mathbf{o}\}$, je tato báze prázdná posloupnost) $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}$, tuto bázi doplníme na báze ve $\mathbf{V}'$ a $\mathbf{V}''$, tj.

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{\dim \mathbf{V}' - \dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}$$
$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{\dim \mathbf{V}'' - \dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''},$$

a potom

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{\dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{\dim \mathbf{V}' - \dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{\dim \mathbf{V}'' - \dim \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}''}$$

je báze ve $[\mathbf{V}' \cup \mathbf{V}'']$.

6. Důležité použití má vektorový prostor $\mathbf{T}^k$ při řešení systémů lineárních rovnic. Nechť

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k &= a_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2k}x_k &= a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hk}x_k &= a_h \end{aligned} \tag{4}$$

je systém lineárních rovnic, přičemž $a_{ij} \in \mathbf{T}$, $a_i \in \mathbf{T}$. Víme, že řešením systému (4) je každá uspořádaná k-tice $(b_1, \ldots, b_k) \in \mathbf{T}^k$, pro niž platí

$$\begin{aligned} a_{11}b_1 + \ldots + a_{1k}b_k &= a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}b_1 + \ldots + a_{hk}b_k &= a_h. \end{aligned}$$

Řešení existuje, právě když

$$\text{hodnost} \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}, \ldots, a_{hk} \end{pmatrix} = \text{hodnost} \begin{pmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1k}, a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}, \ldots, a_{hk}, a_h \end{pmatrix},$$

a toto číslo označíme p.
Systém

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1k}x_k &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}x_1 + \ldots + a_{hk}x_k &= 0 \end{aligned}$$

nazveme systémem homogenních lineárních rovnic přidruženým k (4). Systém homogenních lineárních rovnic má vždy řešení a všechna jeho řešení tvoří vektorový podprostor dimenze $k - p$ v prostoru $\mathbf{T}^k$. Označíme-li tento podprostor $\mathbf{V}$ a $(b_1, \ldots, b_k)$ je nějaké řešení systému (4), potom systém

$$\mathbf{V}' = \{(b_1, \ldots, b_k) + (c_1, \ldots, c_k);\ (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbf{V}\}$$

je množinou všech řešení systému (4).

Další poznatky z algebry připomeneme na místě, kde jich bude potřeba.

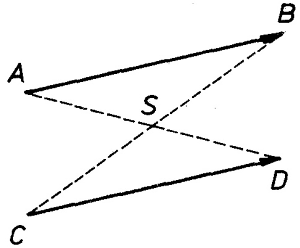
KAPITOLA 1

AFINNÍ PROSTOR

Při výkladu afinního prostoru navážeme na látku z geometrie ze základní školy. Na základní škole se názorně objasní význam pojmů „bod“, „přímka“, „rovina“, „prostor“ a dalších, které v geometrii používáme. Pak jsou zřejmá i některá jednoduchá tvrzení, např. že dvěma body prochází právě jedna přímka atd. Na důkaz takových tvrzení se nikoho ani nenapadne ptát, a kdyby ho to napadlo, dostalo by se mu pravděpodobně odpovědi, že přiloží-li pravítko, je vidět, že dva body lze spojit jednou přímkou. Pravítko by pak bylo popsáno jako předmět, který má hrany rovné, nebo chceme-li, přímé. Přímka by tedy byla popsána pomocí pravítka a pravítko pomocí přímky. Na střední škole je sice v učebnicích zmínka o axiómech a axiomatickém budování geometrie, ale celkový přístup opět musí vycházet z názoru. Víme, že má-li se nějaká matematická disciplína popsat přesně, není podobný přístup možný. Při přesném budování jakékoli matematické teorie používáme axiomatickou metodu. Princip této metody spočívá v tom, že máme dánu jednu nebo více základních množin a nějakou množinu relací pro prvky z těchto množin. Uvedené relace jsou popsány vlastnostmi, které musí tyto relace mít. Zmíněné vlastnosti se nazývají axiómy. Pojmy označující prvky ze základních množin a zmíněné relace se nazývají primitivní pojmy. Ze sepsaných axiómů již potom všechna tvrzení odvozujeme deduktivně. Příkladem matematických teorií budovaných axiomaticky jsou např. teorie grup, okruhů, těles a vektorových prostorů, které byly probrány v algebře. Při budování jakékoli teorie axiomatickým způsobem můžeme postupovat dvěma cestami: buď tak, že při budování teorie nepožadujeme žádné matematické znalosti a sepíšeme všechny primitivní pojmy a axiómy, nebo tak, že využijeme některou teorii, kterou jsme již dříve axiomaticky vybudovali, a za část primitivních pojmů a axiómů nové teorie zvolíme primitivní pojmy a axiómy teorie již vybudované. Je vidět, že druhý způsob má tu výhodu, že můžeme použít věty, které jsme již dříve dokázali, a výklad tudíž může postupovat daleko rychleji a ekonomičtěji. První způsob je v algebře např. použit při budování teorie grup. Budujeme-li teorii těles (komutativních), volíme za axiómy tělesa jak pro operaci sčítání, tak pro operaci násobení axiómy Abelovy grupy. Navíc přidáme zákon distributivní. Pro jednotlivé operace, sčítání i násobení, nemusíme tedy již u těles dokazovat věty, které byly dokázány v teorii grup.

Druhý způsob budování axiomatické teorie použijeme i my. Při budování geometrických teorií použijeme již známou algebraickou teorii vektorových prostorů. Proto si nejdříve uvědomíme, jakým způsobem se v geometrii vektory na střední škole zavádějí.

Na střední škole se vychází z toho, že pojmy „bod", „přímka", „rovina" atd. jsou známé. Potom se řekne, že dvě orientované úsečky AB a CD určují stejný vektor, jsou-li rovnoběžné, mají-li stejný směr a stejnou velikost. Množinu všech orientovaných úseček určujících stejný vektor nazveme vektor. Jiný používaný způsob zavedení vektorů je ten, že vyšetřujeme množinu všech uspořádaných dvojic bodů a řekneme, že dvojice (A, B) určuje stejný vektor jako dvojice (C, D), mají-li dvojice (A, D) a (B, C) společný střed (viz obr. 1). Vektor je pak definován jako množina všech uspořádaných dvojic bodů, určujících stejný vektor. Na obr. 1 jsou vyznačeny též orientované úsečky AB a CD, aby bylo patrné, že oba způsoby zavedení jsou ekvivalentní. Každý vektor je určen libovolnou uspořádanou dvojicí bodů, která do něj patří. Vektor je, jak již bylo řečeno, množina uspořádaných dvojic. Každá tato dvojice určující vektor se nazývá umístění tohoto vektoru.



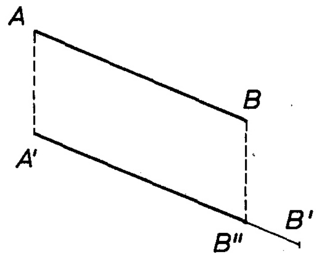
Obr. 1

Vektory v rovině nebo v prostoru můžeme sčítat a násobit reálným číslem. Sčítání je definováno tak, že je-li dvojice (X, Y) umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$ a dvojice (Y, Z) umístěním vektoru $\boldsymbol{v}$, je dvojice (X, Z) umístěním vektoru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Násobení reálným číslem je definováno tak, že je-li dvojice (X, Y) umístěním vektoru $\boldsymbol{u}$, a je-li c reálné číslo, má vektor $c\boldsymbol{u}$ umístění (X, Y'), kde Y' je obraz bodu Y při stejnolehlosti s koeficientem c a středem X. Ukáže se, že zavedené operace mají všechny vlastnosti, které z vysokoškolské algebry známe jako axiómy vektorového prostoru.

Na začátku našeho výkladu si budeme všímat vlastností, které mohou být popsány pomocí vektorů, aniž bychom pracovali s jejich délkami. Budou to zejména vlastnosti, které se týkají vzájemné polohy bodů, přímek a rovin, popřípadě polopřímek a polorovin, tedy tzv. lineárních útvarů. Budeme je nazývat, z důvodů, které vysvitnou později, afinní vlastnosti. Geometrie, která se jimi zabývá, se nazývá afinní geometrie. Jinými slovy řečeno, v první kapitole studujeme rovinu nebo prostor tak, jako bychom neuměli či nemohli měřit vzdálenosti. S tím například souvisí i to, že zatím nebudeme mluvit o měření úhlu, obsahu obrazců

apod. Rovina či prostor, které budou předmětem takto omezených úvah, budeme nazývat afinní rovina či afinní prostor.

O dvou přímkách v afinním prostoru můžeme říci, kdy jsou rovnoběžné. To je tehdy, leží-li v jedné rovině, a pokud jsou různé, tak nemají společný bod. Máme-li dvě rovnoběžné úsečky (tj. úsečky ležící v rovnoběžných přímkách), dovedeme je co do velikosti porovnat, aniž bychom znali jejich délky. Podobně o takových úsečkách můžeme zjistit, zda $A'B'$ je dvojnásobkem či obecně k-násobkem úsečky AB, popřípadě, zda je to k-tý díl úsečky AB, tj. $(1/k)$-násobek úsečky AB, obecněji (p/k)-násobek, a pomocí limitního přechodu n-násobek úsečky AB, kde n je kladné reálné číslo (viz obr. 2). Mimo jiné tedy víme, kdy bod S je středem úsečky AB. Z toho už se snadno dostaneme k pojmu vektor i vektorový prostor nad tělesem reálných čísel.



Obr. 2

Dříve než přistoupíme k slíbené axiomatické definici afinní roviny a afinního prostoru poznamenejme, že v řadě úvah nebude podstatné, že máme dvojrozměrný či trojrozměrný prostor. Většina úvah může být provedena týmž způsobem obecně pro n-rozměrný prostor. Proto axiomatická definice se týká n-rozměrného afinního prostoru. Toto zobecnění není samoúčelné. Umožní získat aplikovatelné poznatky nejen pro studium obyčejného prostoru, který nás obklopuje, ale též v jiných oblastech matematiky i fyziky, kde potřebujeme popsat zkoumané objekty více než dvěma nebo třemi reálnými čísly – např. v Minkovského časoprostoru.

Pokud budeme nadále používat vektorové prostory, budeme vždy automaticky předpokládat, že jde o reálné vektorové prostory. Značná část zkoumání, která budeme provádět v první kapitole, by šla dělat stejným způsobem, kdybychom místo reálných vektorových prostorů používali vektorové prostory nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$ a místo reálných čísel prvky tohoto tělesa $\mathbf{T}$. Jde o odstavce 1.1 – 1.6, 1.8, 1.12. Odstavec 1.7 je možné také zobecnit tak, že místo reálných čísel vezmeme těleso $\mathbf{T}$, ale musíme předpokládat, že toto těleso $\mathbf{T}$ není charakteristiky 2 (tj. že v něm neplatí rovnost $1 + 1 = 0$). V ostatních odstavcích první kapitoly je použití reálných čísel podstatné (odstavce 1.9, 1.10, 1.11) a tvrzení v těchto odstavcích obsažená nejdou jednoduchým způsobem zobecnit tak, že bychom těleso reálných čísel nahradili obecným tělesem $\mathbf{T}$ (na některých místech v těchto odstavcích je možné těleso reálných čísel nahradit nějakým jeho podtělesem – např. tělesem racionálních čísel).

Protože budeme muset nadále odlišit rovinu a prostor, který známe ze střední školy, od prostorů, které dále zavedeme, budeme rovinu, resp. prostor známý ze střední školy nazývat fyzikální rovina, resp. fyzikální prostor. Tento název by měl vystihovat to, že při zavádění pojmů a vět v tomto prostoru se využívá fyzikálních pojmů a prostoru, v kterém žijeme, např. přímka se v podstatě bere jako dráha světelného paprsku apod. Tento fyzikální prostor bude pro nás velmi důležitý. Při budování geometrie budeme totiž názorné představy stále používat. Musíme si však uvědomit, že názorná představa nás může přivést jenom k tomu, jaké pojmy se mají zavádět, popřípadě k tomu, jaké věty pro tyto pojmy budou platit. V žádném případě však nelze vynechat důkaz věty s odůvodněním: Z obrázku je zřejmé, že .... Každou větu je nutno deduktivně dokázat z axiómů nebo z vět již dokázaných. I u jednoduchých tvrzení, která nebudou dokazována a jejichž důkaz bude přenechán čtenáři jako cvičení, je nutné, aby každý provedl skutečně deduktivní důkaz a nespokojil se s nakreslením obrázku.

1.1. Základní vlastnosti afinního prostoru

Jak už jsme uvedli na počátku kapitoly, budeme v tomto odstavci, stejně jako v celé učebnici, pracovat jen s reálnými vektorovými prostory. Celý tento odstavec by však zůstal v platnosti, kdybychom nadále místo množiny reálných čísel brali libovolné těleso $\mathbf{T}$ a místo reálného vektorového prostoru vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Při zavedení afinního prostoru budeme vycházet ze známých vlastností bodů a vektorů v rovině, které byly uvedeny na počátku kapitoly, to znamená, že budeme axiomaticky budovat geometrii tak, aby poznatky v naší nově budované geometrii byly v souladu s poznatky z geometrie, které známe ze střední školy. Přitom pochopitelně při zavádění nových pojmů nebo při důkazech nových vět se nebudeme o středoškolskou geometrii opírat, ale budeme používat jen definice a věty které jsme již vyslovili (a dokázali). Použijeme přitom axiomatický přístup s velmi jednoduchým systémem axiómů. Primitivními pojmy budou: body, vektory a zobrazení přiřazující každým dvěma bodům vektor. Za axiómy vezmeme následující dvě vlastnosti, které ve fyzikálním prostoru jsou zřejmé:

I. Jsou-li X, Y, Z libovolné body, pak sečteme-li vektor určený dvojicí (X, Y) s vektorem určeným dvojicí (Y, Z), dostáváme vektor určený dvojicí (X, Z).

II. Zvolíme-li pevně počátek P, pak přiřadíme-li každému bodu X vektor s počátkem P a koncovým bodem X (tzv. radiusvektor bodu X), dostáváme vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech bodů na množinu všech vektorů.

Nyní již můžeme vyslovit definici afinního prostoru. V této definici v podstatě jen zopakujeme, co jsme již uvedli, přitom zobrazení, které každé dvojici bodů přiřadí vektor touto dvojicí určený, budeme označovat symbolem f.

Definice 1.1.1. Mějme dánu neprázdnou množinu $\mathbf{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ dimenze n a zobrazení f množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$. Trojici $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ nazýváme *n-rozměrný afinní prostor*, jestliže platí:

1. Pro každé $X, Y, Z \in \mathbf{A}$ je $f(X, Y) + f(Y, Z) = f(X, Z)$.

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že zobrazení f_P množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$, přiřazující každému $X \in \mathbf{A}$ vektor $f(P, X)$, je vzájemně jednoznačné.

Množinu $\mathbf{A}$ nazýváme *nositel* afinního prostoru, vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ nazýváme jeho *zaměření*. Afinní prostor $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ označujeme symbolem $\mathbf{A}_n$. Prvky množiny $\mathbf{A}$ nazýváme *body* afinního prostoru. Afinní prostor dimenze 1 nazýváme *afinní přímka*, afinní prostor dimenze 2 nazýváme *afinní rovina*.

Poznámka 1. V případě, že bychom v definici afinního prostoru použili vektorový prostor nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$, nazývali bychom příslušný afinní prostor *afinní prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$. Afinní prostor zavedený v definici 1.1.1 bychom pak nazývali *reálný afinní prostor*.

Poznámka 2. Víme, že zvláštním případem vektorového prostoru je tzv. triviální vektorový prostor obsahující právě jeden vektor – nulový vektor. Dimenze tohoto vektorového prostoru se definitoricky klade rovna nule. Buď nyní $\{X\}$ libovolná jednoprvková množina obsahující jediný prvek X a $\mathbf{V}$ buď zmíněný triviální vektorový prostor. Kartézský součin $\{X\} \times \{X\}$ obsahuje jedinou dvojici (X, X). Přiřadíme-li této dvojici vektor $\mathbf{o} \in \mathbf{V}$, je tím definováno zobrazení f množiny $\{X\} \times \{X\}$ do $\mathbf{V}$. Je zřejmé, že trojice $(\{X\}, \mathbf{V}, f)$ je afinní prostor dimenze 0. Je-li obráceně $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{V}}, \bar{f})$ afinní prostor dimenze 0, musí být vektorový prostor $\bar{\mathbf{V}}$ triviální a množina $\bar{\mathbf{A}}$ musí být jednoprvková (podle bodu 2 z definice 1.1.1 existuje vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\bar{\mathbf{A}}$ na množinu $\bar{\mathbf{V}}$), to znamená, že můžeme psát $\bar{\mathbf{A}} = \{\bar{X}\}$, a zobrazení $\bar{f}$ pak musí být definováno předpisem $\bar{f}(\bar{X}, \bar{X}) = \mathbf{o}$.

Vlastnost, že X je bodem afinního prostoru $\mathbf{A}_n$, budeme nadále zapisovat ve tvaru $X \in \mathbf{A}_n$, tj. používáme k zápisu uvedené vlastnosti stejného symbolu, který se používá pro vyjádření toho, že prvek patří do nějaké množiny. V našem případě však to, že X je bodem prostoru $\mathbf{A}_n$, znamená, že X je prvkem množiny $\mathbf{A}$.

Poznámka 3. Snadno se přesvědčíme, že v afinním prostoru je vlastnost 2 definice 1.1.1 splněna pro každý bod $\bar{P} \in \mathbf{A}_n$. Jestliže si totiž sestrojíme pro body $P, \bar{P} \in \mathbf{A}_n$ příslušná zobrazení f_P, $f_{\bar{P}}$ (tj. pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ klademe $f_P(X) = f(P, X)$, resp. $f_{\bar{P}}(X) = f(\bar{P}, X)$), můžeme se přesvědčit, že je-li zobrazení f_P vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$, je i zobrazení $f_{\bar{P}}$ vzájemně jednoznačné. To je patrné z toho, že podle vlastnosti 1 z definice 1.1.1 je

$f_{\bar{P}}(X) = f(\bar{P}, P) + f_P(X)$ pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$, a tudíž zobrazení $f_{\bar{P}}$ je složením zobrazení f_P se zobrazením φ prostoru $\mathbf{V}_n$ na sebe, přiřazujícím každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ vektor $\mathbf{x} + f(\bar{P}, P)$. Protože obě zobrazení f_P i φ jsou vzájemně jednoznačná, je i jejich složení – zobrazení $f_{\bar{P}}$ vzájemně jednoznačné.

Budeme-li míti dán pevný afinní prostor $\mathbf{A}_n$, budeme nadále pro každé dva body $X, Y \in \mathbf{A}_n$ zapisovat vektor $f(X, Y)$ ve tvaru $Y - X$. To znamená, že písmeno f vlastně nahradíme relačním znaménkem „$-$". Afinní prostor $\mathbf{A}_n$ pak budeme psát ve tvaru $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, „-")$. Zápis použitého zobrazení pomocí písmena f, popřípadě pomocí jiného písmena, budeme používat jen tehdy, budeme-li zkoumat dva afinní prostory mající stejnou množinu $\mathbf{A}$ i vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ a lišící se v zobrazení f (tento případ nastane většinou jen v příkladech a cvičeních).

Poněkud méně přesně, ale snad o něco názorněji by bylo možno definici afinního prostoru vyslovit v tomto tvaru: Množinu $\mathbf{A}$ nazýváme afinním prostorem dimenze n, jestliže každým dvěma bodům $X, Y \in \mathbf{A}$ je přiřazen vektor označovaný $Y - X$ z daného vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$, přičemž platí:

1. $(Y - X) + (Z - Y) = Z - X$, pro každé tři body $X, Y, Z \in \mathbf{A}$.

2. Existuje $P \in \mathbf{A}$ tak, že ke každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ existuje právě jeden bod $X \in \mathbf{A}$, pro který platí $X - P = \mathbf{u}$.

Nepřesnost právě vyslovené definice spočívá v tom, že máme-li dánu množinu $\mathbf{A}$, můžeme ji doplnit na trojici $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ (viz definice 1.1.1) mnoha způsoby. Jak uvidíme i v příkladech 1 a 3, může se stát, že budou-li $(\mathbf{A}, \mathbf{V}'_n, f')$ a $(\mathbf{A}, \mathbf{V}''_n, f'')$ dvě takové trojice, může být trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}'_n, f')$ afinním prostorem, zatímco trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}''_n, f'')$ afinním prostorem nebude. Proto nelze prohlašovat, že množina $\mathbf{A}$ je nebo není afinním prostorem tak, jak to bylo právě uvedeno v textu, ale vždy musíme brát v úvahu i vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ a (to hlavně) zobrazení f.

Abychom co nejlépe pochopili pojem afinní prostor, uvedeme nyní několik příkladů.

Příklad 1. Mějme dánu trojici $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$, přičemž $\mathbf{A} = \mathbf{R}^n$ (množina všech n-tic reálných čísel) a $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^n$ (operace vektorového prostoru jsou na $\mathbf{R}^n$ definovány obvyklým způsobem – tj. pro $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, je $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$ a pro $t \in \mathbf{R}$ je $t\mathbf{u} = (tu_1, \ldots, tu_n)$). Zobrazení f nechť každým dvěma bodům $X, Y \in \mathbf{A}$, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ přiřazuje vektor $f(X, Y) = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$. Potom je

$$\begin{aligned} &f(X, Y) + f(Y, Z) = \\ &= (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) + (z_1 - y_1, \ldots, z_n - y_n) = \\ &= (z_1 - x_1, \ldots, z_n - x_n) = f(X, Z). \end{aligned}$$

To znamená, že zobrazení f splňuje vlastnost 1 z definice afinního prostoru. Je-li $P \in \mathbf{A}$, $P = (p_1, \ldots, p_n)$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, pak pro to, aby bylo $f(P, X) = \mathbf{u}$, musí být $(x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n) = (u_1, \ldots, u_n)$, a tedy $x_i = p_i + u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ke

každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$ tudíž existuje právě jeden bod $X \in \mathbf{A}$ tak, že je $f(P, X) = \mathbf{u}$. Zobrazení f má tedy i vlastnost 2 z definice afinního prostoru a trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ je tedy afinní prostor.

Příklad 2. Položme $\mathbf{A} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ a pro $X, Y \in \mathbf{A}$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ pišme $f(X, Y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.

Snadno se přesvědčíme, že trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ splňuje vlastnost 1 z definice afinního prostoru a nesplňuje vlastnost 2, neboť zobrazení f_P (viz definice 1.1.1) je sice zobrazení množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ na $\mathbf{V}$, ale není to zobrazení prosté (pro $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Z = (x_1, x_2, z)$ je $f_P(X) = f_P(Z)$, a přitom je $X \neq Z$ pro $x_3 \neq z$).

Příklad 3. Položme $\mathbf{A} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$ a pro $X, Y \in \mathbf{A}$, $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ pišme $f(X, Y) = (x_1 - y_2, x_2 - y_3, x_3 - y_1)$.

Lze ukázat, že trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ nesplňuje vlastnost 1 z definice afinního prostoru. Přitom vlastnost 2 je splněna. Trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ tedy, stejně jako v příkladu 2, není afinní prostor.

Příklad 4. Položme $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_2 > 0\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ a pro každé $X, Y \in \mathbf{A}$, $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ pišme

$$f(X, Y) = (x_1 - y_1 + \log(x_2/y_2),\ x_1 - y_1 - \log(x_2/y_2)). \tag{1}$$

Má se zjistit, zda trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ je afinní prostor.

Řešení: Budeme ověřovat vlastnosti 1 a 2 z definice 1.1.1. Dosazením do (1) vyjádříme $f(Y, Z)$. Tento výraz sečteme s $f(X, Y)$. Použijeme-li zřejmého tvrzení $\log(x_2/y_2) + \log(y_2/z_2) = \log(x_2/z_2)$, vidíme, že vlastnost 1 z definice 1.1.1 je splněna. Pro $P \in \mathbf{A}$, $P = (p_1, p_2)$ je $f(P, X) = (p_1 - x_1 + \log(p_2/x_2),\ p_1 - x_1 - \log(p_2/x_2))$. Zvolme $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a hledejme $X \in \mathbf{A}$ tak, aby bylo $f(P, X) = \mathbf{u}$. K tomu musí být

$$\begin{aligned} p_1 - x_1 + \log(p_2/x_2) &= u_1 \\ p_1 - x_1 - \log(p_2/x_2) &= u_2 . \end{aligned}$$

Sečtením, resp. odečtením těchto rovnic získáme

$$\begin{aligned} 2p_1 - 2x_1 &= u_1 + u_2 \\ 2\log(p_2/x_2) &= u_1 - u_2 . \end{aligned}$$

Odtud ekvivalentními úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= (1/2)(2p_1 - u_1 - u_2), \\ x_2 &= p_2 \cdot 10^{(u_2 - u_1)/2}. \end{aligned}$$

Vidíme, že zobrazení f splňuje i druhou vlastnost z definice 1.1.1, a trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}, f)$ je tedy dvojrozměrný afinní prostor.

Od této chvíle budeme předpokládat, že symbol $\mathbf{A}_n$ označuje daný afinní prostor s množinou bodů $\mathbf{A}$ a se zaměřením $\mathbf{V}_n$, tj. $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, „-")$. Z vlastnosti 2 definice 1.1.1 vyplývá, že k danému bodu $X \in \mathbf{A}_n$ a k danému vektoru $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n$ existuje právě jeden bod $Y \in \mathbf{A}_n$ tak, že $Y - X = \boldsymbol{u}$. Bod Y budeme označovat $X + \boldsymbol{u}$, tj. budeme psát $Y = X + \boldsymbol{u}$. Pro body $X, Y \in \mathbf{A}_n$ a vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n$ tedy platí rovnost $Y = X + \boldsymbol{u}$ právě tehdy, je-li $Y - X = \boldsymbol{u}$. Místo $Y + (-\boldsymbol{u})$ budeme nadále psát jen $Y - \boldsymbol{u}$. K bodu můžeme tedy, podle zavedení operace „+", přičíst vektor (nebo odečíst vektor od bodu) a výsledkem je opět bod afinního prostoru. Ovšem např. výraz $\boldsymbol{u} - Y$ není definován a nelze mu dát žádný rozumný smysl (právě tak jako výrazu $X + Y$, kde $X, Y \in \mathbf{A}_n$).

Poznámka 4. Musíme si uvědomit, že z toho, že vektor $f(X, Y)$ zapisujeme ve tvaru rozdílu $Y - X$, nikterak neplyne, že bychom na počítání s body afinního prostoru, popřípadě s vektory zaměření tohoto afinního prostoru, mohli přenášet pravidla počítání, která pro symboly $+$, $-$ platí např. v teorii reálných čísel. Při odvozování početních pravidel pro nyní zavedené symboly $+$, $-$ musíme důsledně vycházet jen z vlastností 1, 2 z definice 1.1.1. Početní pravidla dává věta 1.1.1, kterou nyní vyslovíme a dokážeme. Tato početní pravidla budou nadále používána zcela automaticky bez jakýchkoli odkazů. Každý proto udělá dobře, když se zmíněná pravidla dokonale naučí.

Věta 1.1.1. Buďte $A, B, C, D \in \mathbf{A}_n$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$. Nechť dále $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor v prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom platí:

1. $A - A = \boldsymbol{o}$
2. $A - B = -(B - A)$
3. $(A + \boldsymbol{u}) - B = (A - B) + \boldsymbol{u}$
4. $B - (A + \boldsymbol{u}) = (B - A) - \boldsymbol{u}$
5. $(A + \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{v} = A + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$
6. $(A - B) + (C - D) = (A - D) + (C - B)$
7. $A - B = D - C \Leftrightarrow A - D = B - C$
8. $A + \boldsymbol{u} = B + \boldsymbol{v} \Leftrightarrow A - B = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$

Důkaz. Podle vlastnosti 1 z definice 1.1.1 je

$$(A - A) + (A - A) = (A - A).$$

Přičteme-li k oběma stranám rovnosti vektor opačný k vektoru $A - A$, dostáváme tvrzení 1. Dále je (opět viz vlastnost 1 definice 1.1.1)

$$(A - B) + (B - A) = B - B = \boldsymbol{o}.$$

Odtud již plyne tvrzení 2. Označíme-li $A + \boldsymbol{u} = E$, je rovnost 3 ekvivalentní rovnosti $E - B = (A - B) + (E - A)$, což je opět důsledek vlastnosti 1 z definice 1.1.1. Najdeme-li opačný vektor k oběma stranám rovnosti 3 a použijeme-li

při tom rovnost 2, dostáváme rovnost 4. Označili jsme $A + \boldsymbol{u} = E$, označíme ještě $E + \boldsymbol{v} = F$. Rovnost 5 je pak ekvivalentní rovnosti

$$F = A + ((E - A) + (F - E)),$$

která opět okamžitě vyplývá z vlastnosti 1 z definice 1.1.1. Z téže vlastnosti vyplývá i rovnost 6:

$$\begin{aligned}(A - B) + (C - D) &= (A - B) + (B - D) + (D - B) + (C - D) = \\ &= (A - D) + (C - B)\end{aligned}$$

Bude-li levá strana rovnosti 6 nulový vektor, bude i její pravá strana nulový vektor a z rovnosti 6 dostáváme vztah 7. Rovnost $A - B = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ je ekvivalentní rovnosti $A = B + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$. Přičtením $\boldsymbol{u}$ (podle 5) dostáváme, že $A + \boldsymbol{u} = B + \boldsymbol{v}$.

Cvičení

V každém z následujících příkladů je zadána množina $\mathbf{A}$, vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ a zobrazení f množiny $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ do prostoru $\mathbf{V}_n$. Množina $\mathbf{A}$ je vždy zadána jako podmnožina prostoru $\mathbf{R}^m$. Vektorový prostor $\mathbf{V}_n$ je ve všech případech prostor $\mathbf{R}^n$ s operacemi definovanými obvyklým způsobem. Přitom čísla m a n nejsou samozřejmě ve všech příkladech stejná. Zobrazení f přiřazuje každým dvěma bodům $X, Y \in \mathbf{A}$, $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ vektor $f(X, Y)$, který je v zadání takového příkladu určen. Ověřte, zda trojice $(\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ je afinní prostor, popřípadě které vlastnosti z definice 1.1.1 jsou splněny, a které ne.

1. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^4$, $f(X, Y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_2 - y_2)$.
2. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^2$, $f(X, Y) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$.
3. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_2 = x_1^2\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = x_1 - y_1$.
4. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_2 = x_1^2\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = x_2 - y_2$.
5. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = x_1 - y_1$.
6. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 1\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = x_2 - y_2$.
7. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 1, x_1 < 0\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = x_2 - y_2$.
8. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2; x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 1, x_2 < 0\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = x_1 - y_1$.
9. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^2$, $f(X, Y) = (x_1 - y_1, x_2^k - y_2^k)$, k celé.
10. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^2$, $f(X, Y) = (x_1 - y_1, (x_2 - y_2)^k)$, k celé.
11. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_2 > 0\}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^2$,
$f(X, Y) = (\log(x_2/y_2), x_1 - y_1 - (1/x_2) + (1/y_2))$.
12. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^2$, $f(X, Y) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$.
13. $\mathbf{A} = \mathbf{R}^2$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}^2$,
$f(X, Y) = (x_1 - y_1 - (1/x_2) + (1/y_2), x_1 - y_1 + (1/x_2) - (1/y_2))$ pro $x_2 \neq 0$, $y_2 \neq 0$,
$f(X, Y) = (x_1 - y_1 - (1/x_2), x_1 - y_1 + (1/x_2))$ pro $x_2 \neq 0, y_2 = 0$,
$f(X, Y) = (x_1 - y_1 + (1/y_2), x_1 - y_1 - (1/y_2))$ pro $x_2 = 0, y_2 \neq 0$,
$f(X, Y) = (x_1 - y_1, x_1 - y_1)$ pro $x_2 = y_2 = 0$.
14. $\mathbf{A} = \mathbf{R}$, $\mathbf{V}_n = \mathbf{R}$, $f(X, Y) = 2(x_1 - y_1) + |x_1 - y_1|$.

1.2. Lineární soustava souřadnic

Nyní zavedeme do afinního prostoru souřadnice. Víme, že souřadnice v rovině, kterou nazýváme fyzikální rovina, se zavádějí již na střední škole. Způsob, který zvolíme, bude přirozeným zobecněním způsobu použitého při zavádění souřadnic na střední škole.

Teď budeme vyšetřovat afinní prostor $\mathbf{A}_n$, kde $n \geqq 1$. Mějme nyní zvolen bod $P \in \mathbf{A}_n$ a bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ zaměření $\mathbf{V}_n$. Každému bodu $X \in \mathbf{A}_n$ je přiřazen vektor $X - P \in \mathbf{V}_n$ a každému vektoru $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$ je přiřazena n-tice $(a_1, \ldots, a_n)$ reálných čísel tak, že $\mathbf{a} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$. Tudíž ke každému bodu $X \in \mathbf{A}_n$ je určeno n čísel $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ tak, že

(1) $$X - P = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n,$$

a zobrazení, které každému bodu X přiřadí n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$ definovanou vztahem (1), je zřejmě vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{A}$ na množinu $\mathbf{R}^n$. Vidíme, že sestrojené zobrazení je určeno bodem P a vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ (ty ovšem musí tvořit bázi prostoru $\mathbf{V}_n$).

Definice 1.2.1. Buď $P \in \mathbf{A}_n$ a $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ buď báze $\mathbf{V}_n$. Potom $(n + 1)$-tici

(2) $$\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$$

nazýváme *repér* v prostoru $\mathbf{A}_n$.

Prvky tvořící repér (jeden bod a n vektorů) budeme tedy psát do stejných závorek, do kterých jsme psali vektory báze vektorového prostoru.

Definice 1.2.2. Mějme v prostoru $\mathbf{A}_n$ dán repér $\mathscr{R}$ (viz (2)). Zobrazení $\mathscr{L}$, které každému bodu $X \in \mathbf{A}_n$ přiřadí n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$ definovanou vztahem (1), nazýváme *lineární soustava souřadnic* určená repérem $\mathscr{R}$. ($\mathscr{L}$ je zobrazení množiny $\mathbf{A}$ na množinu $\mathbf{R}^n$.) Bod P nazýváme *počátek* soustavy souřadnic $\mathscr{L}$, vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ nazýváme *souřadnicové vektory* této soustavy. Čísla $x_1, \ldots, x_n$ nazýváme *souřadnice* bodu X v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$.

Přímo ze zavedení lineární soustavy souřadnic vyplývá, že všechny souřadnice počátku jsou rovny nule (je $P - P = \mathbf{o}$).

Je zřejmé, že vztah (1) nyní můžeme zapsat pomocí $\mathscr{L}$:

(3) $$\mathscr{L}(X) = (x_1, \ldots, x_n).$$

Bude-li lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ pevně dána (tj. nebudeme-li v průběhu zkoumání volit jiné lineární soustavy souřadnic), nedojde k nedorozumění, budeme-li místo vztahu (3) psát jen

(4) $$X = [x_1, \ldots, x_n].$$

Právě napsaná rovnost znamená tedy totéž co rovnost (3) a nelze ji chápat tak, že bod X je roven n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$. Z těchto důvodů není zápis (4) právě nejvhodnější (znaménko „=“ ve vztahu (4) neznamená rovnost), ale protože je již vžitý a používaný, nebudeme ho měnit. Souřadnice bodu budeme tedy na rozdíl od souřadnic vektoru psát do hranatých závorek.

Bude-li nyní ve zvolené lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ prostoru $\mathbf{A}_n$ $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, \ldots, y_n]$, bude $X - Y = (X - P) - (Y - P) = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n - (y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_n\mathbf{u}_n)$, a tedy

$$X - Y = (x_1 - y_1)\mathbf{u}_1 + \ldots + (x_n - y_n)\mathbf{u}_n.$$

Tuto rovnost zapisujeme (jak víme z algebry) ve tvaru

$$X - Y = (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n).$$

Zde opět znaménko „=“ neznamená rovnost, ale vzhledem k tomu, že se tento způsob označování často používá, použije se i zde. Bude-li nyní $\mathbf{a} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ v bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, pak rovnost $X - Y = \mathbf{a}$ platí právě tehdy, je-li $x_1 - y_1 = a_1, \ldots, x_n - y_n = a_n$. Tudíž rovnost $X = Y + \mathbf{a}$ platí právě tehdy, je-li $x_i = y_i + a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Nyní bychom již snadno mohli dokázat větu 1.1.1, neboť je zřejmé, že v každé z dokazovaných rovností 1, …, 8 mají obě strany stejné souřadnice.

Poznámka 1. Protože, jak je vidět, se často stane, že budeme počítat se souřadnicemi bodů v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ dané repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ a zároveň se souřadnicemi vektorů v bázi $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$, budeme souřadnice vektoru v bázi $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ také nazývat jeho souřadnicemi v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$. Také budeme dále vždy předpokládat, že budeme-li počítat se souřadnicemi bodů v dané lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, budeme automaticky brát souřadnice vektorů v téže lineární soustavě souřadnic. A nakonec v zájmu stručnosti budeme místo lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ říkat jen stručně soustava souřadnic $\mathscr{L}$ nebo ještě stručněji jen soustava $\mathscr{L}$. S jinými než lineárními soustavami souřadnic totiž pracovat nebudeme, a proto tato úmluva nemůže způsobit žádné nejasnosti.

Musíme si uvědomit, že lineární soustava souřadnic je pomocný pojem a že ji můžeme v afinním prostoru zvolit mnoha různými způsoby. O tom bude pojednáno v odstavci 1.12. I když budeme soustavy souřadnic hojně využívat, budou nás zajímat jen ty vlastnosti pojmů, které nebudou záviset na volbě soustavy souřadnic – tyto pojmy a vlastnosti budeme nazývat geometrické.

Předpokládejme nyní, že máme dáno nějaké zobrazení $\mathscr{L}'$ množiny $\mathbf{A}$ bodů afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do množiny $\mathbf{R}^n$. Budeme zkoumat, kdy toto zobrazení je lineární soustavou souřadnic na prostoru $\mathbf{A}_n$. Každá lineární soustava souřadnic má svůj počátek. Musí tedy existovat bod P tak, že $\mathscr{L}'(P) = (0, \ldots, 0)$ (tj. $\mathscr{L}'(P)$

je nulová n-tice v $\mathbf{R}^n$). Přiřadíme-li nyní každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ n-tici $\mathscr{L}'(P + \mathbf{x})$, musí tato n-tice udávat souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ v nějaké bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ prostoru $\mathbf{V}_n$, a tedy zobrazení prostoru $\mathbf{V}_n$ do prostoru $\mathbf{R}^n$ přiřazující každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ n-tici $\mathscr{L}'(P + \mathbf{x})$ musí být izomorfismus. Snadno se přesvědčíme, že získané nutné podmínky pro to, aby dané zobrazení $\mathscr{L}'$ prostoru $\mathbf{A}_n$ do prostoru $\mathbf{R}^n$ bylo lineární soustavou souřadnic na prostoru $\mathbf{A}_n$, jsou i postačující: Nechť tedy pro uvažované zobrazení $\mathscr{L}'$ platí:

1. Existuje bod $P \in \mathbf{A}_n$ tak, že $\mathscr{L}'(P) = (0, \ldots, 0)$.
2. Zobrazení f' prostoru $\mathbf{V}_n$ do prostoru $\mathbf{R}^n$ přiřazující každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ n-tici $\mathscr{L}'(P + \mathbf{x})$ je izomorfismus.

Označme $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n$ vektor mající na i-tém místě číslo 1 a na ostatních místech nuly. Položme $\mathbf{u}_i = (f')^{-1}(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$ (tj. vektor $\mathbf{u}_i$ je vzorem vektoru $\mathbf{e}_i$ při zobrazení f'). Protože zobrazení f' je izomorfismus, tvoří vektory $\mathbf{u}_i$, $i = 1, \ldots, n$ bázi prostoru $\mathbf{V}_n$. Přesvědčíme se, že lineární soutsava $\mathscr{L}$ určená repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ splývá se zobrazením $\mathscr{L}'$. Skutečně, je-li $\mathscr{L}(X) = (x_1, \ldots, x_n)$, tj. $X - P = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n$, je $\mathscr{L}'(X) = \mathscr{L}((X - P) + P) = f'(X - P) = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = (x_1, \ldots, x_n)$. Právě provedený důkaz zároveň dává způsob, jakým se najdou vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ z hledaného repéru $\mathscr{R}$, je-li lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ dána jako přímo předepsané zobrazení.

Příklad 1. Buď $\mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}, \mathbf{V}, „-“)$ afinní prostor zavedený v příkladu 4 z odstavce 1.1, tj. $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;\ x_2 > 0\}$, $\mathbf{V} = \mathbf{R}^2$ a pro $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ je $Y - X = (x_1 - y_1 + \log(x_2/y_2), x_1 - y_1 - \log(x_2/y_2))$. Zjistěte, zda zobrazení $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ množiny $\mathbf{A}$ do $\mathbf{R}^2$ jsou lineární soustavy souřadnic v $\mathbf{A}_2$. Přitom zobrazení $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ jsou pro $X = (x_1, x_2)$ definována předpisy

$$\mathscr{L}(X) = (x_1, x_2),$$
$$\mathscr{L}'(X) = (x_1, \log x_2),$$
$$\mathscr{L}''(X) = (2x_1 + 1, x_2 - 1/x_2).$$

Řešení. Jako první krok musíme ve všech případech hledat bod P, který se zobrazí na dvojici $(0, 0)$. Aby bylo $\mathscr{L}(P) = (0, 0)$, muselo by být $P = (0, 0)$, což není možné, protože $(0, 0) \notin \mathbf{A}$. Tudíž zobrazení $\mathscr{L}$ není lineární soustavou souřadnic. Aby bylo $\mathscr{L}'(P) = (0, 0)$, musí zřejmě být $P = (0, 1)$. Další část postupu, který jsme již před tímto příkladem obecně provedli, je sestrojení zobrazení f' prostoru $\mathbf{R}^2$ (v našem případě je $\mathbf{R}^2$ zaměřením $\mathbf{A}_2$) do $\mathbf{R}^2$. Toto zobrazení je definováno předpisem

$$f'(\mathbf{x}) = \mathscr{L}'(P + \mathbf{x}).$$

Vypočítejme nejdříve $Y = P + \mathbf{x}$. Nechť $Y = (y_1, y_2)$. Aby bylo $\mathbf{x} = Y - P$, musí být

$$\mathbf{x} = (-y_1 + \log(1/y_2), -y_1 - \log(1/y_2)).$$

Nechť nyní $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Musí tedy být

$$x_1 = -y_1 - \log y_2,$$
$$x_2 = -y_1 + \log y_2.$$

Odtud plyne

$$y_1 = -(1/2)(x_1 + x_2),$$
$$y_2 = 10^{(1/2)(x_2 - x_1)}.$$

Nyní je $\mathscr{L}'(Y) = (y_1, \log y_2) = (-(1/2)(x_1 + x_2), (1/2)(x_2 - x_1))$. Tím je dáno zobrazení f' – vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ přiřazuje vypočítanou dvojici $\mathscr{L}'(Y)$. Snadno již ověříme, že toto zobrazení je izomorfismus prostoru $\mathbf{R}^2$ do sebe, a zobrazení $\mathscr{L}'$ je tedy lineární soustava souřadnic v $\mathbf{A}_2$. Podobně jako zobrazení $\mathscr{L}'$ prozkoumáme i zobrazení $\mathscr{L}''$. K tomu, aby bylo $\mathscr{L}''(P) = (0, 0)$ pro $P \in \mathbf{A}_2$, $P = (p_1, p_2)$, je nutné a stačí, aby $2p_1 + 1 = 0$ a $p_2 - 1/p_2 = 0$, a protože musí být $p_2 > 0$, dostáváme $P = (-1/2, 1)$. Pro $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ opět označíme $Y = P + \mathbf{x}$, $Y = (y_1, y_2)$. Stejně jako v případě zobrazení $\mathscr{L}'$ dostaneme

$$\mathbf{x} = (-1/2 - y_1 + \log(1/y_2), -1/2 - y_1 - \log(1/y_2)),$$
$$y_1 = -(1/2)(1 + x_1 + x_2),$$
$$y_2 = 10^{(1/2)(x_2 - x_1)},$$
$$\mathscr{L}''(Y) = (2y_1 + 1, y_2 - 1/y_2) = (-x_1 - x_2, 10^{(1/2)(x_2 - x_1)} - 10^{(1/2)(x_1 - x_2)}).$$

Položíme-li $f'(\mathbf{x}) = \mathscr{L}''(Y)$, snadno se přesvědčíme, že f' není izomorfismus: např. pro $\mathbf{a} = (0, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 4)$ je $\mathbf{b} = 2 \cdot \mathbf{a}$, a přitom $f'(\mathbf{a}) = (-2, 10 - 1/10)$, $f'(\mathbf{b}) = (-4, 100 - 1/100)$, a tudíž $f'(\mathbf{b}) \neq 2f'(\mathbf{a})$. Zobrazení $\mathscr{L}''$ tudíž není lineární soustava souřadnic v rovině $\mathbf{A}_2$.

Cvičení

1. Afinní prostor buď dán podle cvičení 3 z odstavce 1.1. Vyšetřete, zda zobrazení f přiřazující každému bodu $(x_1, x_2) \in \mathbf{A}$ číslo a) $1 + x_1$, b) $\sqrt{x_2}$, c) x_2/x_1 pro $x_1 \neq 0$ a číslo 0 pro $x_1 = 0$, d) x_1/x_2 pro $x_2 \neq 0$ a číslo 0 pro $x_2 = 0$, e) $3 - 2x_1$ je lineární soustava souřadnic.
2. Afinní prostor buď dán podle cvičení 7 z odstavce 1.1. Vyšetřete, zda zobrazení f přiřazující každému bodu $(x_1, x_2) \in \mathbf{A}$ číslo a) $5 + 2x_2$, b) x_1, c) $\sqrt{(x_1^2/a^2) - 1}$, d) $x_2^3a^2 - x_1^2x_2b^2 - 1$ je lineární soustava souřadnic.
3. Afinní prostor buď dán podle cvičení 9 z odstavce 1.1 (k je přirozené a liché). Vyšetřete, zda zobrazení f přiřazující každému bodu $(x_1, x_2) \in \mathbf{A}$ dvojici čísel a) $(x_1 + x_2^k, x_1 - x_2^k)$, b) $(1 + x_1, 1 + x_1 + x_2^k)$, c) (x_1^k, x_2) je lineární soustava souřadnic.

4. Afinní prostor buď dán podle cvičení 11 z odstavce 1.1. Vyšetřete, zda zobrazení f přiřazující každému bodu $(x_1, x_2) \in \mathbf{A}$ dvojici čísel a) (x_1, x_2), b) $(\log x_2, x_1 - 1/x_2)$, c) $(x_1, \log x_2)$, d) $(\log(x_2^3 10^{x_1}/10^{1/x_2}), \log(1/x_2^2))$ je lineární soustava souřadnic.

1.3. Podprostory afinního prostoru

Pojem podprostor afinního prostoru je zobecněním známých pojmů přímky a roviny v trojrozměrném fyzikálním prostoru. Víme, že je-li $\boldsymbol{u}$ směrový vektor nějaké přímky, pak vektor, určený libovolnou dvojicí bodů uvažované přímky, je násobkem vektoru $\boldsymbol{u}$. Je-li Y libovolný bod přímky, tvoří přímku všechny body X, pro něž platí $X = Y + t\boldsymbol{u}$, kde t je reálné číslo. Podobně rovina v trojrozměrném fyzikálním prostoru je určena bodem Y a dvěma lineárně nezávislými vektory $\boldsymbol{u}$, $\mathbf{v}$. Tuto rovinu pak tvoří všechny body X, pro něž platí $X = Y + t\boldsymbol{u} + s\mathbf{v}$. Vidíme, že jak přímka, tak rovina ve fyzikálním prostoru mají následující vlastnosti:

1. Vektor, určený každými dvěma body přímky, resp. roviny, leží v daném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. (V případě přímky tvoří vektorový prostor $\mathbf{V}$ všechny násobky vektoru $\boldsymbol{u}$, v případě roviny tvoří vektorový prostor $\mathbf{V}$ všechny lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}$, $\mathbf{v}$.)
2. Je-li Y bod přímky, resp. roviny a $\boldsymbol{w}$ je prvek popsaného vektorového prostoru $\mathbf{V}$, je bod $X = Y + \boldsymbol{w}$ opět bod přímky, resp. roviny.

Pomocí právě uvedených vlastností 1, 2 budeme nyní definovat podprostory afinního prostoru.

Definice 1.3.1. Buď $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$ afinní prostor. Neprázdnou podmnožinou $\bar{\mathbf{A}}$ množiny $\mathbf{A}$ nazýváme *podprostor dimenze k* afinního prostoru $\mathbf{A}_n$, jestliže existuje podprostor $\bar{\mathbf{V}}_k$ dimenze k zaměření $\mathbf{V}_n$ tak, že

1. pro každé dva body $X, Y \in \bar{\mathbf{A}}$ je $X - Y \in \bar{\mathbf{V}}_k$;
2. pro každý bod $Y \in \bar{\mathbf{A}}$ a pro každý vektor $\boldsymbol{u} \in \bar{\mathbf{V}}_k$ je $Y + \boldsymbol{u} \in \bar{\mathbf{A}}$. Vektorový prostor $\bar{\mathbf{V}}_k$ pak nazýváme *zaměření* podprostoru $\bar{\mathbf{A}}$.

Z právě vyslovené definice vyplývá, že každý bod afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ (přesněji každá jednobodová podmnožina množiny $\mathbf{A}$) je podprostorem dimenze 0 prostoru $\mathbf{A}_n$. Vektorový prostor $\bar{\mathbf{V}}_k$ je v tomto případě triviální podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$ obsahující právě jen nulový vektor. Z definice 1.3.1. je též zřejmé, že pro každý podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ dimenze k afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ platí $0 \leqq k \leqq n$.

Poznámka 1. Zachováme-li označení použité v definici 1.3.1, pak přiřadíme-li každé dvojici $(X, Y) \in \bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{A}}$ vektor $Y - X \in \bar{\mathbf{V}}_k$, dostáváme zobrazení množiny $\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{A}}$ do prostoru $\bar{\mathbf{V}}_k$. Označme toto zobrazení $\bar{f}$. Zřejmě zobrazení $\bar{f}$ je restrikcí zobrazení f z definice 1.1.1 na množinu $\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{A}}$ (tj. je to zobrazení f, jehož de-

finiční obor jsme omezili na množinu $\bar{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{A}}$). Z vlastností 1, 2 z definice 1.3.1 a z vlastností afinního prostoru (vlastnosti 1, 2 z definice 1.1.1) vyplývá, že trojice $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{V}}_k, \bar{f})$ je afinním prostorem dimenze k. Z každého podprostoru $\bar{\mathbf{A}}$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ můžeme tedy tímto způsobem též udělat afinní prostor, tj. doplnit ho na trojici $(\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{V}}_k, \bar{f})$. To je též v souladu s poznámkou 2 k definici 1.1.1. Odtud tedy vyplývá, že každý pojem, který zavedeme v afinním prostoru, můžeme také zavést v každém podprostoru afinního prostoru. Např. lineární soustavu souřadnic, kterou jsme definovali v afinním prostoru, můžeme také zavést v podprostoru afinního prostoru — na to bude ještě upozorněno v souvislosti s definicí 1.3.3. Právě tak všechny věty, které dokážeme v afinním prostoru, bychom mohli také formulovat a dokazovat v podprostoru afinního prostoru.

Je-li $\bar{\mathbf{A}}$ podprostor afinního prostoru dimenze k, budeme nadále připisovat k jako index k symbolu označujícímu tento podprostor, tj. budeme ho označovat $\bar{\mathbf{A}}_k$.

Z definice 1.3.1 okamžitě vyplývá, že každý podprostor afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ je jednoznačně určen jedním svým bodem a svým zaměřením. Skutečně, je-li $\bar{\mathbf{A}}_k$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ a je-li $\bar{\mathbf{V}}_k$ jeho zaměření a $B \in \bar{\mathbf{A}}_k$, pak je $X \in \bar{\mathbf{A}}_k$ právě tehdy, když $X - B \in \bar{\mathbf{V}}_k$. Máme-li obráceně v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ zvolen bod B a je-li $\bar{\mathbf{V}}_k$ podprostor zaměření $\mathbf{V}_n$ (prostoru $\mathbf{A}_n$), existuje právě jeden podprostor $\bar{\mathbf{A}}_k$ prostoru $\mathbf{A}_n$ obsahující bod B a mající zaměření $\bar{\mathbf{V}}_k$. Tento podprostor je opět tvořen množinou všech bodů X, pro něž je $X - B \in \bar{\mathbf{V}}_k$.

Označení. Nadále budeme podprostor $\bar{\mathbf{A}}_k$ prostoru $\mathbf{A}_n$ obsahující bod B a mající zaměření $\bar{\mathbf{V}}_k$ označovat symbolem $[B; \bar{\mathbf{V}}_k]$. Budou-li vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ tvořit bázi vektorového prostoru $\bar{\mathbf{V}}_k$, budeme ho označovat též symbolem $[B; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$. To znamená, že je $\bar{\mathbf{A}}_k = [B; \bar{\mathbf{V}}_k] = [B; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$.

Definice 1.3.2. Podprostor afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ dimenze 1, resp. 2, resp. $n - 1$, nazýváme *přímka*, resp. *rovina*, resp. *nadrovina* prostoru $\mathbf{A}_n$.

Je vidět, že zavedené pojmy přímka a rovina odpovídají vžitým představám. Pojem nadrovina se na střední škole nezaváděl, protože v trojrozměrném prostoru je nadrovina rovina a v rovině je nadrovina přímka. Pro označení přímek budeme kromě zavedeného označení používat též vžité označování malými písmeny, pro označení rovin budeme podobně používat malá řecká písmena.

Speciálním případem podprostoru je celá množina $\mathbf{A}$. Tento podprostor má zřejmě dimenzi n (za zaměření má celý prostor $\mathbf{V}_n$) a též je zřejmé, že je to jediný podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$, který má dimenzi n. Protože k symbolu označujícímu podprostor připisujeme jako index dimenzi, budeme i podprostor tvořený všemi body prostoru $\mathbf{A}_n$ označovat stejným sybmolem $\mathbf{A}_n$, což vzhledem k poznámce 1 nepovede k nedorozumění, i když jde vlastně o dvě různé věci: afinní prostor je celá struktura a podprostor je jen množina bodů (splňující dané podmínky).

Teď zavedeme parametrické vyjádření podprostoru, což bude analogie k parametrickému vyjádření přímky (popřípadě roviny), které známe ze střední školy. Mějme tedy dán podprostor $\bar{\mathbf{A}}_k$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n$. Buď $\bar{\mathbf{V}}_k$ zaměření podprostoru $\bar{\mathbf{A}}_k$. Zvolme bod $P \in \bar{\mathbf{A}}_k$ a dále zvolme bázi $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ zaměření $\bar{\mathbf{V}}_k$. Jestliže doplníme podprostor $\bar{\mathbf{A}}_k$ na trojici $(\bar{\mathbf{A}}_k, \bar{\mathbf{V}}_k, f)$ tvořící afinní prostor (viz poznámka 1), zvolili jsme tedy v tomto afinním prostoru lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}'$ danou repérem $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \rangle$. Přiřaďme nyní každé k-tici $(t_1, \ldots, t_k)$ reálných čísel bod

(1) $$X = P + t_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + t_k\boldsymbol{u}_k.$$

Dostáváme zobrazení množiny $\mathbf{R}^k$ všech k-tic reálných čísel do prostoru $\bar{\mathbf{A}}_k$. Snadno se můžeme přesvědčit, že získané zobrazení je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{R}^k$ na množinu $\bar{\mathbf{A}}_k$. Tato skutečnost je zřejmá též z toho, že zmíněné zobrazení je inverzním zobrazením k lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$.

Definice 1.3.3. Buď $\bar{\mathbf{A}}_k$ podprostor afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ a $\bar{\mathbf{V}}_k$ zaměření podprostoru $\bar{\mathbf{A}}_k$. Nechť $P \in \bar{\mathbf{A}}_k$ a nechť $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ je báze prostoru $\bar{\mathbf{V}}_k$. Zobrazení množiny $\mathbf{R}^k$ na podprostor $\bar{\mathbf{A}}_k$, které každé k-tici $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbf{R}^k$ přiřadí bod X daný vztahem (1), nazýváme *parametrické vyjádření* podprostoru $\bar{\mathbf{A}}_k$.

Můžeme tedy říci, že parametrické vyjádření podprostoru je zobrazení inverzní k lineární soustavě souřadnic v afinním prostoru, který vznikne doplněním zmíněného podprostoru na afinní prostor.

Nadále budeme stručně říkat jen parametrické vyjádření (1) místo správného: parametrické vyjádření přiřazující každé k-tici $(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbf{R}^k$ bod X vztahem (1).

Speciálně. Máme-li dánu přímku $\bar{\mathbf{A}}_1$ bodem P a nenulovým vektorem $\boldsymbol{u}$ ze zaměření přímky $\bar{\mathbf{A}}_1$, dostáváme parametrické vyjádření přímky $\bar{\mathbf{A}}_1$ ve tvaru

(2) $$X = P + t\boldsymbol{u}.$$

Pro rovinu $\bar{\mathbf{A}}_2$ obsahující bod P, pro niž vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ tvoří bázi jejího zaměření, dostáváme parametrické vyjádření:

(3) $$X = P + t\boldsymbol{u} + s\boldsymbol{v}$$

Ve vztahu (2) můžeme pochopitelně psát jen t místo t_1. Právě tak je možno dvojici čísel z $\mathbf{R}^2$ ve vztahu (3) označovat (t, s) místo (t_1, t_2).

Jestliže vyšetřujeme přímky a roviny v afinním prostoru $\mathbf{A}_3$ (tj. $n = 3$) a máme-li v tomto prostoru zvolenou nějakou lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}$, můžeme vztahy (2) a (3) rozepsat pomocí souřadnic. Je-li $X = [x_1, x_2, x_3]$, $P = [p_1, p_2, p_3]$, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, můžeme psát vztah (2) ve tvaru:

(2′) $$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tu_1 \\ x_2 &= p_2 + tu_2 \\ x_3 &= p_3 + tu_3 \end{aligned}$$

a vztah (3) ve tvaru:

(3′) $$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + tu_1 + sv_1 \\ x_2 &= p_2 + tu_2 + sv_2 \\ x_3 &= p_3 + tu_3 + sv_3 \end{aligned}$$

Cvičení

1. Mějme dán pro $n = 2$ afinní prostor podle příkladu 1 z odstavce 1.1. Dále mějme dány afinní prostory podle cvičení 9 a 11 z odstavce 1.1. Určete ty podmnožiny $\mathbf{R}^2$, které jsou podprostory alespoň dvou z uvedených afinních prostorů.
2. Mějme dán afinní prostor podle cvičení 11 z odstavce 1.1. Zjistěte, které z podmnožin $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ jsou podprostory daného afinního prostoru. Přitom je $\mathbf{B} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{A};\ x_1x_2 = k\}$, kde $k \in \mathbf{R}$; $\mathbf{C} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{A};\ x_2^{x_2} = 10^{x_1x_2 - 1}\}$; $\mathbf{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{A}; \log x_2 = x_1\}$.

1.4. Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru

Již v základní škole zjišťujeme vzájemnou polohu přímek a rovin – podprostorů trojrozměrného fyzikálního prostoru. Při zjišťování vzájemné polohy podprostorů fyzikálního prostoru nejčastěji určujeme jejich průnik (množinu společných bodů) a podprostor určený nějakými podprostory – tomuto podprostoru budeme říkat spojení. Tak např. víme, že dvě roviny v trojrozměrném prostoru mohou být buď rovnoběžné, nebo se protínají v přímce, že třemi body neležícími na přímce je určena právě jedna rovina atd. Všechny tyto pojmy zobecníme do n-rozměrného afinního prostoru.

Většinou se omezíme na zkoumání vzájemné polohy dvou podprostorů. Proto v celém odstavci budeme předpokládat, že $\mathbf{A}'_r$, $\mathbf{A}''_s$ jsou dva dané podprostory afinního prostoru $\mathbf{A}_n$. Dále budeme předpokládat, že $\mathbf{V}'_r$, resp. $\mathbf{V}''_s$ je zaměření podprostoru $\mathbf{A}'_r$, resp. $\mathbf{A}''_s$, a že $A \in \mathbf{A}'_r$, $B \in \mathbf{A}''_s$. (Podle předešlého odstavce je každý podprostor určen jedním svým bodem a svým zaměřením.)

V případě, že jeden z obou podprostorů je jednobodová množina – nechť je to např. podprostor $\mathbf{A}'_r$ – je vyšetření vzájemné polohy obou podprostorů triviální. Mohou nastat jen dva případy: buď je $\mathbf{A}'_r \subset \mathbf{A}''_s$, nebo $\mathbf{A}'_r \not\subset \mathbf{A}''_s$, tj. bod tvořící podprostor $\mathbf{A}'_r$ buď v podprostoru $\mathbf{A}''_s$ leží, nebo neleží. Můžeme tedy nadále předpokládat, že je $r \geqq 1$, $s \geqq 1$.

Věta 1.4.1. Podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ mají neprázdný průnik, právě když existují vektory $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}'_r$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}''_s$ tak, že $A - B = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, neboť vztah $A - B = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ můžeme psát ve tvaru $A - \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$. Je vidět, že platí-li tento vztah, leží bod $P = A - \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$ v obou podprostorech. Leží-li obráceně bod P v obou podprostorech $\mathbf{A}'_r$, $\mathbf{A}''_s$, pak označíme-li $\mathbf{u} = A - P$, $\mathbf{v} = P - B$, dostáváme vztah $A - \mathbf{u} = P = B + \mathbf{v}$.

Označíme-li $\langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r \rangle$ bázi prostoru $\mathbf{V}'_r$ a $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s \rangle$ bázi prostoru $\mathbf{V}''_s$, můžeme právě dokázanou větu zřejmě též formulovat takto: Podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ mají společný bod právě tehdy, je-li vektor $A - B$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$.

Definice 1.4.1. Říkáme, že podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ jsou *incidentní*, je-li buď $\mathbf{A}'_r \subset \mathbf{A}''_s$, nebo $\mathbf{A}''_s \subset \mathbf{A}'_r$. Říkáme, že tyto podprostory jsou *různoběžné*, mají-li neprázdný průnik a nejsou-li incidentní. Říkáme, že tyto podprostory jsou *rovnoběžné*, platí-li buď $\mathbf{V}'_r \subset \mathbf{V}''_s$, nebo $\mathbf{V}''_s \subset \mathbf{V}'_r$. Nejsou-li prostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ ani různoběžné, ani rovnoběžné, říkáme, že jsou *mimoběžné*.

Je vidět, že je $\mathbf{A}'_r \subset \mathbf{A}''_s$ právě tehdy, je-li $A \in \mathbf{A}''_s$ a $\mathbf{V}'_r \subset \mathbf{V}''_s$. Tím máme popsány incidentní podprostory. Mezi rovnoběžné podprostory tedy počítáme podprostory incidentní.

Podotkněme ještě, že průnikem každých dvou podprostorů daného vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ je opět podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$.

Věta 1.4.2. Jsou-li podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ různoběžné, pak jejich průnikem je podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ se zaměřením $\mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, neboť je-li $P, Q \in \mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s$, je i $P - Q \in \mathbf{V}'_r$ a $P - Q \in \mathbf{V}''_s$, a tedy $P - Q \in \mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$. Je-li obráceně $P \in \mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$, je $Q = P + \mathbf{u} \in \mathbf{A}'_r$, $P + \mathbf{u} \in \mathbf{A}''_s$, a tedy $Q \in \mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s$.

Je zřejmé, že právě dokázanou větu můžeme snadno zobecnit na případ libovolné množiny podprostorů. Důkaz je analogický důkazu věty 1.4.2.

Věta 1.4.2'. Má-li jakákoli množina podprostorů prostoru $\mathbf{A}_n$ neprázdný průnik, je tímto průnikem podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ mající za zaměření průnik všech zaměření podprostorů vyšetřované množiny.

Je vidět, že neincidentní rovnoběžné podprostory nemají žádný společný bod. Kdyby totiž měly společný bod a bylo by např. $\mathbf{V}'_r \subset \mathbf{V}''_s$, bylo by již (jak bylo výše řečeno) $\mathbf{A}'_r \subset \mathbf{A}''_s$.

Tím, že jsme charakterizovali podprostory rovnoběžné a různoběžné, jsme zároveň charakterizovali i podprostory mimoběžné. Podprostory mimoběžné tudíž též nemají společný bod. Mimoběžné podprostory budeme ještě dále třídit podle dimenze prostoru $\mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$. Toto třídění má však význam hlavně ve vícerozměrných prostorech. V případě dvojrozměrného a trojrozměrného prostoru (tj. pro $n = 2$, resp. $n = 3$) je toto „jemnější" třídění zbytečné.

V následujících příkladech budeme předpokládat, že pracujeme v afinním prostoru $\mathbf{A}_3$, v kterém je zvolena lineární soustava souřadnic, a že souřadnice všech bodů a vektorů určujeme v této lineární soustavě souřadnic (viz poznámka 1 z odstavce 1.2).

Příklad 1. Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q v prostoru $\mathbf{A}_3$. Přitom je $p = [A; \mathbf{u}]$, $q = [B; \mathbf{v}]$ a je

a) $A = [1, 2, 3]$, $\mathbf{u} = (1, -3, 2)$, $B = [0, 5, 1]$, $\mathbf{v} = (-2, 6, -4)$;
b) $A = [1, -3, 4]$, $\mathbf{u} = (2, 2, -1)$, $B = [3, 0, -1]$, $\mathbf{v} = (0, 1, 3)$.

Řešení. a) Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé (je $\mathbf{v} + 2\mathbf{u} = \mathbf{o}$) a je $A - B = \mathbf{u}$, a tedy vektory $A - B$ a $\mathbf{u}$ jsou též lineárně závislé. Obě přímky proto spolu splývají.

b) Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé. Dále je $A - B = (-2, -3, 5)$. Určíme hodnost h matice

$$\begin{pmatrix} 2, & 2, & -1 \\ 0, & 1, & 3 \\ -2, & -3, & 5 \end{pmatrix}.$$

Snadno se přesvědčíme, že je $h = 3$. Vektor $A - B$ tudíž není lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Obě přímky tedy (podle věty 1.4.1) nemají společný bod, a protože nejsou rovnoběžné, jsou mimoběžné.

Příklad 2. Určete vzájemnou polohu roviny ϱ a přímky p v prostoru $\mathbf{A}_3$. Přitom je $p = [A; \mathbf{u}]$, $\varrho = [B; \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ a je

a) $A = [1, 2, 1]$, $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$,
$B = [2, 1, -2]$, $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$, $\mathbf{w} = (3, -1, 2)$;
b) $A = [1, 0, 0]$, $\mathbf{u} = (7, 7, 1)$,
$B = [0, 1, 3]$, $\mathbf{v} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{w} = (2, -1, -1)$.

Řešení. a) Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou (jak je možné se přesvědčit) lineárně nezávislé. Proto vektor $\mathbf{u}$ není lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a přímka p tudíž není rovnoběžná s rovinou ϱ. Vektor $A - B$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, a proto $p \cap \varrho \neq \emptyset$ (věta 1.4.1). Kdyby množina $p \cap \varrho$ obsahovala dva různé body, bylo by $p \subset \varrho$. Přímka p proto musí protnout rovinu ϱ v bodě. Chceme-li tento bod určit, musíme vektor $A - B$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Výpočtem dostaneme:

$$A - B = 2\mathbf{u} - \mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Hledaný průsečík je tedy bod $X = A - 2\mathbf{u} = B - \mathbf{v} - \mathbf{w} = [-1, 0, -3]$.

b) Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou (jak je opět možné se snadno přesvědčit) lineárně závislé. Přímka p je proto rovnoběžná s rovinou ϱ. Protože vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, je vektor $\mathbf{u}$ jejich lineární kombinací. Máme-li zjišťovat, zda vektor $A - B$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, stačí tedy zjistit, je-li vektor $A - B$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, tj. jsou-li vektory $A - B, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ lineárně závislé. Tyto vektory však jsou lineárně nezávislé, proto přímka p nemá společný bod s rovinou ϱ, a tudíž s ní není incidentní.

Příklad 3. Určete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ v prostoru $\mathbf{A}_3$. Přitom je $\varrho = [A; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}]$, $\sigma = [B; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ a je $A = [3, 2, 2]$, $\boldsymbol{t} = (2, 1, 3)$, $\boldsymbol{u} = (0, 1, 1)$; $B = [3, 0, 6]$, $\boldsymbol{v} = (1, -1, 3)$, $\boldsymbol{w} = (2, -1, 4)$.

Řešení. Obě roviny zřejmě nejsou rovnoběžné (např. snadno zjistíme, že vektory $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou lineárně nezávislé), a proto jsou různoběžné. Chceme-li určit zaměření jejich průniku, musíme podle věty 1.4.2 určit průnik zaměření obou rovin. Tento průnik určíme tak, že najdeme netriviální kombinaci vektorů $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ rovnou nulovému vektoru. Výpočtem dostaneme, že je $\boldsymbol{t} - \boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$. Tedy je $\boldsymbol{t} - \boldsymbol{u} = -2\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$. Hledaný průnik vektorových prostorů je tedy generován vektorem $\boldsymbol{t} - \boldsymbol{u} = (2, 0, 2)$, nebo jednodušeji vektorem $(1, 0, 1)$. Jeden společný bod obou rovin určíme, vyjádříme-li vektor $A - B$ jako lineární kombinaci např. vektorů $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Výpočtem dostáváme $A - B = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$. Z tohoto vztahu dostáváme společný bod $X = A - \boldsymbol{t} + \boldsymbol{u} = B - 2\boldsymbol{v} = [1, 2, 0]$. Průnikem rovin ϱ a σ je tedy přímka $[X; \boldsymbol{a}]$, kde $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{t} - \boldsymbol{u} = (2, 0, 2)$.

Jednodušeji se průnik roviny s podprostorem určuje, použijeme-li rovnici roviny. S tímto pojmem se však seznámíme až v příštím odstavci.

Mějme nyní dánu libovolnou neprázdnou množinu $\mathbf{M}$ podprostorů afinního prostoru $\mathbf{A}_n$. Budeme hledat „nejmenší" podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ obsahující všechny podprostory z množiny $\mathbf{M}$, tj. podprostor $\bar{\mathbf{A}}$, pro nějž platí:

1. Pro každý podprostor $\mathbf{A}' \in \mathbf{M}$ platí $\mathbf{A}' \subset \bar{\mathbf{A}}$.
2. Je-li $\mathbf{A}''$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$, pro nějž platí $\mathbf{A}' \subset \mathbf{A}''$ pro každé $\mathbf{A}' \in \mathbf{M}$ (tj. podprostor $\mathbf{A}''$ také splňuje vlastnost 1), potom $\bar{\mathbf{A}} \subset \mathbf{A}''$.

Ve vlastnosti 2 jsme matematickým způsobem zformulovali požadovanou vlastnost, že $\bar{\mathbf{A}}$ je „nejmenší" podprostor, který obsahuje všechny podprostory z množiny $\mathbf{M}$. Snadno se přesvědčíme, že podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ popsaných vlastností skutečně existuje. Označíme-li totiž $\mathbf{M}'$ množinu všech podprostorů obsahujících všechny podprostory z množiny $\mathbf{M}$, vidíme, že množina $\mathbf{M}'$ je neprázdná (je $\mathbf{A}_n \in \mathbf{M}'$), a že průnik všech podprostorů z množiny $\mathbf{M}'$ je hledaný podprostor $\bar{\mathbf{A}}$.

Definice 1.4.2. Buď $\mathbf{M}$ neprázdná množina podprostorů afinního prostoru $\mathbf{A}_n$. Podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ splňující vlastnosti 1 a 2 nazýváme *spojení* všech podprostorů z množiny $\mathbf{M}$. Spojení dvou podprostorů $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ budeme označovat $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s$. Podobně spojení tří podprostorů $\mathbf{A}'_r, \mathbf{A}''_s, \mathbf{A}'''_t$ budeme označovat $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s \vee \mathbf{A}'''_t$ atd.

K označování spojení dvou podprostorů tudíž používáme stejný symbol jako pro označování slova „nebo" v logice. Z kontextu by však bylo možno

vždy usoudit, v jakém významu je symbol $\vee$ použit. Pro jistotu však symbol $\vee$ ve smyslu logickém nebudeme používat a budeme ho nahrazovat slovem „nebo".

Ukážeme si konstrukci spojení konečného počtu podprostorů na příkladu tří podprostorů. Mějme tedy dány tři podprostory $\mathbf{A}'_r = [A'; \mathbf{V}'_r]$, $\mathbf{A}''_s = [A''; \mathbf{V}''_s]$, $\mathbf{A}'''_t = [A'''; \mathbf{V}'''_t]$. Zvolme báze všech tří vektorových prostorů $\mathbf{V}'_r, \mathbf{V}''_s, \mathbf{V}'''_t$. Nechť $\mathbf{V}'_r = [\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_r\}]$, $\mathbf{V}''_s = [\{\boldsymbol{u}''_1, \ldots, \boldsymbol{u}''_s\}]$, $\mathbf{V}'''_t = [\{\boldsymbol{u}'''_1, \ldots, \boldsymbol{u}'''_t\}]$. Je zřejmé, že obsahuje-li nějaký podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ všechny podprostory $\mathbf{A}'_r, \mathbf{A}''_s, \mathbf{A}'''_t$, musí jeho zaměření $\bar{\mathbf{V}}$ obsahovat vektory

$$(1) \qquad A'' - A',\ A''' - A',\ \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_r,\ \boldsymbol{u}''_1, \ldots, \boldsymbol{u}''_s,\ \boldsymbol{u}'''_1, \ldots, \boldsymbol{u}'''_t.$$

Obráceně je zřejmé, že obsahuje-li nějaký podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ bod A' a jeho zaměření $\bar{\mathbf{V}}$ obsahuje vektory (1), je $\mathbf{A}'_r \subset \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}''_s \subset \bar{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}'''_t \subset \bar{\mathbf{A}}$. Vidíme tudíž, že podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ bude spojením podprostorů $\mathbf{A}'_r, \mathbf{A}''_s, \mathbf{A}'''_t$ právě tehdy, bude-li $A' \in \bar{\mathbf{A}}$ a zaměření $\bar{\mathbf{V}}$ podprostoru $\bar{\mathbf{A}}$ bude generováno vektory (1). Právě provedený postup je zřejmě možno snadno zobecnit na případ spojení libovolného systému podprostorů.

Při provedené konstrukci spojení tří podprostorů zřejmě vůbec nebylo podstatné, že jsme vektorové prostory $\mathbf{V}'_r, \mathbf{V}''_s, \mathbf{V}'''_t$ určili pomocí jejich bází. Stejně bychom mohli postupovat i v tom případě, že bychom tyto prostory určili libovolnou množinou generátorů.

Jako speciální případ provedené konstrukce spojení podprostorů dostaneme známé věty pro podprostory trojrozměrného prostoru: Spojením dvou různých bodů je přímka, spojením tří bodů neležících na přímce je rovina, spojením přímky a bodu, který na ní neleží, je opět rovina, rovina je též spojením dvou různoběžek, popřípadě rovnoběžek. Přímku, která je spojením bodů A, B, budeme označovat symbolem $\overline{AB}$.

Místo slovního spojení „podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ je spojením podprostorů z množiny $\mathbf{M}$" se často, zvláště v případě trojrozměrného afinního prostoru, používá též rčení, že „podprostor $\bar{\mathbf{A}}$ je podprostory z množiny $\mathbf{M}$ určen". Např. říkáme, že rovina je určena třemi body, nebo dvěma různoběžkami atd.

Někdy bývá účelné považovat za podprostor afinního prostoru i prázdnou množinu. V tom případě dodefinujeme spojení prázdné množiny s neprázdným podprostorem $\mathbf{A}'_r$ takto: $\emptyset \vee \mathbf{A}'_r = \mathbf{A}'_r \vee \emptyset = \mathbf{A}'_r$. Samozřejmě klademe $\emptyset \vee \emptyset = \emptyset$. Nyní již můžeme vyslovit následující větu.

Věta 1.4.3. Buďte $\mathbf{A}'_r, \mathbf{A}''_s, \mathbf{A}'''_t$ podprostory prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom platí:

1. $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s = \mathbf{A}''_s \vee \mathbf{A}'_r$
2. $\mathbf{A}'_r \subset \mathbf{A}'''_t$ a $\mathbf{A}''_s \subset \mathbf{A}'''_t \Rightarrow \mathbf{A}''_r \vee \mathbf{A}''_s \subset \mathbf{A}'''_t$
3. $\mathbf{A}'_r \supset \mathbf{A}'''_t$ a $\mathbf{A}''_s \supset \mathbf{A}'''_t \Rightarrow \mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s \supset \mathbf{A}'''_t$
4. $(\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s) \vee \mathbf{A}'''_t = \mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s \vee \mathbf{A}'''_t = \mathbf{A}'_r \vee (\mathbf{A}''_s \vee \mathbf{A}'''_t)$
5. $\mathbf{A}'_r \cap (\mathbf{A}''_s \vee \mathbf{A}'''_t) \supset (\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s) \vee (\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}'''_t)$
6. $\mathbf{A}'_r \vee (\mathbf{A}''_s \cap \mathbf{A}'''_t) \subset (\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s) \cap (\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}'''_t)$

První tři tvrzení právě vyslovené věty jsou zřejmá. Tvrzení 4, 5, 6 můžeme snadno dokázat jednoduchým použitím tvrzení 1, 2, 3. Důkaz věty 1.4.3 tudíž ponecháme jako cvičení.

Definice 1.4.3. Buďte dány mimoběžné přímky p, q v prostoru $\mathbf{A}_n$. Přímku různoběžnou s oběma přímkami p, q nazýváme jejich *příčkou*.

Vyšetřování vzájemné polohy podprostorů si nyní ukážeme na konstrukci příčky dvou mimoběžek mající dané vlastnosti. Přitom mimoběžkami nazýváme dvě mimoběžné přímky.

Snadno se přesvědčíme, že bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na případ $n = 3$. Skutečně: jsou-li $p = [A; \mathbf{u}]$, $q = [B; \mathbf{v}]$ dvě mimoběžky v prostoru $\mathbf{A}_n$, musí obě ležet v podprostoru $\bar{\mathbf{A}}_3 = [A; A - B, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$ prostoru $\mathbf{A}_n$. V podprostoru $\bar{\mathbf{A}}_3$ musí zřejmě též ležet každá jejich příčka.

Úloha 1. K dvěma daným mimoběžkám $p = [A; \mathbf{u}]$, $q = [B; \mathbf{v}]$ afinního prostoru $\mathbf{A}_3$ určete jejich příčku r tak, aby měla zaměření $[\{\mathbf{w}\}]$ ($\mathbf{w}$ je vektor ze zaměření $\mathbf{V}_3$ prostoru $\mathbf{A}_3$). Přitom $[\{\mathbf{w}\}]$ znamená vektorový prostor o bázi $\mathbf{w}$. Stručně můžeme tuto úlohu formulovat takto: Veďte daným směrem příčku dvou mimoběžek.

Řešení provedeme dvojím způsobem. Za prvé řešení popíšeme pomocí tvoření průniků různých podprostorů nebo tvoření podprostorů určených jinými podprostory (tj. pomocí vět dokázaných v tomto odstavci). Toto řešení se často označuje jako „prostorové řešení". Za druhé řešení provedeme přímým výpočtem.

Nejdříve tedy první řešení. Je vidět, že k tomu, aby úloha měla řešení, musí být $[\{\mathbf{u}\}] \neq [\{\mathbf{w}\}] \neq [\{\mathbf{v}\}]$. Kdyby totiž bylo např. $[\{\mathbf{u}\}] = [\{\mathbf{w}\}]$, musela by hledaná přímka r splynout s přímkou p, což není možné, protože potom by neprotínala přímku q. Nechť tedy $[\{\mathbf{u}\}] \neq [\{\mathbf{w}\}] \neq [\{\mathbf{v}\}]$. Hledaná příčka r musí být různoběžná s přímkou p, a tudíž musí ležet v rovině $\varrho = [A; \mathbf{u}, \mathbf{w}]$. Protože příčka r musí být též různoběžná s přímkou q, musí ležet též v rovině $\sigma = [B; \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Vyšetříme nyní vzájemnou polohu obou rovin. Zřejmě roviny ϱ a σ jsou různé. Kdyby bylo $\varrho = \sigma$, ležely by obě přímky p, q v jedné rovině, a tudíž by nemohly být mimoběžné. Jsou-li roviny ϱ a σ rovnoběžné, nemá zřejmě úloha řešení. Je vidět, že tento případ nastane právě tehdy, leží-li vektor $\mathbf{w}$ ve vektorovém prostoru generovaném vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Je-li $\mathbf{w} \notin [\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}]$, jsou roviny ϱ a σ různoběžné a protnou se v přímce mající zaměření $[\{\mathbf{w}\}]$ (viz věty 1.4.2 a 1.4.4). Tato přímka je zřejmě hledaná příčka r, neboť protíná přímku p (r i p leží v rovině ϱ a nejsou rovnoběžné) i přímku q. Můžeme tedy shrnout: Úloha má řešení právě tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ lineárně nezávislé. V tomto případě je řešení určeno jednoznačně.

Teď vyřešíme úlohu druhým způsobem. Hledaná příčka r bude určena body $X \in p$ a $Y \in q$. Body X, Y můžeme psát ve tvaru $X = A + x\mathbf{u}$, $Y = B + y\mathbf{v}$. Příčka r bude mít zaměření $[\{\mathbf{w}\}]$ právě tehdy, bude-li vektor $X - Y = (A - B) + x\mathbf{u} - y\mathbf{v}$

násobkem vektoru $\mathbf{w}$. Protože jsou přímky p, q mimoběžné, tvoří vektory $A - B$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ bázi prostoru $\mathbf{V}_3$. Každý vektor v prostoru $\mathbf{V}_3$, tedy i vektor $\mathbf{w}$, můžeme proto vyjádřit jako jejich lineární kombinaci. Tudíž můžeme psát $\mathbf{w} = w_1(A - B) + w_2\mathbf{u} + w_3\mathbf{v}$. K tomu, aby existovaly body $X \in p$, $Y \in q$, pro něž je vektor $X - Y$ násobkem vektoru $\mathbf{w}$, je tedy nutné a stačí, aby bylo $w_1 \neq 0$. V tom případě můžeme položit $x = w_2/w_1$, $y = -w_3/w_1$ a body X, Y, které tímto způsobem získáme, zřejmě určují hledanou příčku r. Dostáváme, jak je vidět, stejný výsledek, jako při prvním řešení úlohy.

Úloha 2. K dvěma mimoběžkám $p = [A; \mathbf{u}]$, $q = [B; \mathbf{v}]$ určete jejich příčku r tak, aby procházela daným bodem M neležícím na žádné z nich.

Řešení. Nejdříve opět provedeme tzv. „prostorové řešení" (viz úloha 1): Bodem M a přímkou p je určena rovina ϱ. Bodem M a přímkou q je určena rovina σ. Roviny ϱ a σ jsou různé (jinak by přímky p, q nebyly mimoběžné) a zřejmě různoběžné (obsahují obě bod M). Jejich průsečnici označme r. Přímka r bude hledanou příčkou právě tehdy, nebude-li rovnoběžná ani s přímkou p, ani s přímkou q. Přímka r bude rovnoběžná s přímkou p právě tehdy, bude-li vektor $\mathbf{u}$ ležet v zaměření roviny σ, neboli bude-li přímka p rovnoběžná s rovinou σ. Podobně přímka r bude rovnoběžná s přímkou q právě tehdy, bude-li přímka q rovnoběžná s rovinou ϱ. Dostáváme výsledek: K tomu, aby úloha měla řešení, je nutné a stačí, aby bod M neležel ani v rovině obsahující přímku p a rovnoběžné s přímkou q, ani v rovině obsahující přímku q a rovnoběžné s přímkou p. V tom případě, že úloha má řešení (tj. uvedené podmínky jsou splněny), má řešení právě jedno.

K stejnému výsledku můžeme opět dospět i přímým výpočtem. Protože vektory $B - A$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé, můžeme psát $M = A + m_1(B - A) + m_2\mathbf{u} + m_3\mathbf{v}$. K tomu, aby příčka mimoběžek p, q procházející body $X = A + x\mathbf{u}$, $Y = B + y\mathbf{v}$ procházela bodem M, je nutné a stačí, aby vektory $X - Y$ a $X - M$ byly lineárně závislé. Je

$$X - Y = A - B + x\mathbf{u} - y\mathbf{v}$$
$$X - M = X - A - m_1(B - A) - m_2\mathbf{u} - m_3\mathbf{v}.$$

Tudíž (použijeme-li rovnost $X - A = x\mathbf{u}$)

$$X - M = m_1(A - B) + (x - m_2)\,\mathbf{u} - m_3\mathbf{v}.$$

Vektory $X - Y$ a $X - M$ jsou tedy, jak je vidět, lineárně závislé právě tehdy, je-li

$$x - m_2 = xm_1, \qquad m_3 = ym_1,$$

a tedy

$$x(1 - m_1) = m_2, \qquad ym_1 = m_3. \tag{2}$$

Vidíme, že je-li $0 \neq m_1 \neq 1$, existuje právě jedna dvojice čísel (x, y) řešící soustavu (2), a tedy i jediná příčka mimoběžek p, q procházející bodem M. Je-li $m_1 = 0$, nemůže již být $m_3 = 0$, neboť v tom případě by bylo $M = A + m_2\boldsymbol{u}$, a tedy $M \in p$, což jsme vyloučili. Pro $m_1 = 0$ tudíž úloha nemá řešení. Vidíme, že $m_1 = 0$ právě tehdy, leží-li bod M v rovině obsahující přímku p a rovnoběžné s přímkou q. Je-li $m_1 = 1$, je $m_2 \neq 0$ (pro $m_1 = 1$, $m_2 = 0$ je $M = A + (B - A) + m_3\boldsymbol{v} = B + m_3\boldsymbol{v}$, a tedy $M \in q$). Úloha opět nemá řešení. Rovnost $m_1 = 1$ přitom znamená, že je $M = A + (B - A) + m_2\boldsymbol{u} + m_3\boldsymbol{v} = B + m_2\boldsymbol{u} + m_3\boldsymbol{v}$, což je ekvivalentní podmínce, že bod M leží v rovině vedené přímkou q rovnoběžně s přímkou p. Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku jako při prvním řešení.

Následující věta nám umožní vypočítat dimenzi spojení dvou podprostorů.

Věta 1.4.4. Mějme dány dva podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$. Označme q dimenzi jejich spojení, p dimenzi jejich průniku a p' dimenzi průniku jejich zaměření. Potom, je-li $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s = \emptyset$, je

$$r + s = p' + q - 1,$$

a je-li $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s \neq \emptyset$, je

$$r + s = p + q.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}'_r = [A; \mathbf{V}'_r]$, $\mathbf{A}''_s = [B; \mathbf{V}''_s]$, $\mathbf{V}'_r = [\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_r\}]$, $\mathbf{V}''_s = [\{\boldsymbol{u}''_1, \ldots, \boldsymbol{u}''_s\}]$. Zaměření prostoru $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s$ je generováno vektory

$$B - A, \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_r, \boldsymbol{u}''_1, \ldots, \boldsymbol{u}''_s.$$

Označme q' dimenzi prostoru $[\mathbf{V}'_r \cup \mathbf{V}''_s]$. Podle odstavce 5 z úvodu je

$$(3) \qquad r + s = p' + q'.$$

Nyní, je-li $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s = \emptyset$, je vektor $B - A$ lineárně nezávislý na vektorech $\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_r$, $\boldsymbol{u}''_1, \ldots, \boldsymbol{u}''_s$ (viz věta 1.4.1). Tudíž je $q' = q - 1$ a z rovnosti (3) dostáváme první tvrzení. Je-li $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s \neq \emptyset$, je (opět viz větu 1.4.1) $q' = q$ a dostáváme druhé tvrzení.

Důsledek. Je-li ve větě 1.4.4 $s = n - 1$, jsou podprostory $\mathbf{A}'_r$, $\mathbf{A}''_{n-1}$ buď rovnoběžné (incidentní nebo neincidentní), nebo různoběžné. V druhém případě má prostor $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_{n-1}$ dimenzi $r - 1$ (tj. $p = r - 1$).

Tvrzení důsledku okamžitě dostáváme z věty 1.4.4, uvážíme-li, že je buď $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_{n-1} = \mathbf{A}''_{n-1}$, nebo $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_{n-1} = \mathbf{A}_n$.

Z věty 1.4.4 a z jejího důsledku dostáváme vyšetření vzájemné polohy dvou podprostorů trojrozměrného prostoru, případně roviny. Dostaneme známá tvrzení: Dvě přímky v rovině mohou být buď totožné, nebo rovnoběžné různé, nebo různoběžné – v tomto případě mají společný právě jeden bod. Dvě roviny v trojrozměrném prostoru $\mathbf{A}_3$ mohou být opět totožné, nebo rovnoběžné různé, nebo různoběžné – protínající se v přímce. A konečně přímka v $\mathbf{A}_3$ může buď ležet

v dané rovině, nebo s ní je rovnoběžná a neleží v ní, nebo různoběžná – v tom případě se s ní protíná v bodě. Dvě přímky v trojrozměrném prostoru mohou být, jak se snadno přesvědčíme, buď totožné, nebo rovnoběžné různé, nebo různoběžné, nebo mimoběžné.

Věta 1.4.4 nám umožňuje vyšetřit vzájemnou polohu dvou podprostorů n-rozměrného prostoru. Víme, že jestliže jsou podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ různoběžné, je dimenze jejich průniku rovna dimenzi průniku jejich zaměření (viz věta 1.4.2), a tudíž, při označení zavedeném ve větě 1.4.4, je $p = p'$. Vidíme, že známe-li čísla q, q', můžeme určit číslo p' i to, jestli oba podprostory $\mathbf{A}'_r$ a $\mathbf{A}''_s$ jsou různoběžné či nikoliv (stačí ověřit, která z rovností věty 1.4.4 platí). Stejný výsledek můžeme dostat i přímo z věty 1.4.1. Nechť $\mathbf{V}'_r = [\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}]$, $\mathbf{V}''_s = [\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}]$. Potom $[\mathbf{V}'_r \cup \mathbf{V}''_s] = [\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s\}]$ a (předpokládáme, že je $\mathbf{A}'_r = [A; \mathbf{V}'_r]$ a $\mathbf{A}''_s = [B; \mathbf{V}''_s]$) $\mathbf{A}'_r \vee \mathbf{A}''_s = [A; B - A, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s]$. Odtud vyplývá, že musí být buď $q = q'$, nebo $q = q' + 1$. Je-li $q = q'$, je vektor $B - A$ lineárně závislý na vektorech $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$, a oba podprostory jsou tedy různoběžné (věta 1.4.2). Dimenzi jejich průniku určíme z věty 1.4.4. Je-li $q = q' + 1$, musí být podle věty 1.4.2 $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s = \emptyset$. Dimenzi p' průniku $\mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$ určíme buď z věty 1.4.4, nebo ze vzorce (3). Máme-li body A, B a vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ dány jejich souřadnicemi v dané lineární soustavě souřadnic, určíme číslo q jako hodnost matice mající v řádcích souřadnice vektorů $B - A, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$. Podobně určíme číslo q'. Zkoumání vzájemné polohy dvou podprostorů je tím redukováno na zjišťování hodnosti dané matice. Právě provedený postup si předvedeme na zkoumání vzájemné polohy dvou rovin v afinním prostoru $\mathbf{A}_5$. Tento postup můžeme pochopitelně též výhodně použít i v prostoru $\mathbf{A}_3$ (v podstatě jsme to tak již dělali).

Příklad 4. Určete vzájemnou polohu rovin $\varrho = [A; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}]$ a $\sigma = [B; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ v afinním prostoru $\mathbf{A}_5$. Přitom v dané lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ je

a) $A = [1, 3, 0, 0, 0]$, $\quad \boldsymbol{t} = (1, 0, 0, 0, 0)$, $\quad \boldsymbol{u} = (0, 5, 0, 1, 0)$,
$B = [0, 0, 3, 0, -1]$, $\quad \boldsymbol{v} = (0, 0, 3, 2, 0)$, $\quad \boldsymbol{w} = (0, 1, 1, 1, 1)$;

b) $A = [0, 0, 0, 0, 0]$, $\quad \boldsymbol{t} = (1, 2, 0, -1, 0)$, $\quad \boldsymbol{u} = (0, 1, 1, 0, 0)$,
$B = [2, 1, 0, 0, 0]$, $\quad \boldsymbol{v} = (0, 0, -1, 0, 3)$, $\quad \boldsymbol{w} = (2, 3, -2, -2, 3)$;

c) $A = [1, 0, -1, 0, 0]$, $\quad \boldsymbol{t} = (1, 3, -1, 0, 1)$, $\quad \boldsymbol{u} = (0, 0, 0, 1, 0)$,
$B = [2, 0, 3, 2, -1]$, $\quad \boldsymbol{v} = (0, 0, 2, 1, 0)$, $\quad \boldsymbol{w} = (-1, 0, 0, 0, 1)$.

Řešení. Ve všech případech budeme určovat dimenzi q vektorového prostoru $[\{B - A, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}]$ a dimenzi q' vektorového prostoru $[\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}]$. Z čísel q a q' pak určíme vzájemnou polohu rovin ϱ a σ podle obecného postupu provedeného výše.

a) Vypočítáním hodnosti příslušné matice určíme, že $q = 5$ a $q' = 4$. Obě roviny jsou tudíž mimoběžné a průnik jejich zaměření je triviální vektorový prostor $\{\boldsymbol{o}\}$.

b) V tomto případě zjistíme, že je $q = 4$, $q' = 3$. Tudíž podprostory jsou mimoběžné a ze vzorce (3) plyne, že $p' = 1$. Chceme-li najít vektor generující prostor $\mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$, musíme najít netriviální lineární kombinaci vektorů $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ rovnou nulovému vektoru. Tato úloha vede na řešení soustavy lineárních rovnic. Jejím vyřešením zjistíme, že

$$2\mathbf{t} - \mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{o}.$$

Tudíž prostor $\mathbf{V}'_r \cap \mathbf{V}''_s$ je generován vektorem $2\mathbf{t} - \mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v} = (2, 3, -1, -2, 0)$.

c) Dostaneme $q' = q = 4$. Odtud $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s \neq \emptyset$ a z věty 1.4.4 dostaneme $p = 0$, a tudíž existuje bod C tak, že je $\mathbf{A}'_r \cap \mathbf{A}''_s = \{C\}$. Chceme-li určit bod C, musíme napsat vektor $B - A$ jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Opět vyřešíme soustavu lineárních rovnic a dostaneme

$$B - A = 0 \,.\, \mathbf{t} + 0 \,.\, \mathbf{u} + 2 \,.\, \mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Tudíž

$$C = A + 0 \,.\, \mathbf{t} + 0 \,.\, \mathbf{u} = B - 2 \,.\, \mathbf{v} + \mathbf{w}.$$

V našem případě tedy $C = A$.

Vzájemnou polohu více než dvou podprostorů v n-rozměrném afinním prostoru nebudeme zkoumat. Pro ilustraci si ukážeme pouze jediný příklad tohoto typu.

Příklad 5. Mějme v $\mathbf{A}_n$, kde $n \geqq 6$, dány dvě roviny ϱ, σ, které jsou mimoběžné a jejich zaměření mají průnik $\{\mathbf{o}\}$. Buď $A \in \mathbf{A}_n$, $A \notin \varrho \vee \sigma$. Určete množinu $\mathbf{M}$ všech bodů $X \in \mathbf{A}_n$, pro něž platí: V $\mathbf{A}_n$ existuje rovina τ tak, že $X \in \tau$, $A \in \tau$, $\tau \cap \varrho \neq \emptyset$, $\tau \cap \sigma \neq \emptyset$.

Řešení. Hledejme nejdříve nutné podmínky pro body množiny $\mathbf{M}$. Buď tedy $X \in \mathbf{M}$, potom existují body $R \in \varrho$, $S \in \sigma$ a rovina τ tak, že $R, S, A, X \in \tau$. Body R, S, A zřejmě neleží na jedné přímce (jinak by bylo $A \in \varrho \vee \sigma$), a proto je jimi rovina τ určena jednoznačně a je $\tau \subset \varrho \vee \sigma \vee \{A\}$. Tudíž je i $X \in \varrho \vee \sigma \vee \{A\}$. Ze zadání příkladu a z věty 1.4.4 vyplývá, že je $\varrho \vee \sigma \vee \{A\}$ podprostor dimenze 6 – označme ho $\mathbf{A}'_6$. V prostoru $\mathbf{A}'_6$ nyní zvolíme vhodným způsobem repér $\mathscr{R}$. Buď $\varrho = [B; \mathbf{t}, \mathbf{u}]$, $\sigma = [C; \mathbf{v}, \mathbf{w}]$. Ze zadání vyplývá, že vektory $B - A$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{u}$, $C - A$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, a můžeme proto položit $\mathscr{R} = \langle A; B - A, \mathbf{t}, \mathbf{u}, C - A, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{S}$ určené repérem $\mathscr{R}$ bude $R = [1, r', r'', 0, 0, 0]$ (je $R = B + r'\mathbf{t} + r''\mathbf{u}$) a podobně $S = [0, 0, 0, 1, s', s'']$. Nechť $X = [x_1, \ldots, x_6]$. Určíme-li rovinu τ body A, R, S, bude $X \in \tau$ právě tehdy, bude-li vektor $X - A = (x_1, \ldots, x_6)$ lineární kombinací vektorů $R - A = (1, r', r'', 0, 0, 0)$ a $S - A = (0, 0, 0, 1, s', s'')$. Nyní vidíme, že bude $X \in \mathbf{M}$ právě tehdy, nastane-li jedna z následujících možností:

1. $x_1 \neq 0$ a $x_4 \neq 0$.

V tomto případě můžeme totiž položit $R = [1, x_2/x_1, x_3/x_1, 0, 0, 0]$, $S = [0, 0, 0, 1, x_5/x_4, x_6/x_4]$ a je $X - A = x_1(R - A) + x_4(S - A)$.

2. $x_1 \neq 0$ a $x_4 = x_5 = x_6 = 0$.

V tomto případě zvolíme bod R jako v bodě 1 a dostaneme $X - A = x_1(R - A)$.

3. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ a $x_4 \neq 0$.

V tomto případě zvolíme bod S jako v bodě 1 a dostaneme $X - A = x_4(S - A)$.

4. $X = A$.

$R \in \varrho$, $S \in \sigma$ volíme libovolně.

Obdržené výsledky musíme ještě zformulovat geometricky. V $\mathbf{A}'_6$ najdeme množinu $\mathbf{M}'$ tak, aby bylo $\mathbf{M} = \mathbf{A}'_6 \setminus \mathbf{M}'$. Vidíme, že $X \in \mathbf{M}'$ právě tehdy, je-li $X \neq A$ a nastane-li alespoň jedna z možností:

a) $x_1 = 0$, a buď $x_2 \neq 0$, nebo $x_3 \neq 0$;

b) $x_4 = 0$, a buď $x_5 \neq 0$, nebo $x_6 \neq 0$.

Všechny body $X \in \mathbf{A}'_6$, pro které platí $x_1 = 0$, vyplní zřejmě podprostor $\mathbf{A}''_5$. Snadno se přesvědčíme, že je $A \in \mathbf{A}''_5$, $\sigma \subset \mathbf{A}''_5$ a $\varrho \parallel \mathbf{A}''_5$. Těmito podmínkami je podprostor $\mathbf{A}''_5$ určen geometricky. Podmínky $x_2 = 0$ a $x_3 = 0$ mám v $\mathbf{A}''_5$ určují trojrozměrný podprostor $\mathbf{A}^1_3$ (abychom různé podprostory rozlišili, budeme je označovat ještě indexem nahoře). Zřejmě $A \in \mathbf{A}^1_3$ a $\sigma \subset \mathbf{A}^1_3$, a tudíž $\mathbf{A}^1_3 = \{A\} \vee \sigma$. Tudíž bod $X \in \mathbf{A}'_6$ splňuje podmínky a) právě tehdy, je-li $X \in \mathbf{A}''_5 \setminus \mathbf{A}^1_3$. Podobně, budeme-li zkoumat podmínky b), sestrojíme podprostor $\mathbf{A}'''_5$ tak, že $A \in \mathbf{A}'''_5$, $\varrho \subset \mathbf{A}'''_5$ a $\sigma \parallel \mathbf{A}'''_5$. Dále položíme $\mathbf{A}^2_3 = \{A\} \vee \varrho$. Potom bod $X \in \mathbf{A}'_6$ bude splňovat podmínky b) právě tehdy, bude-li $X \in \mathbf{A}'''_5 \setminus \mathbf{A}^2_3$. Sloučíme-li všechny dosud zjištěné podmínky, dostaneme, že platí

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}'_6 \setminus (\mathbf{A}''_5 \setminus \mathbf{A}^1_3) \cup (\mathbf{A}'''_5 \setminus \mathbf{A}^2_3)) \cup \{A\},$$

nebo po úpravě (čistě množinové)

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}'_6 \setminus \mathbf{A}''_5 \cup \mathbf{A}'''_5) \cup \mathbf{A}^1_3 \cup \mathbf{A}^2_3.$$

Tím je příklad vyřešen.

Příklad 5 byl uveden jen pro ilustraci vzájemné polohy více podprostorů ve vícerozměrných prostorech. Za povšimnutí však stojí metoda, kterou jsme při jeho řešení použili, a která se často používá i při řešení úloh v rovině nebo v trojrozměrném prostoru. Tuto metodu můžeme rozepsat do tří kroků.

1. Zvolíme repér tak, aby všechny zadané množiny a podmínky se daly co nejjednodušším způsobem popsat pomocí podmínek na souřadnice bodů (souřadnice bereme pochopitelně v lineární soustavě souřadnic určené zvoleným repérem).
2. Vyřešíme úlohu početně – tj. vyřešíme příslušnou algebraickou úlohu, na niž jsme naši geometrickou úlohu převedli volbou soustavy souřadnic.
3. Najdeme geometrickou interpretaci získaných výsledků, tj. zformulujeme výsledek bez pomoci souřadnic – jen pomocí daných podprostorů, popřípadě pomocí podprostorů utvořených z daných podprostorů množinovými operacemi a operací spojení podprostorů.

Příklad 5 jsme mohli řešit i bez použití lineární soustavy souřadnic, ale toto řešení je myšlenkově poněkud náročnější.

Cvičení

Cvičení 1–7 řešte v prostoru $\mathbf{A}_3$. Ve všech příkladech předpokládáme, že v afinním prostoru máme zvolenou lineární soustavu souřadnic, v níž je dáno zadání a v níž počítáme výsledek.

1. Zjistěte, zda body $A_1 = [2, 1, -1]$, $A_2 = [3, 3, 1]$, $A_3 = [2, 1, -5]$, $A_4 = [5, 4, -1]$, $A_5 = [5, 7, 4]$ leží na přímce $[A; \boldsymbol{u}]$, kde $A = [3, 3, -2]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$.

2. Zjistěte, zda body $A_1 = [0, 0, -3]$, $A_2 = [1, 1, 3]$, $A_3 = [3, 1, -5]$, $A_4 = [1, 2, -3]$, $A_5 = [-1, -2, -3]$, $A_6 = [1, 3, 1]$ leží v rovině $[A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, kde $A = [1, 1, -4]$, $\boldsymbol{u} = (-1, -1, 1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 3, 1)$.

3. Určete vzájemnou polohu přímek $[A; \boldsymbol{u}]$ a $[B; \boldsymbol{v}]$. Přitom je
a) $A = [1, 2, -1]$, $\boldsymbol{u} = (0, 1, 3)$, $B = [0, 0, 2]$, $\boldsymbol{v} = (1, -3, 1)$;
b) $A = [1, 3, -1]$, $\boldsymbol{u} = (2, -4, 3)$, $B = [0, -3, 1]$, $\boldsymbol{v} = (-1, 2, -3/2)$;
c) $A = [0, 1, -1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$, $B = [2, 3, 2]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, 2)$;
d) $A = [1, 2, 3]$, $\boldsymbol{u} = (2, -2, 4)$, $B = [0, 3, 1]$, $\boldsymbol{v} = (-3, 3, -6)$;
e) $A = [0, 0, -1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 1, 3)$, $B = [0, -1, 2]$, $\boldsymbol{v} = (2, 3, 3)$;
f) $A = [0, 0, 0]$, $\boldsymbol{u} = (1, 4, 2)$, $B = [3, 1, 2]$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, 2)$.
V případě různoběžnosti obou přímek určete jejich průsečík P.

4. Určete vzájemnou polohu přímky $[A; \boldsymbol{u}]$ a roviny $[B; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$. Přitom je
a) $A = [1, 1, -2]$, $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 0)$, $B = [2, 3, 1]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (3, 1, -2)$;
b) $A = [0, -2, 4]$, $\boldsymbol{u} = (1, -1, 2)$, $B = [-1, -1, -3]$, $\boldsymbol{v} = (1, 3, 3)$, $\boldsymbol{w} = (-2, -2, 0)$;
c) $A = [-2, 1, 0]$, $\boldsymbol{u} = (-2, 1, -2)$, $B = [1, 2, 2]$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{w} = (1, 3, -2)$;
d) $A = [1, 4, -3]$, $\boldsymbol{u} = (-1, 3, -4)$, $B = [3, 3, 0]$, $\boldsymbol{v} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{w} = (3, 1, 2)$.
V případě různoběžnosti přímky a roviny určete jejich průsečík P.

5. Určete vzájemnou polohu rovin $[B; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ a $[B'; \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}']$. Přitom je
a) $B = [3, 3, -4]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, 3)$, $B' = [0, 0, 0]$, $\boldsymbol{u}' = (-2, -1, 3)$, $\boldsymbol{v}' = (3, 4, -1)$;
b) $B = [3, 0, 1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{v} = (3, 1, -1)$, $B' = [-2, -5, -2]$, $\boldsymbol{u}' = (4, 3, 1)$, $\boldsymbol{v}' = (-1, 3, 5)$;
c) $B = [1, 0, -2]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, -2)$, $\boldsymbol{v} = (2, 3, 1)$, $B' = [0, -3, 1]$, $\boldsymbol{u}' = (1, 0, 4)$, $\boldsymbol{v}' = (0, 1, -1)$;
d) $B = [3, 0, -1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v} = (2, 3, -3)$, $B' = [3, 2, -1]$, $\boldsymbol{u}' = (1, 2, -2)$, $\boldsymbol{v}' = (0, 1, -1)$.

6. Sestrojte příčku mimoběžek $p = [A; \boldsymbol{u}]$, $q = [B; \boldsymbol{v}]$ tak, aby měla směr $[\{\boldsymbol{w}\}]$. Příčku r určete body $P = p \cap r$ a $Q = q \cap r$. Přitom je
a) $A = [-1, 1, -5]$, $\boldsymbol{u} = (1, 1, 2)$, $B = [1, -2, 3]$, $\boldsymbol{v} = (1, 3, -1)$, $\boldsymbol{w} = (1, -2, 3)$;
b) $A = [-3, -1, 5]$, $\boldsymbol{u} = (2, 2, -3)$, $B = [-1, -3, -3]$, $\boldsymbol{v} = (3, 1, 4)$, $\boldsymbol{w} = (2, -2, 3)$.

7. Sestrojte příčku r mimoběžek $p = [A; \boldsymbol{u}]$, $q = [B; \boldsymbol{v}]$ procházející bodem M. Příčku určete body $P = p \cap r$ a $Q = q \cap r$. Přitom je
a) $A = [3, -1, 4]$, $\boldsymbol{u} = (1, -1, 2)$, $B = [-1, 2, -2]$, $\boldsymbol{v} = (2, 0, 1)$, $M = [1, 3, -2]$;
b) $A = [0, 2, -2]$, $\boldsymbol{u} = (1, 1, 3)$, $B = [1, 1, 7]$, $\boldsymbol{v} = (0, 2, -1)$, $M = [-2, 5, 2]$.

8. V afinním prostoru $\mathbf{A}_4$ určete vzájemnou polohu rovin $\varrho = [A; \boldsymbol{t}, \boldsymbol{u}]$, $\sigma = [B; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$. Přitom je
a) $A = [4, 2, 2, 2]$, $\boldsymbol{t} = (1, 0, 0, -1)$, $\boldsymbol{u} = (1, 0, 3, 2)$,
$B = [-2, -2, 2, 0]$, $\boldsymbol{v} = (-1, 0, 5, 0)$, $\boldsymbol{w} = (2, 2, 1, 0)$;
b) $A = [3, 2, -1, 0]$, $\boldsymbol{t} = (2, -1, 3, 1)$, $\boldsymbol{u} = (0, -1, 3, -2)$,
$B = [4, 2, 0, 0]$, $\boldsymbol{v} = (-2, -2, 0, 5)$, $\boldsymbol{w} = (-2, -1, 0, 1)$;
c) $A = [3, 3, -3, -3]$, $\boldsymbol{t} = (1, 4, 1, 6)$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1, 0)$,
$B = [7, -9, -5, -7]$, $\boldsymbol{v} = (3, -3, -1, 1)$, $\boldsymbol{w} = (3, -5, -3, -5)$.

9. V afinním prostoru $\mathbf{A}_4$ určete vzájemnou polohu roviny $\varrho = [A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]$ a nadroviny $\mathbf{A}'_3 = [B; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]$. Přitom je
a) $A = [3, 3, -1, 3]$, $\boldsymbol{u}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, -2, -1, 0)$,
$B = [1, 4, -6, 2]$, $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 0, 2, -1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, 0, 3, 1)$;
b) $A = [2, 0, 1, -4]$, $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, -1, 5)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1, 2, -1, 1)$,
$B = [0, -2, 0, -2]$, $\boldsymbol{v}_1 = (0, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (2, 0, -1, 0)$, $\boldsymbol{v}_3 = (3, 3, 0, 1)$.

1.5. Vyjádření podprostoru rovnicemi

V tomto odstavci si popíšeme podprostor afinního prostoru pomocí rovnic – tzv. neparametrické vyjádření podprostoru. Nejjednodušší je toto vyjádření u nadroviny.

Nejdříve připomeneme jeden algebraický pojem – lineární formu na vektorovém prostoru. Zobrazení f vektorového prostoru $\mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{R}$ se nazývá *lineární forma* na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, jestliže pro každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}$ a pro každé číslo $c \in \mathbf{R}$ platí

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(c\boldsymbol{x}) &= cf(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Lineární formy můžeme sčítat podobně jako funkce v matematické analýze. Máme-li dány lineární formy f, g na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, nazveme jejich součtem zobrazení h prostoru $\mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{R}$ přiřazující každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}$ číslo $h(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$. Snadno se přesvědčíme, že zobrazení h je též lineární forma. Pro vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ je totiž $h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) + g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$, a tedy

$$h(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = h(\mathbf{x}) + h(\mathbf{y}).$$

Podobně bychom ukázali, že pro číslo $c \in \mathbf{R}$ platí $h(c\mathbf{x}) = ch(\mathbf{x})$. Lineární formu h nazýváme *součet lineárních forem* f a g a označujeme ji $f + g$ (tj. $h = f + g$).

Další operace, kterou zavedeme, bude násobení lineární formy číslem $c \in \mathbf{R}$. *Násobkem lineární formy f číslem* $c \in \mathbf{R}$ nazýváme zobrazení h vektorového prostoru $\mathbf{V}$ do tělesa $\mathbf{R}$ přiřazující každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ číslo $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$. Opět bychom se snadno přesvědčili, že zobrazení h je lineární forma. Lineární formu h budeme označovat symbolem cf. Tudíž lineární forma cf je určena tím, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí $(cf)(\mathbf{x}) = c(f(\mathbf{x}))$.

S použitím úplné indukce snadno dokážeme tvrzení: Je-li f lineární forma, pak pro každé vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{V}$ platí

$$f(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_1) + \dots + f(\mathbf{x}_k). \tag{2}$$

Zvolíme-li nyní ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, můžeme každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ psát ve tvaru

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Číslo $f(\mathbf{x})$ pak snadno vypočítáme pomocí vztahů (1) a (2)

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{u}_1 + \dots + x_n\mathbf{u}_n) = f(x_1\mathbf{u}_1) + \dots + f(x_n\mathbf{u}_n),$$

a tedy

$$f(\mathbf{x}) = x_1 f(\mathbf{u}_1) + \dots + x_n f(\mathbf{u}_n).$$

Označíme-li $a_1 = f(\mathbf{u}_1), \dots, a_n = f(\mathbf{u}_n)$, je

$$f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n. \tag{3}$$

Vztah (3) nazýváme analytické vyjádření lineární formy f.

Jestliže každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřadíme číslo 0, je toto zobrazení lineární formou. Tato lineární forma se nazývá *nulová*, ostatní formy se nazývají *nenulové formy*. Je-li forma f nulová, pak všechna čísla a_i, $i = 1, \dots, n$ ve vyjádření (3) jsou rovna nule (je $a_i = f(\mathbf{u}_i)$, $i = 1, \dots, n$). Je-li obráceně $a_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, je $f(\mathbf{x}) = 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ (viz (3)).

Můžeme se snadno přesvědčit, že jestliže nyní libovolně zvolíme čísla $a_1, \dots, a_n$ a každému vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ přiřadíme číslo $f(\mathbf{x})$ předpisem (3), je zobrazení f, tímto způsobem definované, lineární formou na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$.

Mějme nyní dánu nenulovou lineární formu f. Tudíž existuje i $(1 \leqq i \leqq n)$ tak, že $a_i \neq 0$. Zkoumejme nyní, jak vypadá množina všech vektorů $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pro něž je $f(\mathbf{x}) = 0$ – tato množina se nazývá *nulová množina* lineární formy f. Je vidět,

že je-li $f(\mathbf{x}) = 0$ a $f(\mathbf{y}) = 0$, je i $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$ a $f(c\mathbf{x}) = 0$ pro každé číslo $c \in \mathbf{R}$ (viz vztahy (1)), a tedy nulová množina lineární formy je vektorový prostor – podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Zřejmě tento vektorový prostor má dimenzi $n - 1$. Je-li totiž v analytickém vyjádření (3) např. $a_n \neq 0$, tj., je-li $i = n$, jsou vektory

$$\begin{gathered}(1, 0, 0, \dots, 0, -(a_1/a_n)),\\ (0, 1, 0, \dots, 0, -(a_2/a_n)),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (0, \dots, 0, 1, -(a_{n-1}/a_n))\end{gathered}$$

lineárně nezávislé a patří, jak je vidět, do nulové množiny lineární formy f. Tudíž nulová množina lineární formy f je vektorový prostor, který má dimenzi alespoň $n - 1$. Kdyby nulová množina měla dimenzi n, musel by to být již celý vektorový prostor $\mathbf{V}$, což není možné, protože např. vektor $\mathbf{u}_n$ nepatří do nulové množiny lineární formy f (je $f(\mathbf{u}_n) = a_n \neq 0$). Tvrzení, že nulová množina nenulové lineární formy je vektorový prostor dimenze $n - 1$, též okamžitě vyplývá pomocí vztahu (3) z teorie homogenních lineárních rovnic.

Můžeme se snadno přesvědčit, že obráceně každý podprostor $\mathbf{V}'$ dimenze $n - 1$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$ je nulovou množinou nějaké lineární formy: Má-li vektorový prostor $\mathbf{V}'$ bázi $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_{n-1}$, můžeme tuto bázi doplnit na bázi $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$ celého vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Přiřadíme-li nyní každému vektoru $\mathbf{x} = x'_1\mathbf{u}'_1 + \dots + x'_n\mathbf{u}'_n$ číslo x'_n, tj., definujeme-li lineární formu f předpisem $f(\mathbf{x}) = x'_n$, má lineární forma f, kterou jsme obdrželi, za svou nulovou množinu právě vektorový prostor $\mathbf{V}'$. Je vidět, že je-li $\bar{f}$ jiná lineární forma, která má za nulovou množinu vektorový prostor $\mathbf{V}'$, je forma $\bar{f}$ násobkem formy f, tj. existuje číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že je $\bar{f}(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Je-li totiž $\bar{f}(\mathbf{x}) = \bar{a}_1x'_1 + \dots + \bar{a}_nx'_n$ analytické vyjádření formy $\bar{f}$ v bázi $\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n$, musí být $\bar{a}_1 = \dots = \bar{a}_{n-1} = 0$ (je $\bar{a}_i = \bar{f}(\mathbf{u}'_i)$, $i = 1, \dots, n - 1$), a tudíž $\bar{f}(\mathbf{x}) = \bar{a}_nx'_n$, a tedy $\bar{f} = \bar{a}_nf$.

Postupným ověřováním axiómů vektorového prostoru bychom dokázali, že množina všech lineárních forem na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ je se zavedenými operacemi (sčítání lineárních forem a násobení lineárních forem čísly z tělesa $\mathbf{R}$) vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$. Nulovým vektorem v tomto vektorovém prostoru všech lineárních forem je zřejmě nulová lineární forma. Vektorový prostor všech lineárních forem na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nazýváme *duální vektorový prostor* k vektorovému prostoru $\mathbf{V}$ a označujeme ho $\hat{\mathbf{V}}$.

Připomeňme ještě, že je-li

$$f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n, \quad \text{resp.} \quad g(\mathbf{x}) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$$

analytické vyjádření lineární formy f, resp. g, dostáváme analytické vyjádření lineární formy $f + g$, resp. cf ve tvaru

$$(f + g)(\boldsymbol{x}) = (a_1 + b_1)x_1 + \ldots + (a_n + b_n)x_n,$$

resp.

$$(cf)(\boldsymbol{x}) = ca_1x_1 + \ldots + ca_nx_n.$$

Též je zřejmé, že je-li f lineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$, a je-li $\mathbf{W}$ podprostor vektorového prostoru $\mathbf{V}$, pak omezíme-li definiční obor lineární formy f na vektorový prostor $\mathbf{W}$, dostáváme lineární formu $\bar{f}$ na vektorovém prostoru $\mathbf{W}$. Forma $\bar{f}$ tedy přiřazuje každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbf{W}$ číslo $f(\boldsymbol{x})$ (tj. pro $\boldsymbol{x} \in \mathbf{W}$ je $\bar{f}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$). Nulová množina lineární formy $\bar{f}$ je pak průnik nulové množiny lineární formy f s vektorovým prostorem $\mathbf{W}$.

Přestože pro potřeby předkládaného kursu geometrie žádné další vlastnosti lineárních forem již nebudeme potřebovat, uvedeme pro úplnost ještě některé vlastnosti duálního vektorového prostoru. Nadále budeme předpokládat, že souřadnice vektorů i analytická vyjádření lineárních forem bereme v dané bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Předpisem $f_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, $i = 1, \ldots, n$ jsou definovány lineární formy $f_1, \ldots, f_n$ na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Je vidět, že rovnost (3) můžeme psát ve tvaru $f(\boldsymbol{x}) = a_1f_1(\boldsymbol{x}) + \ldots + a_nf_n(\boldsymbol{x})$, a použijeme-li zavedené operace na vektorovém prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$, můžeme psát

$$f(\boldsymbol{x}) = (a_1f_1 + \ldots + a_nf_n)(\boldsymbol{x}).$$

Tudíž je

$$f = a_1f_1 + \ldots + a_nf_n. \tag{4}$$

Lineární forma f je tedy lineární kombinací lineárních forem $f_1, \ldots, f_n$. Lineární formy $f_1, \ldots, f_n$ tudíž generují vektorový prostor $\tilde{\mathbf{V}}$ (každou lineární formu na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ lze napsat jako jejich lineární kombinaci). Je-li obráceně lineární forma f definována vztahem (4), pak z vyjádření (4) můžeme zase dostat vztah (3). Jestliže forma f je nulová, musí tedy být všechny koeficienty a_i, $i = 1, \ldots, n$ rovny nule. Tudíž formy $f_1, \ldots, f_n$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi vektorového prostoru $\tilde{\mathbf{V}}$. Tato báze se nazývá *duální báze* k bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$. Odtud plyne, že vektorový prostor $\tilde{\mathbf{V}}$ má dimenzi n – stejnou jako vektorový prostor $\mathbf{V}$.

Nyní již můžeme využít teorii lineárních forem pro odvození rovnice nadroviny v afinním prostoru. Předpokládejme tedy, že máme dánu nadrovinu $\mathbf{A}'_{n-1}$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n$. Nechť nadrovina $\mathbf{A}'_{n-1}$ je určena bodem R a svým zaměřením $\mathbf{V}'_{n-1}$. Víme, že existuje lineární forma f na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ (zaměření prostoru $\mathbf{A}_n$) tak, že její nulová množina je právě vektorový prostor $\mathbf{V}'_{n-1}$. Dále víme, že prostorem $\mathbf{V}'_{n-1}$ je tato lineární forma určena, až na nenulový násobek, jednoznačně. Nyní bod X leží v nadrovině $\mathbf{A}'_{n-1}$ právě tehdy, je-li $X - R \in \mathbf{V}'_{n-1}$, tj., je-li

$$f(X - R) = 0.$$

Definujme funkci $\bar{f}$ na $\mathbf{A}_n$ (tj. zobrazení $\mathbf{A}$ do tělesa $\mathbf{R}$) předpisem $\bar{f}(X) = f(X - R)$. Je vidět, že funkce $\bar{f}$ na $\mathbf{A}_n$ nezávisí na volbě bodu $R \in \mathbf{A}'_{n-1}$. Je-li totiž $Q \in \mathbf{A}'_{n-1}$ jiný bod, je

$$f(X - Q) = f((X - R) + (R - Q)) = f(X - R) + f(R - Q) = f(X - R).$$

(Protože je $R - Q \in \mathbf{V}'_{n-1}$, je $f(R - Q) = 0$.) Dostáváme tedy, že bod X leží v nadrovině $\mathbf{A}'_{n-1}$ právě tehdy, je-li

$$\bar{f}(X) = 0. \tag{5}$$

Protože lineární forma f je prostorem $\mathbf{V}'_{n-1}$ určena, až na nenulový násobek, jednoznačně, je i funkce $\bar{f}$ určena nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$, až na nenulový násobek, jednoznačně.

Definice 1.5.1. Rovnici (5) nazýváme *rovnice nadroviny* $\mathbf{A}'_{n-1}$.

Z provedených úvah vyplývá, že každá nadrovina má svou rovnici. Protože nulovou množinou nenulové lineární formy na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ je podprostor dimenze $n - 1$, platí zřejmě i tvrzení:

Věta 1.5.1. Buď f nenulová lineární forma na zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{A}_n$, nechť $R \in \mathbf{A}_n$. Potom množina všech bodů $X \in \mathbf{A}_n$, pro něž je $f(X - R) = 0$ (tj. množina $\{X \in \mathbf{A}_n;\ f(X - R) = 0\}$), je nadrovina v prostoru $\mathbf{A}_n$.

Předpokládejme nyní, že v prostoru $\mathbf{A}_n$ máme zvolenu lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}$ určenou repérem $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$. Potom, píšeme-li v této soustavě souřadnic $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $R = [r_1, \ldots, r_n]$, je $X - R = (x_1 - r_1)\boldsymbol{u}_1 + \ldots + (x_n - r_n)\boldsymbol{u}_n$. Tudíž, jak bylo ukázáno na počátku tohoto odstavce, je

$$f(X - R) = (x_1 - r_1)a_1 + \ldots + (x_n - r_n)a_n, \tag{6}$$

kde $a_i = f(\boldsymbol{u}_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Položíme-li $a_{n+1} = -a_1r_1 - \ldots - a_nr_n$, lze tedy rovnici nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ psát ve tvaru

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0. \tag{7}$$

Pro $n = 2$ obvykle pokládáme $x_1 = x$, $x_2 = y$ a z rovnice (7) dostáváme známou rovnici přímky

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0.$$

Pro $n = 3$ položíme $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ a dostáváme rovnici roviny

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0.$$

Protože lineární forma, která má za svou nulovou množinu vektorový prostor dimenze $n - 1$, musí být nenulová, musí být alespoň jedno z čísel $a_1, \ldots, a_n$ nenulové (čísla $a_1, \ldots, a_n$ jsou koeficienty v analytickém vyjádření formy f). Ukážeme nyní, že je-li jedno z čísel $a_1, \ldots, a_n$ nenulové, můžeme rovnici (7) pokládat za rovnici nějaké nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$.

Věta 1.5.2. Buďte dána čísla $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbf{R}$. Nechť existuje přirozené číslo i, $1 \leqq i \leqq n$, tak, že $a_i \neq 0$. Pak množina všech bodů $X \in \mathbf{A}_n$, pro jejichž souřadnice $x_1, \ldots, x_n$ v dané lineární soustavě souřadnic platí vztah (7), je nadrovina a vztah (7) je její rovnice.

Důkaz. Buď $R = [r_1, \ldots, r_n]$ libovolný bod, pro který je

$$(8) \qquad a_1 r_1 + \ldots + a_n r_n + a_{n+1} = 0.$$

Je-li $a_i \neq 0$, můžeme např. položit $r_i = -a_{n+1}/a_i$, $r_j = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$. Potom, dosadíme-li za a_{n+1} ze vztahu (8) do vztahu (7), dostáváme

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} = a_1(x_1 - r_1) + \ldots + a_n(x_n - r_n) = 0.$$

Definujme nyní lineární formu f přiřazující každému vektoru $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ číslo $f(\mathbf{y}) = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$. Pak pro $X = [x_1, \ldots, x_n]$ máme

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1} = f(X - R).$$

Nyní již tvrzení dokazované věty vyplývá z věty 1.5.1.

Předpokládejme nyní, že máme dánu nadrovinu $\mathbf{A}'_{n-1} = [Q; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}]$. Nechť v dané lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ je

$$\begin{aligned} Q &= [q_1, \ldots, q_n] \\ \mathbf{v}_1 &= (v_{11}, \ldots, v_{1n}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{v}_{n-1} &= (v_{n-1,1}, \ldots, v_{n-1,n}). \end{aligned}$$

Budeme hledat rovnici nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$. Protože vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé (určují zaměření nadroviny), je vektor $\mathbf{y}$ jejich lineární kombinací právě tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{y}$ lineárně závislé, tj., je-li $f(\mathbf{y}) = 0$, kde

$$(9) \qquad f(\mathbf{y}) = \begin{vmatrix} y_1, & \ldots, y_n \\ v_{11}, & \ldots, v_{1n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ v_{n-1,1}, & \ldots, v_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

Z vlastností determinantů vyplývá, že zobrazení f definované vztahem (9) je lineární forma, která má za nulovou množinu právě vektorový prostor generovaný vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$. Odtud vyplývá, že rovnici nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ můžeme psát ve tvaru

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - q_1, \ldots, x_n - q_n \\ v_{11}, \quad \ldots, v_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{n-1,1}, \quad \ldots, v_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Průnikem konečné množiny nadrovin prostoru $\mathbf{A}_n$ je, podle věty 1.4.2', buď množina prázdná, nebo podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$. Odtud vyplývá, že máme-li k rovnic nadrovin $\bar{f}_1(X) = 0, \ldots, \bar{f}_k(X) = 0$, pak množina všech bodů prostoru $\mathbf{A}_n$, vyhovujících všem těmto rovnicím, je buď množina prázdná, nebo podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$.

Definice 1.5.2. Buď $\mathbf{A}'_r$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$. Mějme dáno k rovnic nadrovin $\bar{f}_1(X) = 0, \ldots, \bar{f}_k(X) = 0$. Říkáme, že tyto rovnice jsou *rovnice podprostoru* $\mathbf{A}'_r$, jestliže platí: Je $Y \in \mathbf{A}'_r$ právě tehdy, je-li $\bar{f}_1(Y) = 0, \ldots, \bar{f}_k(Y) = 0$.

Jestliže máme podprostor $\mathbf{A}'_r$ dán jako množinu bodů splňujících rovnice $\bar{f}_1(X) = 0, \ldots, \bar{f}_k(X) = 0$, říkáme též, že je podprostor $\mathbf{A}'_r$ dán nebo *určen* těmito rovnicemi. Nyní budeme řešit otázku, můžeme-li každý podprostor $\mathbf{A}'_r$ prostoru $\mathbf{A}_n$ určit rovnicemi. Nechť je $\mathbf{A}'_r = [R; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r]$. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ jsou lineárně nezávislé, můžeme je tedy doplnit na bázi $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ můžeme určit jeho souřadnice $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ v lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathscr{R} = \langle R; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Zřejmě je $X \in \mathbf{A}'_r$ právě tehdy, je-li $\bar{x}_{r+1} = \ldots = \bar{x}_n = 0$. Položíme-li $\bar{f}_1(X) = \bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{f}_{n-r}(X) = \bar{x}_n$, jsou tedy rovnice $\bar{f}_1(X) = 0, \ldots, \bar{f}_{n-r}(X) = 0$ rovnicemi podprostoru $\mathbf{A}'_r$. Každý podprostor tedy můžeme určit rovnicemi. Dokonce jsme zjistili, že podprostor dimenze r můžeme určit $n - r$ rovnicemi. Z důsledku věty 1.4.4 bychom se snadno přesvědčili úplnou indukcí, že podprostor dimenze r nemůžeme určit méně než $n - r$ rovnicemi.

Poznámka 1. Samozřejmě rovnice podprostoru nejsou tímto podprostorem určeny jednoznačně. O tom se ještě přesvědčíme později – viz poznámka 2.

Všimněme si ještě jednou rovnic podprostoru $\mathbf{A}'_r$, které jsme obdrželi. Rovnice $\bar{x}_i = 0$ $(i = r + 1, \ldots, n)$ je rovnicí nadroviny $\varrho_i = [R; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n]$ $(i = r + 1, \ldots, n)$. Podprostor $\mathbf{A}'_r$ je tedy průnikem nadrovin ϱ_i a rovnice nadrovin ϱ_i jsou tedy jeho rovnicemi. Právě vyslovené tvrzení platí samozřejmě pro jakékoliv rovnice nadrovin ϱ_i; nemusíme brát právě rovnice $\bar{x}_i = 0$. Ovšem každé dvě rovnice jedné nadroviny se liší jen o konstantní nenulový násobek. To nám umožňuje určit rovnice podprostoru $\mathbf{A}'_r$ v libovolné lineární soustavě souřadnic – máme-li dánu lineární soustavu souřadnic $\mathscr{S}$ určenou repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$, doplníme vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ na bázi $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}_n$ (vektory $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ je výhodné vybrat z vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, což vždycky lze) a rovnice nadrovin ϱ_i určíme pomocí vzorce (10).

Obecný postup, který jsme právě provedli, nyní použijeme na určení rovnic přímky v trojrozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_3$. Mějme v tomto prostoru přímku $\mathbf{A}'_1 = [R; \mathbf{v}]$, přičemž v dané lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ je $R = [r_1, r_2, r_3]$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Nechť je např. $v_1 \neq 0$ (alespoň jedna souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ musí být nenulová). Potom vektory $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}_3$ a rovnice přímky $\mathbf{A}'_1$ tedy jsou

$$\begin{vmatrix} x_1 - r_1, & x_2 - r_2, & x_3 - r_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ 0, & 1, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - r_1, & x_2 - r_2, & x_3 - r_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

to jest

$$v_1(x_3 - r_3) - v_3(x_1 - r_1) = 0, \qquad (11)$$
$$v_2(x_1 - r_1) - v_1(x_2 - r_2) = 0.$$

Jsou-li všechna čísla v_1, v_2, v_3 nenulová, tj. $v_1 v_2 v_3 \neq 0$, můžeme obdržené rovnice psát ve tvaru

$$\frac{x_1 - r_1}{v_1} = \frac{x_3 - r_3}{v_3}, \qquad \frac{x_1 - r_1}{v_1} = \frac{x_2 - r_2}{v_2}, \qquad (12)$$

nebo ještě jednodušeji ve tvaru

$$\frac{x_1 - r_1}{v_1} = \frac{x_2 - r_2}{v_2} = \frac{x_3 - r_3}{v_3}. \qquad (13)$$

Tím jsme získali jednoduchý způsob, jakým z určení přímky bodem a vektorem (nebo z jejího parametrického vyjádření) získáme její rovnice. Je nutné ještě jednou zdůraznit, že zápis (12), resp. (13) můžeme použít jedině tehdy, je-li $v_1 v_2 v_3 \neq 0$.

Nyní obráceně udáme postup, kterým podprostor určený rovnicemi určíme bodem a zaměřením. Teoreticky je tento postup velmi jednoduchý, protože se redukuje na řešení soustavy lineárních nehomogenních (popřípadě i homogenních) rovnic. To však je dostatečně známé z algebry.

Mějme tedy podprostor $\mathbf{A}'$ prostoru $\mathbf{A}_n$ určen rovnicemi $\bar{f}_1(X) = 0, \dots, \bar{f}_k(X) = 0$. Určíme lineární formy $f_1, \dots, f_k$ na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, aby bylo $\bar{f}_i(X) = f_i(X - R_i)$, kde $R_i \in \mathbf{A}_n$, $i = 1, \dots, k$. (Jestliže ve zvolené soustavě lineárních souřadnic je $\bar{f}(X) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1}$, je $f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, viz důkaz věty 1.5.2.) Nyní určíme jeden bod podprostoru $\mathbf{A}'$ jako nějaké řešení soustavy rovnic $\bar{f}_i(X) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Snadno se přesvědčíme, že zaměření podprostoru $\mathbf{A}'$ je nulovou množinou lineárních forem $f_1, \dots, f_k$: Označme R

získaný bod podprostoru $\mathbf{A}'$. Dále buď $\mathbf{V}'$ zaměření podprostoru $\mathbf{A}'$. Protože je $R \in \mathbf{A}'$, je $\bar{f}_i(R) = f_i(R - R_i) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Je $\mathbf{u} \in \mathbf{V}'$ právě tehdy, je-li $R + \mathbf{u} \in \mathbf{A}'$, tj., je-li $\bar{f}_i(R + \mathbf{u}) = 0$, $i = 1, \dots, k$. Avšak máme $\bar{f}_i(R + \mathbf{u}) = f_i((R + \mathbf{u}) - R_i) = f_i(R - R_i) + f_i(\mathbf{u}) = f_i(\mathbf{u})$. Vektorový prostor $\mathbf{V}'$ je tedy skutečně nulovou množinou lineárních forem $f_1, \dots, f_k$.

Vyjádření podprostoru rovnicemi můžeme někdy výhodně použít při vyšetřování vzájemné polohy dvou podprostorů. Víme, že je-li nadrovina ve zvolené lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ dána rovnicí (7), je její zaměření nulovou množinou lineární formy f, kde $f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ (analytické vyjádření formy f v bázi $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$). Tudíž dostáváme tvrzení: Dvě nadroviny o rovnicích

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0,$$
$$\bar{a}_1 x_1 + \dots + \bar{a}_n x_n + \bar{a}_{n+1} = 0$$

jsou rovnoběžné právě tehdy, jsou-li vektory $(a_1, \dots, a_n)$, $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) \in \mathbf{R}^n$ lineárně závislé. Zřejmě též obě nadroviny jsou incidentní (a tedy totožné) právě tehdy, jsou-li vektory $(a_1, \dots, a_{n+1})$, $(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ lineárně závislé.

Zjišťujeme-li vzájemnou polohu nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ dané rovnicí (7) a podprostoru $\mathbf{A}''_s = [B; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s]$, stačí zjistit, zda všechny vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ anulují lineární formu f. V tomto případě jsou podprostory $\mathbf{A}'_{n-1}$ a $\mathbf{A}''_s$ rovnoběžné, v opačném případě jsou různoběžné. Podprostory $\mathbf{A}'_{n-1}$ a $\mathbf{A}''_s$ jsou zřejmě incidentní právě tehdy, jsou-li rovnoběžné a vyhovuje-li bod B rovnici nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$.

Výhodné je též použití rovnice nadroviny pro počítání průsečíku přímky s nadrovinou. Máme-li nadrovinu $\mathbf{A}'_{n-1}$ dánu rovnicí (7) a přímku $\mathbf{A}''_1$ parametricky $x_i = b_i + v_i t$, dosadíme z parametrického vyjádření přímky $\mathbf{A}''_1$ do rovnice nadroviny za x_i, $i = 1, \dots, n$, a dostaneme rovnici o jedné neznámé t. Vyřešením této rovnice získáme hodnotu parametru, které přísluší průsečík nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ s přímkou $\mathbf{A}''_1$.

Příklad 1. V afinním prostoru $\mathbf{A}_3$ určete průsečík přímky $\mathbf{A}''_1 = [B; \mathbf{v}]$, $B = [1, 3, -2]$, $\mathbf{v} = (1, 1, -3)$, s rovinou $\mathbf{A}'_2$ o rovnici $2x + 3y + z - 4 = 0$.

Řešení. Přímku $\mathbf{A}''_1$ vyjádříme parametricky $x = 1 + t$, $y = 3 + t$, $z = -2 - 3t$. Z těchto rovnic dosadíme do rovnice roviny a vzniklou rovnici vyřešíme pro t:

$$2(1 + t) + 3(3 + t) + (-2 - 3t) - 4 = 0, \qquad t = -5/2.$$

Dosadíme-li vypočítanou hodnotu do parametrického vyjádření přímky $\mathbf{A}''_1$, získáme souřadnice průsečíku R:

$$R = [1 - 5/2, 3 - 5/2, -2 - 15/2] = [-3/2, 1/2, -19/2].$$

Ze střední školy víme, že máme-li dány rovnice dvou různoběžných přímek v rovině, pak součtem těchto rovnic je rovnice přímky procházející jejich průsečkem. Abychom mohli sčítat i rovnice nadrovin, zavedeme pojem lineární funkce na afinním prostoru tak, aby

1. každá nadrovina byla nulovou množinou nějaké lineární funkce (tj. množinou všech bodů afinního prostoru, jimž lineární funkce přiřazuje číslo 0),

2. součtem dvou lineárních funkcí a násobkem lineární funkce číslem z $\mathbf{R}$ byla opět lineární funkce.

Přitom *funkce* na libovolné množině $\mathbf{M}$ je zobrazení této množiny do $\mathbf{R}$. Operace pro funkce na množině $\mathbf{M}$ jsou definovány přirozeným způsobem: *Součtem* funkcí f, g na množině $\mathbf{M}$ nazýváme funkci $f + g$, pro niž pro každý bod $X \in \mathbf{M}$ platí $(f + g)(X) = f(X) + g(X)$. Podobně *násobkem* funkce f číslem $c \in \mathbf{R}$ je funkce cf definovaná výrazem $(cf)(X) = c(f(X))$. Můžeme definovat ještě součin $f . g$ funkcí f, g předpisem $(f . g)(X) = f(X) . g(X)$, ten však, jak dále uvidíme, nebudeme potřebovat.

A nyní již zavedeme pojem lineární funkce na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$.

Definice 1.5.3. Zobrazení $\bar{f}$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do tělesa $\mathbf{R}$ nazýváme *lineární funkce* na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$, jestliže buď existuje číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ je $\bar{f}(X) = c$, nebo existuje bod $R \in \mathbf{A}_n$ a lineární forma f na zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{A}_n$ tak, že pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ platí $\bar{f}(X) = f(X - R)$. V prvním případě (je-li $\bar{f}(X) = c$ pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$) říkáme, že lineární funkce je konstantní, a je-li navíc $c = 0$, říkáme, že je nulová. Není-li lineární funkce $\bar{f}$ konstantní, říkáme, že je nekonstantní.

Definice 1.5.4. Buď $\mathbf{F}$ nějaká množina lineárních funkcí na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$. Říkáme, že množina $\mathbf{N}$ bodů z afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ je *nulová množina množiny* $\mathbf{F}$, jestliže je $X \in \mathbf{N}$ právě tehdy, je-li $\bar{f}(X) = 0$ pro každou funkci $\bar{f} \in \mathbf{F}$.

Jako speciální případ právě vyslovené definice dostáváme definici nulové množiny lineární funkce $\bar{f}$ — pro případ, že množina $\mathbf{F}$ je jednoprvková a obsahuje právě funkci $\bar{f}$.

Uveďme ještě jednu jednoduchou vlastnost lineárních funkcí. Je-li $\bar{f}$ lineární funkce, pak z rovnosti $X - Y = X' - Y'$ vyplývá rovnost $\bar{f}(X) - \bar{f}(Y) = \bar{f}(X') - \bar{f}(Y')$ a zobrazení f', přiřazující každému vektoru $X - Y$ číslo $f'(X - Y) = \bar{f}(X) - \bar{f}(Y)$, je lineární forma. Skutečně, je-li lineární funkce $\bar{f}$ konstantní, je tvrzení zřejmé (lineární forma f' je pak nulová), je-li lineární funkce $\bar{f}$ nekonstantní, existuje bod R a lineární forma f tak, že pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ je $\bar{f}(X) = f(X - R)$. Potom je $\bar{f}(X) - \bar{f}(Y) = f(X - R) - f(Y - R)$, a tedy

(14) $$\bar{f}(X) - \bar{f}(Y) = f(X - Y).$$

Tím je tvrzení dokázáno. Zároveň jsme zjistili, že máme-li dánu nekonstantní lineární funkci $\bar{f}$, je touto funkcí jednoznačně určena lineární forma f, pomocí níž je funkce $\bar{f}$ definována.

Operace jsou pro lineární funkce zavedeny obvyklým způsobem: Součet $\bar{f} + \bar{g}$ lineárních funkcí $\bar{f}$ a $\bar{g}$ je definován vztahem $(\bar{f} + \bar{g})(X) = \bar{f}(X) + \bar{g}(X)$ a násobek $c\bar{f}$ lineární funkce $\bar{f}$ číslem c je definován vztahem $(c\bar{f})(X) = c . \bar{f}(X)$.

Je-li $\bar{f}$ lineární funkce na afinním prostoru a $\mathscr{L}$ lineární soustava souřadnic v prostoru $\mathbf{A}_n$, můžeme pro každý bod $X = [x_1, \ldots, x_n]$ psát hodnotu $\bar{f}(X)$ ve tvaru

(15) $$\bar{f}(X) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1},$$

kde $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n + 1$. Obráceně, zvolíme-li libovolně čísla $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n + 1$, je předpisem (15) dána lineární funkce na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$. Píšeme-li jinou lineární funkci $\bar{g}$ na $\mathbf{A}_n$ ve tvaru

$$\bar{g}(X) = b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n + b_{n+1},$$

plyne přímo z definice operací mezi lineárními funkcemi, že pro lineární funkce $\bar{f} + \bar{g}$, resp. $c\bar{f}$ (kde $c \in \mathbf{R}$) platí

$$(\bar{f} + \bar{g})(X) = (a_1 + b_1) x_1 + \ldots + (a_n + b_n) x_n + (a_{n+1} + b_{n+1}),$$

resp.

$$(c\bar{f})(X) = ca_1 x_1 + \ldots + ca_n x_n + ca_{n+1}.$$

Z uvedených vlastností vyplývají následující věty.

Věta 1.5.3. Buďte $\bar{f}$, $\bar{g}$ lineární funkce na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$, buď $c \in \mathbf{R}$. Potom $\bar{f} + \bar{g}$ a $c\bar{f}$ jsou lineární funkce na prostoru $\mathbf{A}_n$.

Součinem lineárních funkcí zřejmě nemusí být lineární funkce. Nadále budeme tedy předpokládat, že na množině lineárních funkcí jsou definovány jen operace sčítání lineárních funkcí a násobení lineární funkce reálným číslem.

Následující věta je zřejmá.

Věta 1.5.4. Množina všech lineárních funkcí na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ s operacemi sčítání lineárních funkcí a násobení lineární funkce číslem z $\mathbf{R}$ tvoří vektorový prostor dimenze $n + 1$. Přiřadíme-li každé lineární funkci $\bar{f}$, pro niž platí vztah (15), $(n + 1)$-tici $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, je toto zobrazení izomorfismus vektorového prostoru všech lineárních funkcí na $\mathbf{A}_n$ na prostor $\mathbf{R}^{n+1}$ (vektorový prostor všech $(n + 1)$-tic prvků z tělesa $\mathbf{R}$).

Prostor všech lineárních funkcí na afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ budeme nadále označovat symbolem $F(\mathbf{A}_n)$.

Protože množina všech lineárních funkcí tvoří vektorový prostor, můžeme na lineární funkce přenést všechny pojmy známé z teorie vektorových prostorů.

Z dříve provedené konstrukce rovnice nadroviny a ze zavedení lineárních funkcí tedy vyplývá, že nulová množina nekonstantní lineární funkce je nadrovina, a obráceně, každá nadrovina je nulovou množinou nějaké nekonstantní lineární funkce. Tato tvrzení jsou jen přeformulované věty, které již byly dokázány dříve.

Věta 1.5.5. Buď $P \in \mathbf{A}_n$. Pak množina $\mathbf{F}_P = \{\bar{f} \in F(\mathbf{A}_n); \bar{f}(P) = 0\}$ je podprostor vektorového prostoru $F(\mathbf{A}_n)$ a zobrazení φ, které každé lineární formě $f \in \check{\mathbf{V}}_n$ přiřadí lineární funkci $\bar{f}(X) = f(X - P)$, je izomorfismus prostoru $\check{\mathbf{V}}_n$ na prostor $\mathbf{F}_P$.

Důkaz. Je zřejmé, že $\mathbf{F}_P$ je podprostor prostoru $F(\mathbf{A}_n)$, i že zobrazení φ je homomorfismus. Ze vztahu (14) (dosadíme-li P místo Y) je vidět, že ke každé lineární funkci $\bar{f}$ najdeme právě jednu lineární formu f tak, že $\bar{f} = \varphi(f)$. Tudíž zobrazení φ je izomorfismus.

Ze vztahu (3) je vidět, že je-li $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, existuje lineární forma f na prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, že $f(\mathbf{u}) \neq 0$. Jinými slovy: Vektor, který anuluje všechny lineární formy, je nulový. Odtud vyplývá, že vektor, který anuluje n lineárně nezávislých lineárních forem, je nulový (vektorový prostor $\check{\mathbf{V}}_n$ má dimenzi n). Z věty 1.5.5 nyní okamžitě vyplývá následující tvrzení.

Věta 1.5.6. Buďte $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n \in F(\mathbf{A}_n)$ lineárně nezávislé lineární funkce. Nechť pro $P, Q \in \mathbf{A}_n$ $\bar{f}_i(P) = \bar{f}_i(Q) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Potom $P = Q$.

Jinými slovy, jestliže se n lineárně nezávislých lineárních funkcí anuluje v bodě P, je tento bod jediným bodem, v němž se funkce anulují.

Věta 1.5.7. Jestliže $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$ jsou lineárně nezávislé lineární funkce a jejich nulová množina je neprázdná, je jejich nulovou množinou podprostor dimenze $n - k$ prostoru $\mathbf{A}_n$.

Důkaz. Nechť $\bar{f}_i(P) = 0$ pro $i = 1, \ldots, k$, tj. $\bar{f}_i \in \mathbf{F}_P$ (označení viz věta 1.5.5). Zvolme lineární funkce $\bar{f}_{k+1}, \ldots, \bar{f}_n \in \mathbf{F}_P$ tak, aby lineární funkce $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$ tvořily bázi prostoru $\mathbf{F}_P$. Buď $\mathbf{A}^i_{d_i}$ pro $i = 1, \ldots, n$ nulová množina funkcí $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_i$. Označme ještě ϱ_i nulovou množinu funkce $\bar{f}_i$ (ϱ_i je nadrovina). Potom zřejmě $\mathbf{A}^i_{d_i} = \mathbf{A}^{i-1}_{d_{i-1}} \cap \varrho_i$ pro $i = 2, \ldots, n$. Tudíž podle důsledku věty 1.4.4 je

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
d_2 &\geqq d_1 - 1\\
d_3 &\geqq d_2 - 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
d_n &\geqq d_{n-1} - 1.
\end{aligned}
$$

Sečtením těchto nerovností (je jich $n - 1$) dostáváme

$$(17)\qquad d_n \geqq d_1 - (n - 1).$$

Avšak víme, že $d_1 = n - 1$, a podle věty 1.5.6 $d_n = 0$. Tudíž v nerovnosti (17) platí znaménko rovnosti, a tedy i ve všech nerovnostech (16) nastává rovnost. Odtud plyne, že $d_1 = n - 1$, $d_2 = n - 2, \ldots, d_k = n - k$. Tím je věta dokázána.

Věta 1.5.8. Je-li podprostor $\mathbf{A}'_r$ dán rovnicemi $\bar{f}_1(X) = 0, \ldots, \bar{f}_k(X) = 0$, a obsahuje-li nadrovina o rovnici $\bar{f}(X) = 0$ podprostor $\mathbf{A}'_r$, je lineární funkce $\bar{f}$ lineární kombinací funkcí $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$.

Důkaz. Zřejmě se můžeme omezit na případ, že funkce $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$ jsou lineárně nezávislé. Kdyby tyto funkce byly lineárně závislé, vybrali bychom z nich bázi prostoru, který generují (v prostoru $F(\mathbf{A}_n)$), a důkaz bychom provedli pro tyto vybrané lineární funkce. Jsou-li však funkce $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$ lineárně nezávislé, vyplývá dokazované tvrzení z předešlé věty (kdyby $\bar{f}$ byla lineárně nezávislá na funkcích $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$, byla by nulová množina funkcí $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$, $\bar{f}$ různá od nulové množiny funkcí $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$).

Poznámka 2. Z věty 1.5.8 vyplývá, že všechny lineární funkce, které se anulují ve všech bodech podprostoru $\mathbf{A}'_r$, tvoří vektorový prostor – označíme ho $\bar{\mathbf{V}}$ – a lineární funkce $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k$ ho generují. Zřejmě též obráceně platí: Generují-li lineární funkce $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_{k'}$ vektorový prostor $\bar{\mathbf{V}}$, je podprostor $\mathbf{A}'_r$ určen rovnicemi $\bar{g}_1(X) = 0$, $\ldots$, $\bar{g}_{k'}(X) = 0$. Jinými slovy můžeme toto tvrzení zformulovat též takto: Nechť podprostor $\mathbf{A}''_s$ prostoru $\mathbf{A}_n$ je určen rovnicemi $\bar{g}_1(X) = 0, \ldots, \bar{g}_{k'}(X) = 0$. Potom je $\mathbf{A}'_r = \mathbf{A}''_s$ právě tehdy, je-li každá rovnice $\bar{g}_i(X) = 0$, $i = 1, \ldots, k'$ lineární kombinací rovnic $\bar{f}_1(X) = 0, \ldots, \bar{f}_k(X) = 0$, a obráceně každá rovnice $\bar{f}_j(X) = 0$, $j = 1, \ldots, k$ je lineární kombinací rovnic $\bar{g}_1(X) = 0, \ldots, \bar{g}_{k'}(X) = 0$.

Poznámka 3. Věty 1.5.6, 1.5.7, 1.5.8 jsme též snadno mohli dokázat z vět o řešení soustavy lineárních rovnic. Nyní, když jsme tyto věty dokázali geometricky, bychom mohli v afinním prostoru zvolit lineární soustavu souřadnic, lineární funkce vyjádřit v této soustavě a dostali bychom opět známé věty z teorie lineárních rovnic.

Bude-li nadrovina ϱ dána jako nulová množina lineární funkce $\bar{f}$, budeme říkat, že nadrovina je *přiřazena* lineární funkci $\bar{f}$ nebo *určena* lineární funkcí $\bar{f}$, tj., definujeme zobrazení množiny všech nekonstantních lineárních funkcí na množinu všech nadrovin, přiřazující každé lineární funkci její nulovou množinu.

Definice 1.5.5. Množinu všech nadrovin, přiřazených nekonstantním lineárním funkcím dvojrozměrného, resp. třírozměrného vektorového podprostoru prostoru $F(\mathbf{A}_n)$, nazýváme *svazek*, resp. *trs* nadrovin.

Místo svazků a trsů nadrovin by bylo možno vyšetřovat obecně množiny všech nadrovin přiřazené nekonstantním lineárním funkcím k-rozměrného vektorového podprostoru prostoru $F(\mathbf{A}_n)$. Omezíme se však na nejjednodušší zobecnění známého pojmu „svazek přímek v rovině“, což je právě svazek nadrovin, popřípadě ještě trs nadrovin. Následující věta vyplývá z toho, že dva lineárně nezávislé vektory generují dvojrozměrný podprostor vektorového prostoru.

Věta 1.5.9. Ke každým dvěma různým nadrovinám prostoru $\mathbf{A}_n$ existuje právě jeden svazek nadrovin, který je obsahuje.

Věta 1.5.10. Je-li bod $B \in \mathbf{A}_n$ společný dvěma různým nadrovinám svazku, je společným bodem všech nadrovin svazku. Není-li bod B společným bodem všech nadrovin svazku, existuje právě jedna nadrovina svazku, která ho obsahuje.

Důkaz. Z definice 1.5.5 a z věty 1.5.9 vyplývá, že je-li svazek nadrovin určen dvěma různými nadrovinami o rovnicích $\bar{f}(X) = 0$ a $\bar{g}(X) = 0$, můžeme rovnici každé nadroviny svazku psát ve tvaru

$$c\bar{f}(X) + d\bar{g}(X) = 0, \tag{18}$$

kde $c, d \in \mathbf{R}$, $(c, d) \neq (0, 0)$. Je-li $\bar{f}(B) = \bar{g}(B) = 0$, je i

$$c\bar{f}(B) + d\bar{g}(B) = 0 \tag{19}$$

pro každou dvojici čísel $c, d \in \mathbf{R}$. Je-li alespoň jedno z čísel $\bar{f}(B)$, $\bar{g}(B)$ nenulové, je řešení rovnice (19) (rovnice pro c, d) určeno, až na nenulový násobek, jednoznačně. Tím je tvrzení dokázáno.

Věta 1.5.11. Buď $\mathbf{S}$ svazek nadrovin v prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom buď existuje podprostor $\mathbf{A}'_{n-2}$ prostoru $\mathbf{A}_n$ tak, že $\varrho \in \mathbf{S}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}'_{n-2} \subset \varrho$, nebo existuje podprostor $\mathbf{V}''_{n-1}$ prostoru $\mathbf{V}_n$ (zaměření prostoru $\mathbf{A}_n$) tak, že $\varrho \in \mathbf{S}$ právě tehdy, má-li nadrovina ϱ zaměření $\mathbf{V}''_{n-1}$.

Důkaz. Svazek $\mathbf{S}$ zadejme dvěma různými nadrovinami ϱ, σ. Jsou-li tyto nadroviny různoběžné, je podle důsledku věty 1.4.4 $\varrho \cap \sigma = \mathbf{A}'_{n-2}$, podle věty 1.5.10 každá nadrovina svazku $\mathbf{S}$ obsahuje podprostor $\mathbf{A}'_{n-2}$ a podle věty 1.5.8 každá nadrovina obsahující $\mathbf{A}'_{n-2}$ patří svazku $\mathbf{S}$. Nechť nyní nadroviny ϱ, σ jsou rovnoběžné. Potom každá nadrovina svazku $\mathbf{S}$ je s nimi rovnoběžná (jak jsme již dokázali, existují-li dvě různé různoběžné nadroviny svazku, jsou každé dvě nadroviny svazku různoběžné). Je-li obráceně τ nadrovina, $\tau \parallel \varrho$, zvolíme bod $A \in \tau$ a podle věty 1.5.10 existuje nadrovina svazku (jak jsme ukázali, musí být rovnoběžná s ϱ) obsahující bod A — což musí být nadrovina τ. Tudíž $\tau \in \mathbf{S}$.

Větu 1.5.11 je možno obrátit — to činí následující věta.

Věta 1.5.12. Buď $\mathbf{A}'_{n-2}$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom všechny nadroviny v $\mathbf{A}_n$ obsahující $\mathbf{A}'_{n-2}$ tvoří svazek nadrovin v $\mathbf{A}_n$. Buď $\mathbf{V}''_{n-1}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom všechny nadroviny v $\mathbf{A}_n$ mající zaměření $\mathbf{V}''_{n-1}$ tvoří svazek nadrovin v $\mathbf{A}_n$.

Důkaz. Podprostor $\mathbf{A}'_{n-2}$ určíme dvěma rovnicemi — ty určují dvě nadroviny. Svazek určený těmito nadrovinami musí být podle věty 1.5.11 svazek všech nadrovin obsahujících podprostor $\mathbf{A}'_{n-2}$. Podobně lze sestrojit dvě různé nadroviny mající zaměření $\mathbf{V}''_{n-1}$. Svazek určený těmito nadrovinami musí být podle věty 1.5.12 svazek všech nadrovin se zaměřením $\mathbf{V}''_{n-1}$.

Je-li dán svazek nadrovin jako množina všech nadrovin obsahujících daný podprostor $\mathbf{A}'_{n-2}$, pak ke každému vektoru $\boldsymbol{u}$ neležícímu v zaměření podprostoru $\mathbf{A}'_{n-2}$ existuje právě jedna nadrovina svazku, jejíž zaměření obsahuje vektor $\boldsymbol{u}$. Toto tvrzení je zřejmé — je-li $\mathbf{A}'_{n-2} = [A; \mathbf{V}'_{n-2}]$, musí být $[A; \mathbf{V}'_{n-2} \vee [\{\boldsymbol{u}\}]]$ hledanou nadrovinou. Tuto nadrovinu můžeme též určit podobným způsobem,

jakým jsme v důsledku věty 1.5.10 našli nadrovinu obsahující daný bod B. Jsou-li např. dvě nadroviny svazku dány v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ rovnicemi

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_{n+1} = 0,$$
$$b_1x_1 + \ldots + b_nx_n + b_{n+1} = 0,$$

a je-li $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, stačí najít čísla $c, d \in \mathbf{R}$ tak, aby platilo

$$c(a_1u_1 + \ldots + a_nu_n) + d(b_1u_1 + \ldots + b_nu_n) = 0.$$

Víme totiž, že má-li nějaká nadrovina rovnici (7), je její zaměření nulovou množinou lineární formy (3).

V následujících větách budou popsány vlastnosti trsu analogické vlastnostem svazků popsaných v právě uvedených větách 1.5.9 až 1.5.12. Následující věta je, podobně jako analogická věta pro svazky, zřejmá. Důkazy dalších vět jsou většinou též analogické důkazům příslušných vět pro svazky.

Věta 1.5.13. Ke každým třem nadrovinám prostoru $\mathbf{A}_n$, nepatřícím jednomu svazku, existuje právě jeden trs nadrovin, který je obsahuje.

Věta 1.5.14. Je-li bod $B \in \mathbf{A}_n$ společný třem různým nadrovinám trsu $\mathbf{T}$, nenáležícím jednomu svazku, je společným bodem všech nadrovin trsu. Není-li bod B společným bodem všech nadrovin trsu, pak všechny nadroviny trsu obsahující bod B tvoří svazek nadrovin.

Důkaz. Nechť ϱ, σ, τ jsou tři nadroviny trsu, které nepatří do jednoho svazku. Nechť tyto nadroviny mají po řadě rovnice $\bar{f}(X) = 0$, $\bar{g}(X) = 0$, $\bar{h}(X) = 0$. Rovnici každé nadroviny našeho trsu můžeme nyní napsat ve tvaru

$$c\bar{f}(X) + d\bar{g}(X) + e\bar{h}(X) = 0,$$

kde $c, d, e \in \mathbf{R}$, $(c, d, e) \neq (0, 0, 0)$. Je-li $\bar{f}(B) = \bar{g}(B) = \bar{h}(B) = 0$, je i

$$c\bar{f}(B) + d\bar{g}(B) + e\bar{h}(B) = 0 \tag{20}$$

pro každé $c, d, e \in \mathbf{R}$. Je-li alespoň jedno z čísel $\bar{f}(B)$, $\bar{g}(B)$, $\bar{h}(B)$ nenulové, tvoří všechna řešení rovnice (20) dvojrozměrný vektorový prostor v prostoru $\mathbf{R}^3$ (rovnice pro c, d, e). Jestliže např. (c', d', e'), (c'', d'', e'') jsou dvě lineárně nezávislá řešení, je každé jiné řešení rovnice (20) jejich lineární kombinací a rovnici každé nadroviny trsu, procházející bodem B, je možné tedy napsat jako lineární kombinaci rovnic

$$c'\bar{f}(X) + d'\bar{g}(X) + e'\bar{h}(X) = 0,$$
$$c''\bar{f}(X) + d''\bar{g}(X) + e''\bar{h}(X) = 0$$

a obráceně. Odtud již plyne tvrzení věty.

Věta 1.5.15. Buď **T** trs nadrovin v prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom buď existuje podprostor $\mathbf{A}'_{n-3}$ prostoru $\mathbf{A}_n$ tak, že $\varrho \in \mathbf{T}$ právě tehdy, když $\mathbf{A}'_{n-3} \subset \varrho$, nebo existuje podprostor $\mathbf{V}''_{n-2}$ prostoru $\mathbf{V}_n$ (zaměření $\mathbf{A}_n$) tak, že $\varrho \in \mathbf{T}$ právě tehdy, obsahuje-li zaměření nadroviny ϱ podprostor $\mathbf{V}''_{n-2}$.

Důkaz. Zadejme trs třemi nadrovinami ϱ, σ, τ které nepatří do jednoho svazku. Zřejmě alespoň dvě z nich jsou různoběžné. Nechť např. $\varrho \cap \sigma = \mathbf{A}''_{n-2}$. Potom mohou nastat dvě možnosti

a) $\mathbf{A}''_{n-2} \cap \tau = \mathbf{A}'_{n-3}$,

b) $\mathbf{A}''_{n-2} \parallel \tau$.

Jestliže nastává možnost a), každá nadrovina trsu **T** obsahuje podprostor $\mathbf{A}'_{n-3}$ (věta 1.5.14). Analogicky jako ve větě 1.5.11 se ukáže, že každá nadrovina obsahující $\mathbf{A}'_{n-3}$ patří do trsu **T**. Nechť nyní nastává možnost b). Nadroviny ϱ, σ, τ nechť jsou po řadě určeny lineárními funkcemi $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ a těm nechť jsou přiřazeny (viz (14)) lineární formy f, g, h. Označíme-li $\mathbf{V}''_{n-2}$ zaměření podprostoru $\mathbf{A}''_{n-2}$, anulují se na $\mathbf{V}''_{n-2}$ všechny tři lineární formy f, g, h, a tedy i každá jejich lineární kombinace. Tudíž zaměření každé nadroviny trsu **T** obsahuje $\mathbf{V}''_{n-2}$. Buď nyní ω libovolná nadrovina v $\mathbf{A}_n$, jejíž zaměření obsahuje $\mathbf{V}''_{n-2}$. Nechť $\bar{f}_\omega$ je lineární funkce, která ji určuje. Zvolme bod $B \in \omega$. Tímto bodem veďme nadroviny ϱ', σ', τ' tak, aby bylo $\varrho' \parallel \varrho$, $\sigma' \parallel \sigma$, $\tau' \parallel \tau$. Zřejmě nadroviny ϱ', σ', τ', jsou po řadě určeny lineárními funkcemi $\bar{f}' = \bar{f} - \bar{f}(B)$, $\bar{g}' = \bar{g} - \bar{g}(B)$, $\bar{h}' = \bar{h} - \bar{h}(B)$. Čísla $\bar{f}(B)$, $\bar{g}(B)$, $\bar{h}(B)$ přitom bereme jako konstantní lineární funkce na $\mathbf{A}_n$. Všechny nadroviny ϱ', σ', τ', ω obsahují podprostor $[B; \mathbf{V}''_{n-2}]$, a patří proto jednomu svazku **S**. Protože $\varrho \nparallel \sigma$, je $\varrho' \neq \sigma'$ a nadroviny ϱ', σ' určují svazek **S**. Odtud vyplývá, že existují čísla $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ tak, že $\bar{h}' = a\bar{f}' + b\bar{g}'$, $\bar{f}_\omega = c\bar{f}' + d\bar{g}'$. Dosadíme-li do těchto rovností $\bar{f}' = \bar{f} - \bar{f}(B)$ atd., dostaneme, že $\bar{h} - a\bar{f} - b\bar{g} = u$, kde $u \neq 0$ je konstantní lineární funkce a $\bar{f}_\omega = c\bar{f} + d\bar{g} + v$, kde $v \neq 0$ je opět konstanta. Odtud potom

$$\bar{f}_\omega = c\bar{f} + d\bar{g} + \frac{v}{u}(\bar{h} - a\bar{f} - b\bar{g}).$$

Lineární funkci $\bar{f}_\omega$ můžeme tedy psát jako lineární kombinaci funkcí $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$, a proto $\omega \in \mathbf{T}$.

Právě dokázanou větu lze opět obrátit podobně jako větu 1.5.11.

Věta 1.5.16. Buď $\mathbf{A}'_{n-3}$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom všechny nadroviny v $\mathbf{A}_n$ obsahující $\mathbf{A}'_{n-3}$ tvoří trs nadrovin v $\mathbf{A}_n$. Buď $\mathbf{V}''_{n-2}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom všechny nadroviny, jejichž zaměření obsahuje $\mathbf{V}''_{n-2}$, tvoří trs nadrovin v $\mathbf{A}_n$.

Důkaz. Snadno najdeme tři nadroviny ϱ, σ, τ tak, aby příslušné lineární funkce byly lineárně nezávislé, a aby tyto nadroviny v prvním případě obsahovaly podprostor $\mathbf{A}'_{n-3}$ (stačí tento podprostor vyjádřit rovnicemi) a v druhém případě, aby jejich zaměření obsahovalo $\mathbf{V}''_{n-2}$ (stačí najít dvě lineární funkce $\bar{f}$, $\bar{g}$ tak, aby

příslušné lineární formy f, g byly lineárně nezávislé, a přidat k nim lineární funkci $\bar{f} + c$, kde c je konstanta). Tvrzení nyní vyplývá z předešlé věty analogicky jako tomu bylo u věty 1.5.12.

Na závěr podotkneme, že svazek nadrovin existuje v afinním prostoru dimenze alespoň 1. Nadrovina v prostoru $\mathbf{A}_1$ je jednobodová množina a jediný svazek v prostoru $\mathbf{A}_1$ je tvořen všemi jednobodovými množinami. Trs nadrovin existuje v afinním prostoru dimenze alespoň 2. V rovině existuje jediný trs – je to množina všech přímek v rovině.

Příklad 2. V afinní rovině $\mathbf{A}_2$ napište rovnici spojnice průsečíku přímek $2x + y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ s bodem $B = [1, 2]$.

Řešení. Obě přímky určují svazek přímek. Rovnici každé přímky svazku můžeme psát ve tvaru

$$c(2x + y + 1) + d(x - y + 2) = 0. \tag{21}$$

Úlohu vyřešíme, najdeme-li přímku svazku procházející bodem B. Dosadíme tedy do rovnice (21) za x a y souřadnice bodu B a získanou rovnici vyřešíme pro c, d:

$$c(2 \cdot 1 + 2 + 1) + d(1 - 2 + 2) = 0, \quad \text{tj.}$$
$$5c + d = 0.$$

Můžeme položit např. $c = 1$, $d = -5$ a rovnici hledané přímky dostáváme ve tvaru:

$$1(2x + y + 1) - 5(x - y + 2) = 0, \quad \text{tj.}$$
$$x - 2y + 3 = 0.$$

Podobně jako v příkladu 2 lze řešit úlohu: Spojte v trojrozměrném prostoru bod s průsečnicí dvou rovin daných rovnicemi.

V následujícím příkladu vyřešíme úlohu, kterou jsme již řešili v předešlém odstavci. Nyní využijeme rovnici nadroviny a svazky nadrovin.

Příklad 3. V afinním prostoru $\mathbf{A}_3$ určete příčku mimoběžek $p = [A; \mathbf{u}]$, $q = [B; \mathbf{v}]$ procházející bodem M. Přitom v dané lineární soustavě souřadnic je $A = [-1, 3, 3]$, $\mathbf{u} = (-1, 0, 2)$, $B = [1, -1, 2]$, $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$, $M = [3, 1, 9]$.

Řešení. Nejdříve přímku p vyjádříme rovnicemi (viz (11)):

$$-1(x_3 - 3) - 2(x_1 + 1) = 0, \qquad x_2 - 3 = 0.$$

Nyní ve svazku určeném rovinami o obdržených rovnicích najdeme rovinu procházející bodem M. Rovnici každé roviny svazku můžeme psát ve tvaru

$$c(-x_3 + 3 - 2x_1 - 2) + d(x_2 - 3) = 0. \tag{22}$$

Dosadíme-li do rovnice (22) souřadnice bodu M, dostáváme

$$-14c - 2d = 0.$$

Zvolíme-li $c = 1$, je $d = -7$. Dosazením do rovnice (22) dostaneme rovnici roviny ϱ obsahující přímku p a bod M:

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 - 22 = 0.$$

Přímku q vyjádříme parametricky a spočítáme její průsečík s rovinou ϱ (viz příklad 1)

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= -1 + 3t \qquad (23) \\ x_3 &= 2 + 2t, \end{aligned}$$

a potom

$$\begin{aligned} 2(1 + t) + 7(-1 + 3t) + 2 + 2t - 22 &= 0, \\ 25t - 25 &= 0, \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za t do (23), dostáváme souřadnice bodu Q – průsečíku přímky q s hledanou příčkou – $Q = [2, 2, 4]$. Body Q, M je již hledaná příčka určena. Průsečík této příčky s druhou přímkou p bychom vypočítali buď analogicky, nebo tak, že bychom přímku $\overline{QM}$ vyjádřili parametricky a spočítali její průsečík s jednou z rovin obsahujících přímku p, např. s rovinou o rovnici $x_2 - 3 = 0$. Hledaný průsečík je bod $P = [1, 3, -1]$. Řešit příklad 3 právě popsanou metodou je obzvláště výhodné tehdy, máme-li již některou z přímek p, q zadanou rovnicemi.

Věty o svazcích a trsech nadrovin, které jsme dokázali, jsme mohli dokázat v obecnější podobě. Jak již bylo řečeno, mohli jsme vyšetřovat množinu nadrovin přiřazených lineárním funkcím k-rozměrného podprostoru prostoru $F(\mathbf{A}_n)$. Potom lze dokázat, že tato množina nadrovin je buď množina všech nadrovin obsahujících nějaký podprostor $\mathbf{A}'_{n-k}$, nebo množina všech nadrovin, jejichž zaměření obsahuje nějaký podprostor $\mathbf{V}''_{n-k+1}$. Toto tvrzení je pak možno obrátit analogicky tomu, jak jsme to provedli u svazků a trsů nadrovin.

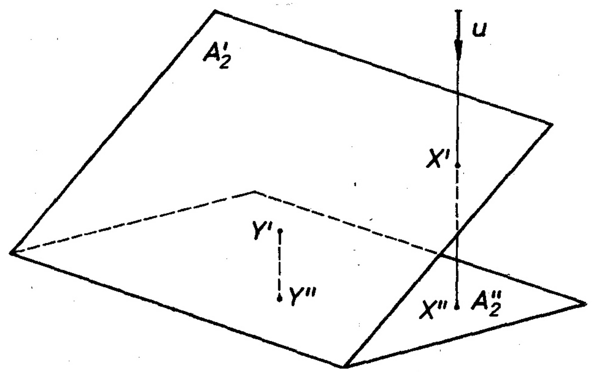
Cvičení

1. Cvičení 2, ..., 5 z odstavce 1.4 řešte tak, že vždy jeden z dvojice podprostorů vyjádříte rovnicemi, a pak úlohu vyřešíte.
2. Cvičení 6 a 7 z odstavce 1.4 řešte analogicky s řešením příkladu 3.
3. Napište rovnici roviny ϱ, která obsahuje přímku p a je rovnoběžná s přímkou q. Přitom
   p: $2x - y + z - 3 = 0$, $3x + 4y = 0$;
   q: $3x + 2z - 1 = 0$, $x - y + z = 0$.
4. Určete průsečík přímky $p = [A; \boldsymbol{u}]$ s rovinou ϱ. Přitom $A = [1, 3, -1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, -2)$, ϱ: $3x - 2y + 1 = 0$.
5. Průsečnici rovin ϱ a σ určete bodem a vektorem.
   ϱ: $2x - 3y + z - 2 = 0$, σ: $x + 2y + z + 5 = 0$.

6. Napište rovnici roviny σ, která obsahuje daný bod A a je rovnoběžná s danou rovinou ϱ. Přitom $A = [1, 3, 5]$, ϱ: $2x + 2y - 3z + 1 = 0$.
7. Určete rovnicemi přímku p rovnoběžnou s danou přímkou q tak, aby bylo $A \in p$. Přitom $A = [2, 3, -1]$, q: $3x - y + 1 = 0$, $z - 7 = 0$.
8. Napište rovnici roviny ϱ, která je rovnoběžná s přímkami p, q, a pro niž je $A \in \varrho$. Je dáno $A = [0, 0, 5]$,
   p: $3x - 2y + z = 0$, $x + y + 1 = 0$;
   q: $2x - 5z + 1 = 0$, $3y - z = 0$.

1.6. Afinní zobrazení

Začneme příkladem jednoho zobrazení v trojrozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_3$, které si můžeme dobře představovat ve fyzikálním prostoru. Zvolme v $\mathbf{A}_3$ dvě roviny $\mathbf{A}'_2$ a $\mathbf{A}''_2$ (viz obr. 3). Buď $\mathbf{V}_3$ zaměření prostoru $\mathbf{A}_3$. Zvolme směr $[\{\boldsymbol{u}\}] \subset \mathbf{V}_3$ (*směrem* nazýváme jednorozměrný podprostor vektorového prostoru), který neleží v zaměření žádné z rovin $\mathbf{A}'_2$ a $\mathbf{A}''_2$. Nyní můžeme promítnout směrem $[\{\boldsymbol{u}\}]$ rovinu $\mathbf{A}'_2$ do roviny $\mathbf{A}''_2$, tj. sestrojit zobrazení φ roviny $\mathbf{A}'_2$ do $\mathbf{A}''_2$, které každému bodu $X' \in \mathbf{A}'_2$ přiřadí bod $X'' \in \mathbf{A}''_2$, pro nějž platí $X' - X'' \in [\{\boldsymbol{u}\}]$. Snadno se lze přesvědčit, že zobrazení těchto vlastností skutečně existuje, a že je směrem promítání určeno jednoznačně.



Obr. 3

Afinní zobrazení, které nyní zavedeme, bude zobecněním právě sestrojeného promítání.

Definice 1.6.1. Mějme dány afinní prostory $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, „-")$ a $\mathbf{A}'_m = (\mathbf{A}', \mathbf{V}'_m, „-")$. Zobrazení φ množiny $\mathbf{A}$ do množiny $\mathbf{A}'$ nazýváme *afinní zobrazení* prostoru $\mathbf{A}_n$ do prostoru $\mathbf{A}'_m$, jestliže existuje homomorfismus $\bar{\varphi}$ prostoru $\mathbf{V}_n$ do prostoru $\mathbf{V}'_m$ tak, že je-li $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$, je $Y' - X' = \bar{\varphi}(Y - X)$. Homomorfismus $\bar{\varphi}$ se nazývá *asociovaný homomorfismus* k afinnímu zobrazení φ.

Je zřejmé, že homomorfismus $\bar{\varphi}$ je afinním zobrazením φ určen jednoznačně.

Věta 1.6.1. Buď φ afinní zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, „-“)$ do prostoru $\mathbf{A}'_m = (\mathbf{A}', \mathbf{V}'_m, „-“)$ s asociovaným homomorfismem $\bar{\varphi}$. Nechť $\mathbf{A}''_k$ je podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ a $\mathbf{V}''_k$ buď jeho zaměření. Potom $\varphi(\mathbf{A}''_k)$ je podprostor prostoru $\mathbf{A}'_m$, $\bar{\varphi}(\mathbf{V}''_k)$ je jeho zaměření, a chápeme-li $\mathbf{A}''_k$, $\varphi(\mathbf{A}''_k)$ jako afinní prostory (viz poznámka 1 z odstavce 1.3), pak omezíme-li definiční obor zobrazení φ na $\mathbf{A}''_k$ (toto zobrazení označujeme $\varphi \mid \mathbf{A}''_k$), dostáváme afinní zobrazení $\mathbf{A}''_k$ na $\varphi(\mathbf{A}''_k)$. Asociovaný homomorfismus k tomuto afinnímu zobrazení je $\bar{\varphi} \mid \mathbf{V}''_k$.

Důkaz. Z algebry víme, nebo snadno ověříme, že $\bar{\varphi}(\mathbf{V}''_k)$ je podprostorem prostoru $\mathbf{V}'_m$. Jednoduchým způsobem ověříme vlastnosti podprostoru. Buď X', $Y' \in \varphi(\mathbf{A}''_k)$. Potom existují X, $Y \in \mathbf{A}''_k$ tak, že $\varphi(X) = X'$, $\varphi(Y) = Y'$. Z definice 1.6.1 plyne, že $\bar{\varphi}(Y - X) = Y' - X'$, a tudíž $Y' - X' \in \mathbf{V}''_k$. Buď nyní $\boldsymbol{u}' \in \bar{\varphi}(\mathbf{V}''_k)$. Potom existuje vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}''_k$ tak, že $\boldsymbol{u}' = \bar{\varphi}(\boldsymbol{u})$. Označíme-li $Z = Y + \boldsymbol{u}$, je $\varphi(Z) \in \varphi(\mathbf{A}''_k)$ a z definice 1.6.1 dostaneme, že $\varphi(Z) - Y' = \boldsymbol{u}'$, a tedy $Y' + \boldsymbol{u}' \in \varphi(\mathbf{A}''_k)$. Tudíž $\mathbf{A}''_k$ je podprostor se zaměřením $\bar{\varphi}(\mathbf{V}''_k)$. Tvrzení, že $\varphi \mid \mathbf{A}''_k$ je afinní zobrazení s asociovaným homomorfismem $\bar{\varphi} \mid \mathbf{V}''_k$, je zřejmé.

Nyní si ukážeme dva příklady afinních zobrazení. První bude promítání (zobecnění promítání v $\mathbf{A}_3$, o kterém jsme mluvili na počátku odstavce). Zvolme v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ podprostor $\mathbf{A}'_k$ se zaměřením $\mathbf{V}'_k$. Dále zvolme podprostor $\mathbf{V}''_{n-k}$ prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, aby bylo $\mathbf{V}'_k \cap \mathbf{V}''_{n-k} = \{\mathbf{o}\}$. Podle úvodu (odstavec 5) je potom $[\mathbf{V}'_k \cup \mathbf{V}''_{n-k}] = \mathbf{V}_n$. Prostor $\mathbf{V}''_{n-k}$ můžeme získat např. tak, že zvolíme bázi $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, aby bylo

(1) $$[\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}] = \mathbf{V}'_k.$$

Můžeme položit

(2) $$\mathbf{V}''_{n-k} = [\{\boldsymbol{u}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}].$$

Nyní se přesvědčíme, že ke každému bodu $X \in \mathbf{A}_n$ existuje právě jeden bod $X' \in \mathbf{A}'_k$ tak, že $X' - X \in \mathbf{V}''_{n-k}$. Zvolme repér $\mathscr{R} = \langle A; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ v prostoru $\mathbf{A}_n$ tak, že $A \in \mathbf{A}'_k$, a že platí vztahy (1) a (2). Potom v příslušné lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ můžeme psát $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $X' = [x'_1, \ldots, x'_k, 0, \ldots, 0]$, a tudíž $X' - X = (x'_1 - x_1, \ldots, x'_k - x_k, -x_{k+1}, \ldots, -x_n)$. Vidíme, že k tomu, aby bylo $X' - X \in \mathbf{V}''_{n-k}$, je nutné a stačí, aby $x'_1 = x_1, \ldots, x'_k = x_k$. Tudíž bod X' požadovaných vlastností skutečně existuje právě jeden. Definujme nyní zobrazení φ množiny $\mathbf{A}$ bodů prostoru $\mathbf{A}_n$ do podprostoru $\mathbf{A}'_k$ tak, že pro každý bod $X \in \mathbf{A}_n$ položíme $\varphi(X) = X'$. Jestliže podprostor $\mathbf{A}'_k$ doplníme na afinní prostor $(\mathbf{A}'_k, \mathbf{V}'_k, „-“)$ (viz poznámka 1 z odstavce 1.3), bude sestrojené zobrazení φ afinním zobrazením.

V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, jak jsme již ukázali, můžeme pro $X = [x_1, \ldots, x_n]$ psát $\varphi(X) = [x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0]$. Nyní lze snadno ověřit vlastnosti afinního zobrazení. Asociovaným homomorfismem je homomorfismus $\bar{\varphi}$, přiřazující každému vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ vektor $\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}) = (u_1, \ldots, u_k, 0, \ldots, 0)$. Sestrojené afinní zobrazení nazýváme *projekce* $\mathbf{A}_n$ do podprostoru $\mathbf{A}'_k$ směrem $\mathbf{V}''_{n-k}$. Nejčastěji se toto zobrazení používá, je-li $\mathbf{A}'_k$ nadrovina (tj. $k = n - 1$).

Druhým příkladem afinního zobrazení bude *stejnolehlost* o *středu* $S \in \mathbf{A}_n$ a *koeficientu* $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Toto zobrazení bude každému bodu $X \in A_n$ přiřazovat bod

$$\varphi(X) = S + a(X - S).$$

Opět lze snadno ověřit, že sestrojené zobrazení je afinní zobrazení. Příslušný asociovaný homomorfismus $\bar{\varphi}$ přiřazuje každému vektoru $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n$ vektor $\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}) = a\boldsymbol{u}$. Vidíme, že na rozdíl od projekce je stejnolehlost vzájemně jednoznačné zobrazení a homomorfismus $\bar{\varphi}$ je izomorfismus. Odtud vyplývá, že obraz $\varphi(\mathbf{A}'_k)$ každého podprostoru $\mathbf{A}'_k$ prostoru $\mathbf{A}_n$ má stejnou dimenzi k. Dále z rovnosti $\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}) = a\boldsymbol{u}$ vyplývá, že podprostor $\varphi(\mathbf{A}'_k)$ je rovnoběžný s podprostorem $\mathbf{A}'_k$ (platí pro každý podprostor $\mathbf{A}'_k$). Stejnolehlost s koeficientem 1 je zřejmě identita. Stejnolehlost s koeficientem -1 se nazývá *středová souměrnost.*

Podrobněji se s afinními zobrazeními seznámíme až ve druhém dílu této učebnice.

1.7. Dělicí poměr, střed dvojice bodů

Nyní budeme definovat dělicí poměr tří bodů na přímce. Na první pohled bude přitom zřejmé, že definovaný pojem souhlasí se způsobem zavedení dělicího poměru na střední škole.

Předpokládejme, že máme dánu afinní přímku $\mathbf{A}_1$ se zaměřením $\mathbf{V}_1$. Buď $\boldsymbol{u}$ nenulový vektor ze zaměření $\mathbf{V}_1$ (tudíž tvoří jeho bázi). Jestliže A, B, C jsou tři body přímky $\mathbf{A}_1$, můžeme psát

(1) $$C - A = x\boldsymbol{u}, \qquad C - B = y\boldsymbol{u}.$$

Budeme-li předpokládat, že $C \neq B$, můžeme utvořit zlomek x/y a nazvat ho dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B. Je vidět, že v případě, že by bylo $A = B$, byl by dělicí poměr každého bodu C přímky $\mathbf{A}_1$ (různého od bodu B) roven jedné. Dělicí poměr budeme tedy definovat jen pro případ, že $A \neq B$. Teď již můžeme napsat definici dělicího poměru (vlastně již byla napsána v textu).

Definice 1.7.1. Buď dána afinní přímka $\mathbf{A}_1$ se zaměřením $\mathbf{V}_1$. Buďte $A, B, C \in \mathbf{A}_1$ a dále buď $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_1$, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{o}$. Nechť $A \neq B \neq C$. Jsou-li čísla x, y definována vztahy (1), nazýváme číslo x/y ***dělicí poměr*** bodu C vzhledem k bodům A, B a označujeme je $(A, B; C)$.

Poznamenejme ještě, že právě vyslovená definice dělicího poměru je oprávněná, tj. číslo x/y závisí skutečně jen na bodech A, B, C a nezávisí na použitém vektoru $\mathbf{u}$. Skutečně, kdyby $\mathbf{u}' \in \mathbf{V}_1$ byl jiný nenulový vektor, bylo by $\mathbf{u}' = k\mathbf{u}$, $k \neq 0$, a kdybychom psali

$$C - A = x'\mathbf{u}', \qquad C - B = y'\mathbf{u}',$$

bylo by $C - A = x'k\mathbf{u} = x\mathbf{u}$, a tedy $x = x'k$, a podobně též $y = y'k$. Potom by bylo $x/y = x'k/(y'k) = x'/y'$. Vztahy (1) můžeme zřejmě napsat i pro body jednorozměrného podprostoru $\mathbf{A}'_1$ afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ a dělicí poměr tří bodů na přímce v $\mathbf{A}_n$ můžeme tudíž definovat stejným způsobem – viz poznámku 1 z odstavce 1.3. Všechny další věty pak platí i pro dělicí poměr tří bodů na přímce v prostoru $\mathbf{A}_n$.

Ukážeme si ještě jedno jednoduché vyjádření dělicího poměru. Kdybychom ve vztahu (1) zvolili $\mathbf{u} = C - B$, bylo by $y = 1$ a $x = d$, tj. dělicí poměr d bodů A, B, C by byl určen rovností

$$C - A = d(C - B). \tag{2}$$

Předpokládejme, že $\mathscr{L}$ je lineární soustava souřadnic na přímce $\mathbf{A}_1$ daná repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u} \rangle$. Potom je $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$, a potom

$$C - A = (c - a)\,\mathbf{u}, \qquad C - B = (c - b)\,\mathbf{u},$$

a tudíž

$$(A, B; C) = (c - a)/(c - b). \tag{3}$$

Protože je $A \neq B$, je $a \neq b$, a tedy $(A, B; C) \neq 1$.

Ukážeme, že jsou-li dány body A, B, $A \neq B$, číslo $d \in \mathbf{R}$, $d \neq 1$, je podmínkou $(A, B; C) = d$ určen jediný bod $C \in \mathbf{A}_1$. To dokážeme tím, že ze vztahu

$$d = (c - a)/(c - b) \tag{4}$$

vypočítáme souřadnici c bodu C. Je zřejmé, že následující rovnosti jsou s rovností (4) ekvivalentní.

$$\begin{aligned} c - a &= dc - db \\ c - dc &= a - db \\ c &= (a - db)/(1 - d) \end{aligned} \tag{5}$$

Tudíž platí:

Věta 1.7.1. Buďte dány body $A, B \in \mathbf{A}_1$, $A \neq B$. Potom zobrazení, které každému bodu $C \in \mathbf{A}_1$, $C \neq B$, přiřadí dělicí poměr $(A, B; C)$, je vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{A}_1 \setminus \{B\}$ na množinu $\mathbf{R} \setminus \{1\}$.

Nyní budeme zkoumat, jak se mění dělicí poměr tří bodů, změníme-li jejich pořadí. Nejdříve budeme řešit následující úlohu: Jsou dány tři různé body A, B, C

přímky $\mathbf{A}_1$ (tj. $A \neq B \neq C \neq A$). Je $(A, B; C) = d$. Určete dělicí poměry $(B, A; C)$ a $(A, C; B)$. Ze vztahu (3) je zřejmé, že je $(B, A; C) = 1/d$. Dále máme $(A, C; B) = (b - a)/(b - c)$. Dosadíme-li do tohoto vztahu za c ze vztahu (5) a upravíme-li vzniklý zlomek, dostáváme $(A, C; B) = 1 - d$. Je vidět, že nyní bychom již snadno určili i dělicí poměry $(B, C; A)$, $(C, A; B)$ a $(C, B; A)$. Platí $(B, C; A) = 1 - \dfrac{1}{d}$, $(C, A; B) = \dfrac{1}{1 - d}$, $(C, B; A) = \dfrac{d}{d - 1}$; důkaz těchto tvrzení ponecháme jako cvičení.

Mějme v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ zvolenu lineární soustavu souřadnic. Buď dále $\mathbf{A}'_1 = [Q; \mathbf{v}]$ přímka v prostoru $\mathbf{A}_n$. Nechť ve zvolené lineární soustavě souřadnic je $Q = [q_1, \ldots, q_n]$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$. Máme-li nyní tři různé body $A, B, C \in \mathbf{A}'_1$ a je $A = Q + a\mathbf{v}$, $B = Q + b\mathbf{v}$, $C = Q + c\mathbf{v}$, pak pro souřadnice bodů A, B, C $(a_i, b_i, c_i$, $i = 1, \ldots, n)$ platí $a_i = q_i + av_i$, $b_i = q_i + bv_i$, $c_i = q_i + cv_i$, $i = 1, \ldots, n$. Odtud dostáváme

$$c_i - a_i = q_i + cv_i - (q_i + av_i) = (c - a)\,v_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

a podobně

$$c_i - b_i = (c - b)\,v_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

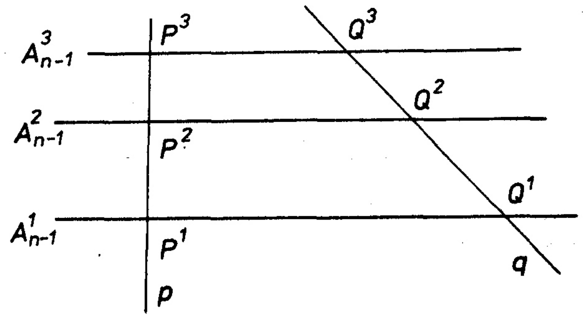
Je-li pro dané přirozené číslo j, $1 \leqq j \leqq n$, $v_j \neq 0$, dostáváme z rovnosti (3), že je

$$(A, B; C) = (c_j - a_j)/(c_j - b_j). \tag{6}$$

Odtud již vyplývá věta:

Věta 1.7.2. Mějme dány tři různé rovnoběžné nadroviny $\mathbf{A}^1_{n-1}$, $\mathbf{A}^2_{n-1}$, $\mathbf{A}^3_{n-1}$ v prostoru $\mathbf{A}_n$. Buďte p, q dvě přímky v $\mathbf{A}_n$ různoběžné s těmito nadrovinami. Označme $P^i = p \cap \mathbf{A}^i_{n-1}$, $Q^i = q \cap \mathbf{A}^i_{n-1}$, $i = 1, 2, 3$. Potom platí $(P^1, P^2; P^3) = (Q^1, Q^2; Q^3)$.

Důkaz. Názorný význam věty 1.7.2 je patrný z obrázku 4 (pro $n = 2$). Zvolme v $\mathbf{A}_n$ lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}$ repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ tak, aby $\mathbf{A}^1_{n-1} = [P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}]$. Potom bod P^i má stejnou souřadnici jako bod Q^i, $i = 1, 2, 3$.



Obr. 4

Tvrzení věty tudíž plyne ze vztahu (6) (pro $j = n$). Věta 1.7.2 je též důsledkem příští obecnější věty.

Věta 1.7.3. Buď φ afinní zobrazení afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ do afinního prostoru $\mathbf{A}'_m$. Předpokládejme, že $A, B \in \mathbf{A}_n$, $A \neq B$, $C \in \overleftrightarrow{AB}$, $C \neq B$, $\varphi(A) \neq \varphi(B)$. Potom je $\varphi(C) \in \overleftrightarrow{\varphi(A)\,\varphi(B)}$, $\varphi(C) \neq \varphi(B)$ a $(A, B; C) = (\varphi(A), \varphi(B); \varphi(C))$.

Důkaz. Zobrazíme-li obě strany rovnosti (2) homomorfismem $\bar{\varphi}$ (asociovaný homomorfismus k φ), dostáváme podle definice 1.6.1 rovnost

$$\varphi(C) - \varphi(A) = d(\varphi(C) - \varphi(B)).$$

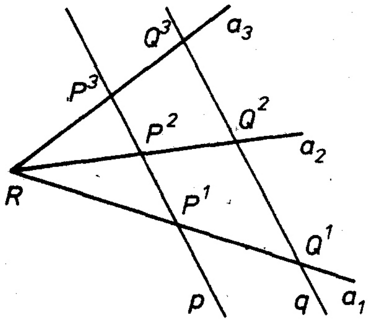
Z této rovnosti již plynou všechna dokazovaná tvrzení (kdyby bylo $\varphi(C) = \varphi(B)$, bylo by i $\varphi(C) = \varphi(A)$, a tudíž $\varphi(A) = \varphi(B)$, což není možné).

Z této věty, jak již bylo řečeno, vyplývá věta 1.7.2. Za afinní zobrazení stačí vzít projekci prostoru $\mathbf{A}_n$ na přímku p směrem $\mathbf{V}'_{n-1}$, kde $\mathbf{V}'_{n-1}$ je zaměření všech tří nadrovin $\mathbf{A}^1_{n-1}, \mathbf{A}^2_{n-1}, \mathbf{A}^3_{n-1}$.

Věta 1.7.4. Mějme v afinní rovině $\mathbf{A}_2$ dány tři různé přímky a_1, a_2, a_3 procházející bodem $R \in \mathbf{A}_2$. Buďte p, q rovnoběžné přímky v $\mathbf{A}_2$, které nejsou rovnoběžné se žádnou z přímek a_1, a_2, a_3 a neprocházejí bodem R. Označme P_i, resp. Q_i průsečík přímky p, resp. q s přímkou a_i (pro $i = 1, 2, 3$). Potom je $(P_1, P_2; P_3) = (Q_1, Q_2; Q_3)$.

Důkaz. Protože $R \notin p$, je $P_1 - R \neq \mathbf{o}$. Označme $k \in \mathbf{R}$ číslo, pro něž

(6) $$Q_1 - R = k(P_1 - R).$$



Obr. 5

Provedeme-li stejnolehlost φ o středu R a koeficientu k, dostaneme z vlastností stejnolehlosti (viz odstavec 6), že $\varphi(P_1) = Q_1$, $\varphi(p) = q$, a tudíž $\varphi(P_i) = Q_i$ pro $i = 1, 2, 3$. Tvrzení nyní již vyplývá z věty 1.7.3. Názorný význam věty 1.7.4 je patrný z obr. 5.

Dosud jsme mohli veškerou teorii dělat zcela stejně, kdybychom místo množiny všech reálných čísel brali libovolné těleso $\mathbf{T}$. Dalším pojmem, který zavedeme, bude střed dvojice bodů. Protože při výpočtu středu dvojice bodů budeme dělit číslem 2, museli bychom při popsaném zobecňování (vzít libovolné těleso $\mathbf{T}$ místo množiny reálných čísel) vynechat tělesa charakteristiky 2, tj. tělesa, v nichž je $1 + 1 = 0$ (příkladem tohoto tělesa je těleso zbytkových tříd modulo 2 známé z algebry).

Definice 1.7.2. Buďte $A, B \in \mathbf{A}_n$. Je-li $A = B$, nazýváme *středem dvojice bodů* A, B bod A. Je-li $A \neq B$, nazýváme *středem dvojice* A, B bod $S \in \mathbf{A}_n$ ležící na přímce $\overleftrightarrow{AB}$, pro nějž platí $(A, B; S) = -1$.

Nyní vidíme, proč při popsaném zobecňování musíme vyloučit tělesa charakteristiky 2. V tělese charakteristiky 2 je totiž $1 + 1 = 0$, a tedy $1 = -1$, a protože dělicí poměr každých tří bodů je různý od jedné, bod S popsaných vlastností by neexistoval.

Věta 1.7.5. Bod $S \in \mathbf{A}_n$ je středem dvojice bodů A, B ($A, B \in \mathbf{A}_n$) právě tehdy, je-li

$$S = A + \tfrac{1}{2}(B - A).$$

Důkaz. Protože jak střed dvojice bodů, tak bod $A + \frac{1}{2}(B - A)$ nezávisí na volbě lineární soustavy souřadnic, můžeme důkaz provést výpočtem ve vhodně zvolené lineární soustavě souřadnic. Zvolme na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ lineární soustavu souřadnic danou repérem $\langle A; B - A\rangle$. V této lineární soustavě souřadnic je $A = [0]$, $B = [1]$. Buď dále $S = [s]$, $s \neq 1$. Potom bod S je středem dvojice bodů A, B právě tehdy, je-li $(s - 0)/(s - 1) = -1$, tj. $s = 1 - s$, tj. $s = 1/2$. Tím je tvrzení dokázáno.

Věta 1.7.6. Nechť pro $A, B \in \mathbf{A}_n$ je v lineární soustavě souřadnic $A = [a_1, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, \ldots, b_n]$. Buď S střed dvojice bodů A, B. Potom je

$$S = [\tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{2}b_1, \ldots, \tfrac{1}{2}a_n + \tfrac{1}{2}b_n].$$

Důkaz. Je-li $S = [s_1, \ldots, s_n]$, je podle předchozí věty $s_i = a_i + \frac{1}{2}(b_i - a_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$, tj. $s_i = \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Skutečnost, že pro souřadnice středu S dvojice bodů A, B platí $s_i = \frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}b_i$, budeme symbolicky zapisovat ve tvaru

$$S = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B.$$

Ještě jednou je nutno zdůraznit, že tento zápis je zcela symbolický, a tedy pouze znamená, že bod S je středem dvojice bodů A, B, a neznamená, že např. je definováno násobení bodu číslem nebo sčítání bodů.

Věta 1.7.7. Buď $A, B, C, D \in \mathbf{A}_n$. Potom $A - B = C - D$ právě tehdy, je-li

$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}D = \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C.$$

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, neboť zvolíme-li v $\mathbf{A}_n$ lineární soustavu souřadnic, je rovnost $A - B = C - D$ ekvivalentní rovnostem $a_i - b_i = c_i - d_i$, $i = 1, \ldots, n$, z nichž jednoduchou úpravou získáme ekvivalentní rovnosti $\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}d_i = \frac{1}{2}b_i + \frac{1}{2}c_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Právě dokázaná věta nám ukazuje souvislost zavedeného pojmu vektoru se středoškolským pojmem vektoru. Věta 1.7.7 totiž říká, že dvě dvojice bodů A, B a C, D určují stejný vektor právě tehdy, mají-li dvojice A, D a B, C stejný střed, což je jeden ze způsobů používaný při zavedení vektorů na střední škole.

Cvičení

1. Na přímce $\mathbf{A}_1$ jsou dány tři různé body A, B, C. Platí $(A, B; C) = d$. Určete čísla $(B, C; A)$, $(C, A; B)$, $(C, B; A)$.
2. Na přímce $\mathbf{A}_1$ jsou dány čtyři různé body A, B, C, D. Potom platí $(A, B; D) \cdot (B, C; D) = (A, C; D)$. Dokažte.
3. V prostoru $\mathbf{A}_n$ je dán bod R a nadrovina $\mathbf{A}'_{n-1}$ neprocházející bodem R. Dále je dáno číslo $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 1$. Zjištěte, co vyplní všechny body $X \in \mathbf{A}_n$, pro něž platí: Existuje $Y \in \mathbf{A}'_{n-1}$ tak, že body Y, X, R leží na přímce a je $(Y, R; X) = c$.
4. V prostoru $\mathbf{A}_3$ jsou dány dvě mimoběžky p, q. Dále je dáno číslo $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 1$. Zjistěte, co vyplní všechny body $X \in \mathbf{A}_n$, pro něž platí: Existují body $P \in p$, $Q \in q$ tak, že body P, Q, X leží na přímce a je $(P, Q; X) = c$.
5. V prostoru $\mathbf{A}_3$ jsou dány tři přímky p, q, r, z nichž každé dvě jsou mimoběžné. Dále je dáno číslo $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 1$. Zjistěte, kolik je trojic bodů (P, Q, R), pro něž platí: $P \in p$, $Q \in q$, $R \in r$, body P, Q, R leží na jedné přímce a $(P, Q; R) = c$.
6. Pro každé dva body $X, Y \in \mathbf{A}_n$ označme $S(X, Y)$ jejich střed. Potom pro každé čtyři body $A, B, C, D \in \mathbf{A}_n$ platí: $S(S(A, B), S(C, D)) = S(S(A, C), S(B, D)) = S(S(A, D), S(B, C))$. Dokažte.

1.8. Lineární kombinace bodů

Zavedeme lineární kombinaci bodů. Víme, že např. střed S dvojice bodů A, B z afinního prostoru $\mathbf{A}_n$ se zapisuje ve tvaru $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$. Tento zápis používáme proto, že je-li ve zvolené soustavě lineárních souřadnic $A = [a_1, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, \ldots, b_n]$, $S = [s_1, \ldots, s_n]$, je $s_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$. Vidíme, že je-li P počátek zmíněné lineární soustavy souřadnic, je $S = P + \frac{1}{2}(A - P) + \frac{1}{2}(B - P)$ (rovnost je zřejmá, rozepíšeme-li obě strany pomocí souřadnic). Bod $P + \frac{1}{2}(A - P) + \frac{1}{2}(B - P)$ tudíž nezávisí na volbě bodu P, protože střed dvojice bodů je na volbě lineární soustavy souřadnic nezávislý. Uvedený postup se nyní pokusíme zobecnit. Mějme dány body $B_1, \ldots, B_k \in \mathbf{A}_n$ a čísla $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$. Zvolíme ještě bod $P \in \mathbf{A}_n$ a sestrojíme bod $P + c_1(B_1 - P) + \ldots + c_k(B_k - P)$ a budeme zkoumat, kdy tento bod nezávisí na volbě bodu P. Zároveň budeme zkoumat, kdy vektor $c_1(B_1 - P) + \ldots + c_k(B_k - P)$ nezávisí na volbě bodu P. Zvolme proto ještě bod $Q \in \mathbf{A}_n$.

Označme
$$\boldsymbol{u}_P = c_1(B_1 - P) + \ldots + c_k(B_k - P),$$
$$\boldsymbol{u}_Q = c_1(B_1 - Q) + \ldots + c_k(B_k - Q).$$

Vztah $P + \boldsymbol{u}_P = Q + \boldsymbol{u}_Q$ bude platit právě tehdy, bude-li $\boldsymbol{u}_P - \boldsymbol{u}_Q = Q - P$. Vztah $\boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{u}_Q$ bude platit právě tehdy, bude-li $\boldsymbol{u}_P - \boldsymbol{u}_Q = \boldsymbol{o}$. Počítejme tedy rozdíl $\boldsymbol{u}_P - \boldsymbol{u}_Q$. Máme
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_P - \boldsymbol{u}_Q &= c_1(B_1 - P) + \ldots + c_k(B_k - P) - \\ &- (c_1(B_1 - Q) + \ldots + c_k(B_k - Q)),\end{aligned}$$
a tedy
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_P - \boldsymbol{u}_Q &= c_1((B_1 - P) - (B_1 - Q)) + \ldots + \\ &+ c_k((B_k - P) - (B_k - Q)) = \\ &= c_1(Q - P) + \ldots + c_k(Q - P) = \\ &= (c_1 + \ldots + c_k)(Q - P).\end{aligned}$$

Vidíme, že pro každé dva body $P, Q \in \mathbf{A}_n$ bude platit vztah $P + \boldsymbol{u}_P = Q + \boldsymbol{u}_Q$ právě tehdy, bude-li $c_1 + \ldots + c_k = 1$, a vztah $\boldsymbol{u}_P = \boldsymbol{u}_Q$ bude platit právě tehdy, bude-li $c_1 + \ldots + c_k = 0$. Pro tyto případy tudíž můžeme definovat lineární kombinaci bodů. Vidíme, že pro případ $k = 2$ a $c_1 = c_2 = 1/2$ dostáváme již dříve definovaný střed dvojice bodů B_1, B_2.

Definice 1.8.1. Mějme dány body $P, B_1, \ldots, B_k \in \mathbf{A}_n$ a čísla $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$. Je-li $c_1 + \ldots + c_k = 1$, resp. $c_1 + \ldots + c_k = 0$, nazýváme bod
$$P + c_1(B_1 - P) + \ldots + c_k(B_k - P),$$
resp. vektor
$$c_1(B_1 - P) + \ldots + c_k(B_k - P)$$
lineární kombinací bodů $B_1, \ldots, B_k$ s koeficienty $c_1, \ldots, c_k$ a označujeme ho symbolem
$$c_1B_1 + \ldots + c_kB_k.$$

Předpokládejme nyní, že máme dánu v $\mathbf{A}_n$ lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}$ repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, a že dané body $B_1, \ldots, B_k \in \mathbf{A}_n$ máme v této lineární soustavě souřadnic dány souřadnicemi
$$(1)\qquad \begin{aligned}B_1 &= [b_{11}, \ldots, b_{1n}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_k &= [b_{k1}, \ldots, b_{kn}].\end{aligned}$$

Mějme dále dána čísla $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$, pro něž je $c_1 + \ldots + c_k = 1$, resp. $c_1 + \ldots + c_k = 0$. Budeme určovat souřadnice bodu, resp. vektoru $c_1B_1 + \ldots + c_kB_k$.

Označme tyto souřadnice $d_1, \dots, d_n$. Určíme-li je pomocí bodu P, dostáváme snadno (je $P = [0, \dots, 0]$, $B_i - P = (b_{i1}, \dots, b_{in})$, $i = 1, \dots, k$), že

$$d_j = c_1 b_{1j} + \dots + c_k b_{kj}, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Obdržený výsledek můžeme nyní zformulovat ve větu.

Věta 1.8.1. Buďte $B_1, \dots, B_k \in \mathbf{A}_n$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$. Nechť $c_1 + \dots + c_k = 1$, resp. $c_1 + \dots + c_k = 0$. Platí-li pro body $B_1, \dots, B_k$ ve zvolené lineární soustavě souřadnic vztahy (1), má bod, resp. vektor $c_1 B_1 + \dots + c_k B_k$ souřadnice $d_1, \dots, d_n$ dané vztahy (2).

Následující věta je jednoduchým důsledkem věty předcházející.

Věta 1.8.2. Mějme dány body $A, B, C, D \in \mathbf{A}_n$ a čísla $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$. Nechť je splněn jeden z následujících předpokladů:

1. $a + b = 1$, $c + d = 1$, $e + f = 1$;
2. $a + b = 1$, $c + d = 1$, $e + f = 0$;
3. $a + b = 0$, $c + d = 0$.

Potom platí

$$e(aA + bB) + f(cC + dD) = eaA + ebB + fcC + fdD. \tag{3}$$

Důkaz. Věta okamžitě vyplývá z předchozí věty. Stačí jen ověřit, že lineární kombinace na pravé straně rovnosti (3) je definována, a že na pravé straně máme objekt stejného druhu (bod nebo vektor) jako na levé straně. To je však snadné. Např. je-li splněn předpoklad 1, dostaneme

$$ea + eb + fc + fd = e(a + b) + f(c + d) = e + f = 1.$$

Podobně je to i v případě, že platí jeden z předpokladů 2, 3. Tím je věta dokázána.

Právě dokázanou větu můžeme zformulovat také tak, že jsou-li na levé straně vztahu (3) všechny lineární kombinace definovány, platí distributivní zákon.

Zřejmě ve větě 1.8.2 nebylo podstatné, že jsme dělali lineární kombinace vždy jen ze dvou bodů. Stejným způsobem můžeme postupovat, i když máme více bodů. Příslušné tvrzení nám dává následující věta. Její důkaz je zcela analogický důkazu věty 1.8.2, a proto ho dělat nebudeme.

Věta 1.8.3. Mějme dány body $B_1^i, \dots, B_{k_i}^i \in \mathbf{A}_n$, $i = 1, \dots, r$ a čísla $c_1^i, \dots, c_{k_i}^i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, r$. Buďte dále dána čísla $d_1, \dots, d_r \in \mathbf{R}$. Nechť je splněn jeden z následujících předpokladů:

1. $c_1^i + \dots + c_{k_i}^i = 1$ pro $i = 1, \dots, r$ a $d_1 + \dots + d_r = 1$.
2. $c_1^i + \dots + c_{k_i}^i = 1$ pro $i = 1, \dots, r$ a $d_1 + \dots + d_r = 0$.
3. $c_1^i + \dots + c_{k_i}^i = 0$ pro $i = 1, \dots, r$.

Potom platí

$$d_1(c_1^1 B_1^1 + \dots + c_{k_1}^1 B_{k_1}^1) + d_2(c_1^2 B_1^2 + \dots + c_{k_2}^2 B_{k_2}^2) + \dots + d_r(c_1^r B_1^r + \dots + c_{k_r}^r B_{k_r}^r) = \\ = d_1 c_1^1 B_1^1 + \dots + d_1 c_{k_1}^1 B_{k_1}^1 + d_2 c_1^2 B_1^2 + \dots + d_2 c_{k_2}^2 B_{k_2}^2 + \dots + d_r c_1^r B_1^r + \dots + \\ + d_r c_{k_r}^r B_{k_r}^r.$$

Pomocí věty 1.8.1 bychom mohli snadno dokázat ještě další tvrzení, např. následující větu.

Věta 1.8.4. Nechť $B_1, \dots, B_m \in \mathbf{A}_n$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{R}$, $c_1 + \dots + c_m = 0$, $c_1 B_1 + \dots + c_m B_m = \mathbf{u}$. Pak je-li pro $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqq k \leqq m$, $c_1 + \dots + c_k = 0$, je

$$c_1 B_1 + \dots + c_k B_k = \mathbf{u} + (-c_{k+1} B_{k+1} - \dots - c_m B_m),$$

je-li $c_1 + \dots + c_k = d \neq 0$, je

$$(c_1/d) B_1 + \dots + (c_k/d) B_k = (-(c_{k+1}/d) B_{k+1} - \dots - (c_m/d) B_m) + (1/d)\, \mathbf{u}.$$

Důkaz. Stačí ověřit, že obě strany dokazovaných rovností jsou definovány. V prvním případě z rovnosti $c_1 + \dots + c_k = 0$ a $c_1 + \dots + c_m = 0$ plyne, že i $-c_{k+1} - \dots - c_m = 0$, a obě strany rovnosti jsou tedy definovány. V případě druhé rovnosti je zřejmě $c_1/d + \dots + c_k/d = 1$, a protože $c_1 + \dots + c_m = 0$, je $d + c_{k+1} + \dots + c_m = 0$, a tedy i $-c_{k+1} - \dots - c_m = d$ a $-c_{k+1}/d - \dots - c_m/d = 1$. I v tomto případě jsou obě strany dokazované rovnosti definovány. Tvrzení je nyní již jednoduchým důsledkem věty 1.8.1.

Zcela analogická věta k větě 1.8.4 je věta 1.8.4'.

Věta 1.8.4'. Nechť $B_1, \dots, B_m \in \mathbf{A}_n$, $c_1, \dots, c_m \in \mathbf{R}$, $c_1 + \dots + c_m = 1$, $c_1 B_1 + \dots + c_m B_m = R$. Pak je-li pro $k \in \mathbf{N}$, $1 \leqq k \leqq m$, $c_1 + \dots + c_k = 0$, je

$$c_1 B_1 + \dots + c_k B_k = R - c_{k+1} B_{k+1} - \dots - c_m B_m,$$

je-li $c_1 + \dots + c_k = d \neq 0$, je

$$(c_1/d) B_1 + \dots + (c_k/d) B_k = (1/d) R - (c_{k+1}/d) B_{k+1} - \dots - (c_m/d) B_m.$$

Důkaz právě vyslovené věty ponecháme jako cvičení.

Poznámka 1. Přímo z definice 1.8.1 vyplývá, že speciálně jsou pro každý bod A definovány součiny $1A$ a $0A$ a je $1A = A$ a $0A = \mathbf{o}$. Proto bude-li se v lineární kombinaci bodů vyskytovat člen $1A$, budeme místo něho psát jen A a podobně místo $(-1) A$ budeme psát $-A$.

Povšimněme si nyní, že rovnost $A - B = \mathbf{u}$, která měla zpočátku jen význam symbolického zápisu vztahu $f(A, B) = \mathbf{u}$ (v afinním prostoru $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, f)$), má nyní i význam lineární kombinace bodů. Skutečně, kdybychom počítali lineární kombinaci $1A + (-1) B$ podle definice 1.8.1 (to lze, neboť $1 + (-1) = 0$), dostali bychom (při volbě $P = B$)

$$1A + (-1) B = 1(A - B) + (-1)(B - B) = A - B.$$

Definice 1.8.2. Říkáme, že body $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{A}_n$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže platí: Je-li $c_1, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$, $c_1 + \ldots + c_m = 0$, $c_1B_1 + \ldots + c_mB_m = \mathbf{o}$, pak $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Nejsou-li body $B_1, \ldots, B_m$ lineárně nezávislé, říkáme, že jsou *lineárně závislé*.

Vidíme, že definice lineárně nezávislých bodů je zcela analogická definici lineárně nezávislých vektorů.

Věta 1.8.5. Body $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{A}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, jsou-li vektory $B_2 - B_1, \ldots, B_m - B_1$ lineárně nezávislé.

Důkaz. Podle definice 1.8.1 (klademe $P = B_1$) je

(4) $$c_1B_1 + \ldots + c_mB_m = c_2(B_2 - B_1) + \ldots + c_m(B_m - B_1).$$

Protože každou $(m - 1)$-tici čísel $(c_2, \ldots, c_m)$ můžeme doplnit na m-tici $(c_1, \ldots, c_m)$ tak, aby $c_1 + \ldots + c_m = 0$ (k tomu je nutné a stačí, aby $c_1 = -c_2 - \ldots - c_m$), plyne již z rovnosti (4) tvrzení věty.

Jako důsledek právě dokázané věty dostáváme následující větu.

Věta 1.8.6. Body $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{A}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, určují-li podprostor dimenze $m - 1$.

Věta 1.8.7. Buďte $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{A}_n$. Buď $\mathbf{A}'_k$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$ určený body $B_1, \ldots, B_m$. Potom platí: Je $X \in \mathbf{A}'_k$ právě tehdy, jestliže existují čísla $x_1, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$ tak, že $x_1 + \ldots + x_m = 1$ a $X = x_1B_1 + \ldots + x_mB_m$.

Důkaz. $X \in \mathbf{A}'_k$ právě tehdy, existují-li čísla $x_2, \ldots, x_m \in \mathbf{R}$ tak, že

$$X = B_1 + x_2(B_2 - B_1) + \ldots + x_m(B_m - B_1).$$

Avšak položíme-li $x_1 = 1 - x_2 - \ldots - x_m$, je $x_1 + \ldots + x_m = 1$ a

$$B_1 + x_2(B_2 - B_1) + \ldots + x_m(B_m - B_1) = x_1B_1 + \ldots + x_mB_m$$

(viz definice 1.8.1 – klademe $P = B_1$). Odtud již plyne dokazované tvrzení.

Následující věta a její důkaz jsou zcela analogické předchozí větě a jejímu důkazu.

Věta 1.8.8. Buď $\mathbf{A}'_k$ podprostor určený body $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{A}_n$ a $\mathbf{V}'_k$ nechť je zaměření $\mathbf{A}'_k$. Potom je $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}'_k$ právě tehdy, jestliže existují čísla $u_1, \ldots, u_m \in \mathbf{R}$ tak, že $u_1 + \ldots + u_m = 0$ a $\boldsymbol{u} = u_1B_1 + \ldots + u_mB_m$.

Důkaz. $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}'_k$ právě tehdy, existují-li čísla $u_2, \ldots, u_m \in \mathbf{R}$ tak, že

$$\boldsymbol{u} = u_2(B_2 - B_1) + \ldots + u_m(B_m - B_1).$$

Avšak položíme-li $u_1 = -u_2 - \ldots - u_m$, je $u_1 + \ldots + u_m = 0$ a $u_2(B_2 - B_1) + \ldots + u_m(B_m - B_1) = u_1B_1 + \ldots + u_mB_m$ (viz definice 1.8.1 – klademe $P = B_1$). Odtud již plyne dokazované tvrzení.

Cvičení

1. Dokažte větu 1.8.4'.
2. Body $B_1, \ldots, B_m \in \mathbf{A}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, můžeme-li jeden z nich napsat jako lineární kombinaci ostatních. Dokažte.

1.9. Uspořádání na přímce a pojmy na něm založené

Z algebry je nám známa definice uspořádané množiny. Víme, že množina $\mathbf{M}$ je *uspořádaná*, jestliže je na ní definována binární relace $\leqq$ tak, že pro každé prvky $x, y, z \in \mathbf{M}$ platí

1. $x \leqq y$, $y \leqq x$ právě tehdy, je-li $x = y$,
2. když $x \leqq y$, $y \leqq z$, pak $x \leqq z$,
3. je buď $x \leqq y$ nebo $y \leqq x$.

Dále víme, že definujeme-li k danému uspořádání $\leqq$ množiny $\mathbf{M}$ relaci $\gtreqqless$ tak, že pro $x, y \in \mathbf{M}$ je $x \gtreqqless y$ právě tehdy, je-li $y \leqq x$, je relace $\gtreqqless$ opět uspořádání množiny $\mathbf{M}$ – uspořádání $\gtreqqless$ se nazývá *opačné* k uspořádání $\leqq$.

Poznámka 1. V tomto odstavci budeme využívat toho, že těleso reálných čísel je uspořádané. Proto ho není možné zobecnit tak, že bychom místo reálných čísel vzali libovolné těleso $\mathbf{T}$. Většinu dalších vyšetřování by však bylo možno dělat i pro jiná uspořádaná tělesa – např. pro těleso racionálních čísel. To se týká i následujících odstavců 1.10 a 1.11, v nichž se také využívá uspořádání tělesa reálných čísel.

Zvolíme-li na přímce $\mathbf{A}_1$ lineární soustavu souřadnic $\mathscr{S}$, můžeme na přímce $\mathbf{A}_1$ definovat relaci $\lesssim$ tak, že pro $X, Y \in \mathbf{A}_1$, $X = [x]$, $Y = [y]$, bude $X \lesssim Y$ právě tehdy, bude-li $x \leqq y$. Je zřejmé, že zavedená relace $\lesssim$ je uspořádání přímky $\mathbf{A}_1$.

Definice 1.9.1. Právě zavedené uspořádání $\lesssim$ přímky $\mathbf{A}_1$ nazýváme *uspořádání určené lineární soustavou souřadnic* $\mathscr{S}$. Je-li pro $X, Y \in \mathbf{A}_1$, $X \neq Y$ a $X \lesssim Y$, budeme říkat, že „X je před Y“ nebo že „Y je za X“, a budeme psát $X \prec Y$ nebo $Y \succ X$. Je-li pro $X, Y \in \mathbf{A}_1$ $X \lesssim Y$, bude zápis $Y \gtrsim X$ znamenat totéž a budeme říkat, že „X je rovno Y nebo X je před Y“, popřípadě že „X je rovno Y nebo Y je za X“.

Věta 1.9.1. Mějme na přímce $\mathbf{A}_1$ zvolenu lineární soustavu souřadnic $\mathscr{S}$ repérem $\langle P; \boldsymbol{u}\rangle$ a lineární soustavu souřadnic $\mathscr{S}'$ repérem $\langle Q; k\boldsymbol{u}\rangle$, kde $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$. Potom uspořádání určená lineárními soustavami souřadnic $\mathscr{S}$ a $\mathscr{S}'$ jsou stejná právě tehdy, je-li $k > 0$, a jsou opačná právě tehdy, je-li $k < 0$.

Důkaz. Buď $X, Y \in \mathbf{A}_1$, nechť v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{S}$, resp. $\mathscr{S}'$ je $X = [x]$, resp. $X = [x']$, tj. $X - P = x\boldsymbol{u}$, resp. $X - Q = x'k\boldsymbol{u}$. Označme $q \in \mathbf{R}$ číslo, pro nějž $Q - P = q\boldsymbol{u}$. Potom je

$$x\boldsymbol{u} = X - P = (X - Q) + (Q - P) = x'k\boldsymbol{u} + q\boldsymbol{u},$$

a tedy

$$x = q + kx'.$$

Podobně, je-li $Y = [y]$, resp. $Y = [y']$ v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, resp. $\mathscr{L}'$, je

$$y = q + ky'.$$

Jednoduchou úpravou snadno ověříme, že je-li $k > 0$, je $x \geqq y$, právě když $x' \geqq y'$, a je-li $k < 0$, je $x \geqq y$, právě když $x' \leqq y'$. Tím je tvrzení věty dokázáno.

Přímým důsledkem právě dokázané věty je následující věta.

Věta 1.9.2. Na přímce $\mathbf{A}_1$ existují právě dvě uspořádání určená lineární soustavou souřadnic a tato uspořádání jsou k sobě opačná.

Věta 1.9.3. Buď $A, B \in \mathbf{A}_1$, $A \neq B$. Potom existuje právě jedno uspořádání $\preceq$ přímky $\mathbf{A}_1$ určené lineární soustavou souřadnic, pro něž je $A \preceq B$.

Důkaz. Nechť ve zvolené lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ je $A = [a]$, $B = [b]$. Je-li $a \leqq b$, je uspořádání $\preceq$ určeno lineární soustavou souřadnic $\mathscr{L}$, je-li $a \geqq b$, je uspořádání $\preceq$ opačné k uspořádání určenému lineární soustavou souřadnic $\mathscr{L}$.

Definice 1.9.2. Buď $A, B \in \mathbf{A}_1$, buď $\preceq$ uspořádání přímky $\mathbf{A}_1$, pro něž je $A \preceq B$. Říkáme, že bod $C \in \mathbf{A}_1$ leží *mezi* body A, B, je-li $A \prec C \prec B$.

Následující věta je zřejmá.

Věta 1.9.4. Bod $C \in \mathbf{A}_1$ leží mezi body $A, B \in \mathbf{A}_1$ právě tehdy, leží-li bod C mezi body B, A.

Věta 1.9.5. Nechť $A, B, C \in \mathbf{A}_1$, $A \neq B$. Potom bod C leží mezi body A, B, právě když $(A, B; C) < 0$.

Důkaz. Nechť ve zvolené lineární soustavě souřadnic je $A = [a]$, $B = [b]$, $C = [c]$. Potom

$$(A, B; C) = (c - a)/(c - b).$$

Tudíž $(A, B; C) < 0$ právě tehdy, je-li buď $c - a > 0$ a $c - b < 0$, tj. $a < c < b$, nebo $c - a < 0$, $c - b > 0$, tj. $b < c < a$. Odtud již plyne dokazované tvrzení.

Poznámka 2. Z věty 1.9.5 vyplývá, že pojem „mezi" nezávisí na uspořádání.

Další vyšetřování budeme již provádět v n rozměrném afinním prostoru $\mathbf{A}_n$.

Definice 1.9.3. Buď $A, B \in \mathbf{A}_n$, $A \neq B$. *Úsečkou AB s koncovými body A, B* nazýváme množinu všech bodů X z přímky $\overleftrightarrow{AB}$, které leží mezi body A, B, sjednocenou s dvouprvkovou množinou $\{A, B\}$. Pro $A = B$ rozumíme *úsečkou AB* množinu $\{A\}$.

Pro úsečku nezavádíme tedy zvláštní symbol. Pokud použijeme označení AB bez bližšího slovního určení (přímka, úsečka atd.), bude to vždy označovat úsečku.

Věta 1.9.6. Buď $A, B \in \mathbf{A}_n$, $A \neq B$. Potom úsečka AB je množina právě těch bodů $X \in \mathbf{A}_n$, pro něž je

$$(1) \qquad X = A + x(B - A),$$

kde $0 \leqq x \leqq 1$.

Důkaz. Zvolíme-li na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ lineární soustavu souřadnic repérem $\langle A; B - A\rangle$, je pak $A = [0]$, $B = [1]$ a pro bod X daný vztahem (1) je $X = [x]$. Tvrzení nyní přímo plyne z definice 1.9.2 a 1.9.3.

Věta 1.9.7. Buď $\mathbf{A}'_{n-1}$ nadrovina v prostoru $\mathbf{A}_n$ se zaměřením $\mathbf{V}'_{n-1}$. Buď $\mathscr{R} = \langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\rangle$ repér v $\mathbf{A}_n$ zvolený tak, že $P \in \mathbf{A}'_{n-1}$, $\mathbf{V}'_{n-1} = [\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}\}]$, a nechť v $\mathbf{A}_n$ máme dánu lineární soustavu souřadnic repérem $\mathscr{R}$. Nechť $\sim$ je relace definovaná na množině $\mathbf{M} = \mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}'_{n-1}$ podmínkou: Pro $X, Y \in \mathbf{M}$ je $X \sim Y$, právě když $XY \cap \mathbf{A}'_{n-1} = \emptyset$. Potom pro $X, Y \in \mathbf{M}$, $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ platí: $X \sim Y$ právě tehdy, je-li $x_n y_n > 0$.

Důkaz. Pro $X = Y$ je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $X \neq Y$. Hledejme bod $Z = \overleftrightarrow{XY} \cap \mathbf{A}'_{n-1}$. Musí být $Z = X + z(Y - X)$ (aby bylo $Z \in \overleftrightarrow{XY}$), a píšeme-li $Z = [z_1, \ldots, z_n]$, musí ještě být $z_n = 0$ (aby bylo $Z \in \mathbf{A}'_{n-1}$). Avšak

$$z_n = x_n + z(y_n - x_n),$$

tedy musí být

$$0 = x_n + z(y_n - x_n).$$

Protože $x_n \neq 0$, musí být $z \neq 0$ a

$$1/z = (x_n - y_n)/x_n.$$

$Z \in XY$ právě tehdy, je-li $0 \leqq z \leqq 1$, tj. je-li $1/z \geqq 1$. To platí právě tehdy, je-li $(x_n - y_n)/x_n \geqq 1$, tj.

$$1 - y_n/x_n \geqq 1, \qquad \text{tj.} \qquad y_n/x_n \leqq 0.$$

Odtud dostaneme, že $XY \cap \mathbf{A}'_{n-1} \neq \emptyset$ právě tehdy, je-li $x_n y_n < 0$. Odtud již plyne tvrzení věty.

Množina $\mathbf{M}$ zavedená ve větě 1.9.7 se tedy rozpadne na dvě podmnožiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ tak, že $X \sim Y$ právě tehdy, leží-li body X, Y ve stejné množině z podmnožin $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$. Podmnožina $\mathbf{M}_1$ je např. tvořena všemi těmi body Z, pro něž platí $z_n > 0$, a potom podmnožina $\mathbf{M}_2$ je množina těch bodů $Z \in \mathbf{M}$, pro něž $z_n < 0$. Odtud již vyplývá, že zavedená relace $\sim$ je ekvivalence a $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ jsou třídy ekvivalence. Protože ekvivalence $\sim$ je definována bez pomoci soustavy souřadnic, nezávisí ani rozklad množiny $\mathbf{M}$ na podmnožiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ na volbě lineární soustavy souřadnic. Proto je oprávněná následující definice.

Definice 1.9.4. Buď $\mathbf{A}'_{n-1}$ nadrovina v prostoru $\mathbf{A}_n$. Třídy $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ ekvivalence $\sim$, která byla zavedena ve větě 1.9.7, nazýváme *otevřené poloprostory s hraniční nadrovinou* $\mathbf{A}'_{n-1}$. Množiny $\mathbf{A}'_{n-1} \cup \mathbf{M}_1$ a $\mathbf{A}'_{n-1} \cup \mathbf{M}_2$ nazýváme *uzavřené poloprostory s hraniční nadrovinou* $\mathbf{A}'_{n-1}$. Otevřený, resp. uzavřený poloprostor na přímce, popřípadě v rovině nazýváme *otevřená*, resp. *uzavřená polopřímka*, popřípadě *polorovina*.

Důsledek 1. Z věty 1.9.7 a jejího důkazu je patrné, že při volbě lineární soustavy souřadnic, popsané ve větě 1.9.7, jsou otevřené poloprostory s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ množiny

$$\{X \in \mathbf{A}_n ;\, x_n > 0\}, \qquad \{X \in \mathbf{A}_n ;\, x_n < 0\}$$

a uzavřené poloprostory s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ jsou množiny

$$\{X \in \mathbf{A}_n ;\, x_n \geqq 0\}, \qquad \{X \in \mathbf{A}_n ;\, x_n \leqq 0\}.$$

Z vlastností ekvivalence plyne následující důsledek.

Důsledek 2. Buď $\mathbf{A}'_{n-1}$ nadrovina v prostoru $\mathbf{A}_n$, buď $A \in \mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}'_{n-1}$. Potom množina všech bodů $X \in \mathbf{A}_n \setminus \mathbf{A}'_{n-1}$, pro něž platí, že mezi body X a A leží bod z nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$, je otevřený poloprostor s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ (je-li např. $A \in \mathbf{M}_1$, je uvažovaná množina poloprostor $\mathbf{M}_2$ a obráceně).

Také lze říci, že každý poloprostor je určen svou hraniční nadrovinou a podmínkou, aby daný bod B, neležící v hraniční nadrovině, ležel v tomto poloprostoru. Právě tak můžeme každý poloprostor určit hraniční nadrovinou a podmínkou, aby daný bod C neležící v hraniční nadrovině, v tomto poloprostoru neležel.

Poloprostor s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ můžeme též charakterizovat pomocí rovnice nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$.

Věta 1.9.8. Buď $\mathbf{A}'_{n-1}$ nadrovina o rovnici $\bar{f}(X) = 0$. Potom otevřené, resp. uzavřené poloprostory s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ jsou množiny

$$\{X \in \mathbf{A}_n ;\, \bar{f}(X) > 0\}, \qquad \{X \in \mathbf{A}_n ;\, \bar{f}(X) < 0\}, \tag{2}$$

resp.

$$\{X \in \mathbf{A}_n ;\, \bar{f}(X) \geqq 0\}, \qquad \{X \in \mathbf{A}_n ;\, \bar{f}(X) \leqq 0\}. \tag{3}$$

Důkaz. Nadrovina $\mathbf{A}'_{n-1}$ určuje lineární funkci jednoznačně až na nenulový násobek. Je zřejmé, že vezmeme-li místo lineární funkce $\bar{f}$ lineární funkci $c\bar{f}$, kde $c \neq 0$, nemění se ani dvojice množin (2), ani dvojice množin (3). Tvrzení věty tedy nezávisí na volbě lineární soustavy souřadnic, a můžeme je proto dokázat v libovolně zvolené lineární soustavě souřadnic. Zvolíme-li lineární soustavu souřadnic jako ve větě 1.9.7, můžeme položit $\bar{f}(X) = x_n$, a dokazované tvrzení tedy vyplývá z důsledku 1 věty 1.9.7.

Poznámka 3. Nadále budeme zkoumat jen uzavřené poloprostory, které budeme označovat obvyklým způsobem. Uzavřený poloprostor obsahující bod B a mající hraniční nadrovinu $\mathbf{A}'_{n-1}$ budeme označovat $\overrightarrow{\mathbf{A}'_{n-1}B}$. Polopřímku s hraničním bodem A ($\{A\}$ je nadrovina na přímce) obsahující bod B, budeme tedy označovat $\overrightarrow{AB}$ a polorovinu s hraniční přímkou $\overleftrightarrow{AB}$, obsahující bod C, budeme označovat $\overrightarrow{ABC}$. Obecně poloprostor v $\mathbf{A}_n$ s hraniční nadrovinou určenou body $A_1, \ldots, A_n$, který obsahuje bod B, budeme označovat $\overrightarrow{A_1A_2 \ldots A_nB}$.

Následující věta nám umožňuje charakterizovat poloprostor pomocí lineární kombinace bodů.

Věta 1.9.9. Mějme v $\mathbf{A}_n$ dán poloprostor $\overrightarrow{A_1A_2 \ldots A_nB}$. Potom je $X \in \overrightarrow{A_1 \ldots A_nB}$ právě tehdy, jestliže existují čísla $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbf{R}$ tak, že $x_{n+1} \geqq 0$, $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 1$ a

$$X = x_1A_1 + \ldots + x_nA_n + x_{n+1}B. \tag{4}$$

Důkaz. Zvolme v $\mathbf{A}_n$ repér $\mathscr{R} = \langle A_1 ; A_2 - A_1, \ldots, A_n - A_1, B - A_1 \rangle$. Máme-li bod X vyjádřen vztahem (4), má v lineární soustavě souřadnic určené repérem $\mathscr{R}$ souřadnice $X = [x_2, \ldots, x_{n+1}]$ (plyne z definice 1.8.1, zvolíme-li $A_1 = P$). Je též zřejmé, že obráceně každou n-tici $(x_2, \ldots, x_{n+1})$ můžeme právě jedním způsobem doplnit na $(n+1)$-tici $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, pro niž je $x_1 + \ldots + x_{n+1} = 1$. Tvrzení nyní již vyplývá z důsledku 1 věty 1.9.7.

Věta 1.9.10. Buď $\mathbf{M}$ poloprostor v prostoru $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{M} = \overrightarrow{\mathbf{A}'_{n-1}B}$. Buď dále $\mathbf{A}''_k$ podprostor prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom je buď $\mathbf{M} \cap \mathbf{A}''_k = \emptyset$, nebo $\mathbf{M} \cap \mathbf{A}''_k = \mathbf{A}''_k$, nebo $\mathbf{M} \cap \mathbf{A}''_k$ je poloprostor v podprostoru $\mathbf{A}''_k$. Přitom je $\mathbf{M} \cap \mathbf{A}''_k = \emptyset$ nebo $\mathbf{M} \cap \mathbf{A}''_k = \mathbf{A}''_k$ právě tehdy, je-li podprostor $\mathbf{A}''_k$ rovnoběžný s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$. Je-li $\mathbf{M} \cap \mathbf{A}''_k$ poloprostor v podprostoru $\mathbf{A}''_k$, je $\mathbf{A}'_{n-1} \cap \mathbf{A}''_k$ jeho hraniční nadrovina.

Důkaz. Podle věty 1.9.8 můžeme vyšetřovat poloprostor $\mathbf{M}$ jako množinu všech $X \in \mathbf{A}_n$ splňujících nerovnost $\bar{f}(X) \geqq 0$, kde $\bar{f}$ je nekonstantní lineární funkce na prostoru $\mathbf{A}_n$. Přitom nadrovina $\mathbf{A}'_{n-1}$ má rovnici $\bar{f}(X) = 0$. Snadno se přesvědčíme, že omezíme-li definiční obor funkce $\bar{f}$ na podprostor $\mathbf{A}''_k$, dostaneme lineární funkci na $\mathbf{A}''_k$. Píšeme-li totiž funkci $\bar{f}$ ve tvaru $\bar{f}(X) = f(X - P)$, kde $P \in \mathbf{A}_n$ (dokonce $P \in \mathbf{A}'_{n-1}$) a f je lineární forma na zaměření $\mathbf{V}_n$ prostoru $\mathbf{A}_n$ (viz definice 1.5.3), dostaneme pro $Q \in \mathbf{A}''_k$

$$\bar{f}(X) = f(X - Q) + f(Q - P).$$

Odtud plyne, že $\bar{f}'' = \bar{f} \mid \mathbf{A}''_k$ (funkce $\bar{f}$, jejíž definiční obor jsme omezili na $\mathbf{A}''_k$) je lineární funkce na $\mathbf{A}''_k$. Tato funkce bude konstantní právě tehdy, bude-li forma f

na zaměření $\mathbf{V}''_k$ podprostoru $\mathbf{A}''_k$ nulová, tj. bude-li podprostor $\mathbf{A}''_k$ rovnoběžný s nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ (nulová množina lineární formy f je zaměření nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$). Je-li funkce $\bar{f}''$ konstantní na prostoru $\mathbf{A}''_k$, tj. existuje $c \in \mathbf{R}$ tak, že $\bar{f}''(X) = c$ pro každé $X \in \mathbf{A}''_k$, je $\mathbf{A}''_k \subset \mathbf{M}$ právě tehdy, je-li $c \geqq 0$, a $\mathbf{A}''_k \cap \mathbf{M} = \emptyset$ právě tehdy, je-li $c < 0$. Je-li funkce $\bar{f}''$ nekonstantní, je $\mathbf{A}''_k \cap \mathbf{M} = \{X \in \mathbf{A}''_k, \bar{f}''(X) \geqq 0\}$, což je podprostor v $\mathbf{A}''_k$ s hraniční nadrovinou (opět v $\mathbf{A}''_k$) $\mathbf{A}''_k \cap \mathbf{A}'_{n-1}$. Tím je věta dokázána.

Uvedeme ještě známou definici opačného poloprostoru.

Definice 1.9.5. Mějme v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ dán poloprostor $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B}$. Nechť $B' \notin \overline{\mathbf{A}'_{n-1}B}$. Potom poloprostor $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B'}$ nazýváme *opačný poloprostor* k poloprostoru $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B}$.

Je zřejmé, že je-li poloprostor $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B'}$ opačný k poloprostoru $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B}$, je opět poloprostor $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B}$ opačný k poloprostoru $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B'}$. Říkáme též, že oba poloprostory jsou k sobě opačné. Vidíme, že platí

(5) $\quad \overline{\mathbf{A}'_{n-1}B} \cap \overline{\mathbf{A}'_{n-1}B'} = \mathbf{A}'_{n-1}$,

(6) $\quad \overline{\mathbf{A}'_{n-1}B} \cup \overline{\mathbf{A}'_{n-1}B'} = \mathbf{A}$

($\mathbf{A}$ je množina všech bodů prostoru $\mathbf{A}_n$).

Poznámka 4. Všimněme si, že zavádíme speciální označení $\overline{\mathbf{A}'_{n-1}B}$ jen pro uzavřený poloprostor. Pro otevřený poloprostor jsme žádné označení nezavedli. To jsme učinili proto, že budeme převážně vyšetřovat uzavřené poloprostory. I věty 1.9.9 a 1.9.10 jsme vyslovili jen pro uzavřené poloprostory (protože jsme použili zavedené označení), i když jsme tyto věty mohli též snadno zformulovat a dokázat i pro otevřené poloprostory. Abychom si zjednodušili vyjadřování, učiníme následující úmluvu: Pod slovem poloprostor (a tedy i polorovina, polopřímka) budeme v následujících odstavcích rozumět vždy uzavřený poloprostor. Pokud bychom výjimečně zkoumali otevřený poloprostor, bude to vždy výslovně uvedeno.

1.10. Úhly

Nejdříve budeme zkoumat průnik dvou poloprostorů. Budeme předpokládat, že se omezíme na zkoumání jen uzavřených poloprostorů. Buďte tedy $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$ dva různé poloprostory s hraničními nadrovinami $\mathbf{A}'_{n-1}$ a $\mathbf{A}''_{n-1}$. Potom mohou nastat tyto případy:

1. Nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ a $\mathbf{A}''_{n-1}$ jsou rovnoběžné.
2. Nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ a $\mathbf{A}''_{n-1}$ jsou různoběžné.

Nejdříve prozkoumáme první možnost. Nechť tedy nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ a $\mathbf{A}''_{n-1}$ jsou rovnoběžné. Zvolíme lineární soustavu souřadnic tak, aby bylo $\mathbf{M}' = \{X \in \mathbf{A};$

$x_n \geqq 0\}$ (je $X = [x_1, \ldots, x_n]$). Rovnice nadroviny $\mathbf{A}''_{n-1}$ je pak $x_n = c$ (obě nadroviny jsou rovnoběžné), a proto je buď

a) $\mathbf{M}'' = \{X \in \mathbf{A};\ x_n \geqq c\}$, nebo

b) $\mathbf{M}'' = \{X \in \mathbf{A};\ x_n \leqq c\}$.

V případě a) je $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' = \mathbf{M}'$, je-li $c \leqq 0$ a $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' = \mathbf{M}''$, je-li $c \geqq 0$.

V případě b) jsou tyto možnosti

b$_1$) $c < 0$, potom je $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' = \emptyset$,

b$_2$) $c = 0$, potom je $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' = \mathbf{A}'_{n-1} = \mathbf{A}''_{n-1}$,

b$_3$) $c > 0$, potom je $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' = \{X \in \mathbf{A};\ 0 \leqq x_n \leqq c\}$.

Přestože jsme provedli roztřídění průniků dvou poloprostorů s rovnoběžnými hraničními nadrovinami pomocí zvolené soustavy lineárních souřadnic, vidíme, že vzniklé roztřídění je na volbě této soustavy souřadnic nezávislé. V případech a), b$_1$), b$_2$) je množina $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}''$ popsána bez pomoci čísla c a případ b$_3$) je zbývající možnost.

Definice 1.10.1. Mějme dány uzavřené poloprostory $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$. Jsou-li jejich hraniční nadroviny rovnoběžné a pro poloprostory $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$ nastává případ b$_3$) (viz výše), nazýváme množinu $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}''$ *vrstva*. Jsou-li hraniční nadroviny poloprostorů $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$ různoběžné, nazýváme množinu $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}''$ *klín*. Pro $n = 2$ nazýváme vrstvu *pásem* a klín *dutým úhlem*.

Poznámka 1. Jako speciální případ prováděných zkoumání dostáváme i roztřídění vzájemných poloh polopřímek na dané přímce. Průnikem dvou polopřímek na dané přímce tedy může být buď množina prázdná, nebo jedna z polopřímek, nebo jednobodová množina – společný hraniční bod obou polopřímek (jsou-li polopřímky k sobě opačné), nebo vrstva – což na přímce zřejmě je uzavřená úsečka.

Nadále se budeme zabývat úhly, a budeme proto předpokládat, že všechna zkoumání provádíme v dané afinní rovině $\mathbf{A}_2$.

Definice 1.10.2. Mějme v afinní rovině dán dutý úhel α jako průnik polorovin $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$ s hraničními přímkami po řadě p' a p''. Polopřímky $p' \cap \mathbf{M}''$ a $p'' \cap \mathbf{M}'$ nazýváme *ramena úhlu* α, bod $p' \cap p''$ nazýváme *vrchol úhlu* α.

Je vidět, že definice 1.10.2 je oprávněná. Podle věty 1.9.10 jsou totiž množiny $p' \cap \mathbf{M}''$ a $p'' \cap \mathbf{M}'$ skutečně polopřímky.

Věta 1.10.1. Mějme v rovině $\mathbf{A}_2$ dán dutý úhel α. Buď P jeho vrchol a $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ jeho ramena. Potom je

$$\alpha = \{X = x_1P + x_2A + x_3B;\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R},\ x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0\}.$$

Důkaz. Označme $\mathbf{M}' = \overline{PAB}$, $\mathbf{M}'' = \overline{PBA}$. Potom je zřejmě $\alpha = \mathbf{M}' \cap \mathbf{M}''$. Tvrzení nyní již vyplývá z věty 1.9.9.

Z předchozí věty vyplývá, že každý dutý úhel je určen svými rameny. Potom můžeme používat běžné označení – dutý úhel o vrcholu P a ramenech $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ budeme označovat buď symbolem $\sphericalangle APB$, nebo symbolem $\sphericalangle BPA$.

Věta 1.10.2. Buď $\alpha = \sphericalangle APB$. Potom je $X \in \alpha$ právě tehdy, je-li buď $X = P$, nebo $X \neq P$ a $\overline{PX} \cap AB \neq \emptyset$.

Důkaz. Je-li $X \neq P$ a $X \in \alpha$, je

(1) $$X = \bar{x}_1 P + \bar{x}_2 A + \bar{x}_3 B, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathbf{R}, \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = 1,$$
$$\bar{x}_2 \geqq 0, \bar{x}_3 \geqq 0, \bar{x}_2 + \bar{x}_3 > 0$$

a podle věty 1.8.3 můžeme psát

$$X = \bar{x}_1 P + (\bar{x}_2 + \bar{x}_3)\left(\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2 + \bar{x}_3} A + \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2 + \bar{x}_3} B\right).$$

Označíme-li

$$C = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2 + \bar{x}_3} A + \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_2 + \bar{x}_3} B,$$

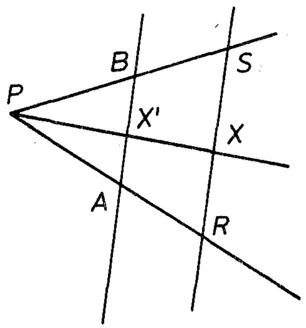
je podle věty 1.9.9 $X \in \overline{PC}$ a $C \in AB$, a tedy i $C \in \overline{PX}$ a $C = \overline{PX} \cap AB$. Je-li obráceně $\overline{PX} \cap AB \neq \emptyset$ a $C = \overline{PX} \cap AB$, je i $X \in \overline{PC}$ a

$$C = \bar{c}_1 A + \bar{c}_2 B, \bar{c}_1, \bar{c}_2 \in \mathbf{R}, \bar{c}_1 + \bar{c}_2 = 1, \bar{c}_1 \geqq 0, \bar{c}_2 \geqq 0,$$
$$X = \bar{\bar{x}}_1 P + \bar{\bar{x}}_2 C, \bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2 \in \mathbf{R}, \bar{\bar{x}}_1 + \bar{\bar{x}}_2 = 1, \bar{\bar{x}}_2 \geqq 0.$$

Tudíž

$$X = \bar{\bar{x}}_1 P + \bar{\bar{x}}_2(\bar{c}_1 A + \bar{c}_2 B).$$

Upravíme-li tuto rovnost podle věty 1.8.3, dostáváme, že (viz věta 1.10.1) $X \in \alpha$. Tím je věta dokázána.



Obr. 6

Názorně můžeme říci, že úhel je sjednocení všech polopřímek majících počátek ve vrcholu úhlu a protínajících úsečku s koncovými body na obou ramenech úhlu – viz obr. 6.

Poznámka 2. Snadno bychom se mohli přesvědčit, že obráceně, máme-li v rovině dány tři body P, A, B neležící na přímce, tvoří množina všech bodů X, pro něž $\overline{PX} \cap AB \neq \emptyset$, úhel. Tento úhel má vrchol v bodě P. Jeho rameny jsou polopřímky $\overline{PA}$, $\overline{PB}$. Z věty 1.10.2 je také zřejmé, že je-li pro daný úhel α: $X \in \alpha$ a $X \neq P$, je $\overline{PX} \subset \alpha$.

Následující věta je vlastně jen modifikací právě dokázané věty.

Věta 1.10.3. Buď $\alpha = \sphericalangle APB$. Potom je $X \in \alpha$ právě tehdy, když existují body $R \in \overline{PA}$, $S \in \overline{PB}$ tak, že $X \in RS$.

Důkaz. Postup můžeme sledovat na obr. 6. Je-li $R \in \overline{PA}$, $S \in \overline{PB}$, $X \in RS$, snadno dokážeme, že je $X \in \alpha$: V případě, že $R \neq P \neq S$, je zřejmě $\sphericalangle RPS = \sphericalangle APB$ a $X \in \alpha$ podle předchozí věty. I případ $R = P$, nebo $S = P$ je jednoduchý. Nechť obráceně $X \in \alpha$ a nechť $X \neq P$. Potom podle předešlé věty je $\overline{PX} \cap AB = X'$. Máme $X - P = c(X' - P)$, přičemž $c > 0$. Provedeme-li stejnolehlost f o středu P a koeficientu c, dostáváme zřejmě $X' = f(X)$. Označíme-li nyní $R = f(A)$, $S = f(B)$, je $R \in \overline{PA}$, $S \in \overline{PB}$ (je $c > 0$) a $X' \in RS$.

Věta 1.10.4. Průnikem dutého úhlu a přímky je buď množina prázdná, nebo uzavřená polopřímka, nebo jednobodová množina, nebo uzavřená úsečka. Přitom každý hraniční bod průniku (hraničním bodem jednobodové množiny $\{X\}$ je bod X) je průsečíkem dané přímky s některým ramenem úhlu.

Důkaz. Daný úhel α napíšeme jako průnik polorovin $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$. Je-li p přímka, můžeme psát

$$\alpha \cap p = \mathbf{M}' \cap \mathbf{M}'' \cap p = (\mathbf{M}' \cap p) \cap (\mathbf{M}'' \cap p).$$

Tvrzení nyní vyplývá z věty 1.9.10 a poznámky k definici 1.10.1.

Snadno se můžeme přesvědčit, že průnikem úsečky a polopřímky na dané přímce je buď množina prázdná, nebo jednobodová, nebo opět úsečka. Nyní z dokazované věty vyplývá následující důsledek.

Důsledek. Úsečka AB protíná úhel α buď v množině prázdné, nebo v úsečce, nebo v množině jednobodové.

Zatím jsme vyšetřovali jen tzv. duté úhly. Ze střední školy však známe ještě úhly přímé a vypuklé. Tyto úhly zavedeme i v afinní rovině.

Definice 1.10.3. *Přímý úhel* v afinní rovině je polorovina. Tvoří-li přímý úhel α polorovina $\overline{ABC}$, nazýváme *vrcholem úhlu* α každý bod přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a *rameny úhlu* α, *příslušejícími k vrcholu* $V \in \overleftrightarrow{AB}$, nazýváme opačné polopřímky obsažené v přímce $\overleftrightarrow{AB}$ a mající hraniční bod V.

Na rozdíl od dutého úhlu má tedy přímý úhel celou přímku vrcholů a ke každému vrcholu přísluší dvě ramena. Úhly duté a přímé se též nazývají *konvexní úhly*.

Definice 1.10.4. Mějme v afinní rovině dány dvě poloroviny $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ s různoběžnými hraničními přímkami. Množinu $\mathbf{M} \cup \mathbf{M}'$ nazýváme *vypuklý úhel*. Polopřímky opačné k ramenům úhlu $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$ nazýváme *ramena úhlu* $\mathbf{M} \cup \mathbf{M}'$.

Vypuklé úhly se též nazývají *nekonvexní úhly*. Sjednocením množiny všech konvexních úhlů s množinou všech nekonvexních úhlů dostaneme množinu všech úhlů. Následující věta bude charakterizovat vypuklé úhly pomocí dutých úhlů.

Věta 1.10.5. Buď $\alpha = \mathbf{M} \cup \mathbf{M}'$ ($\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ dvě poloroviny v afinní rovině) vypuklý úhel. Označme $\bar{\mathbf{M}}$, resp. $\bar{\mathbf{M}}'$ polorovinu opačnou k polorovině $\mathbf{M}$, resp. $\mathbf{M}'$, a potom položme $\bar{\alpha} = \bar{\mathbf{M}} \cap \bar{\mathbf{M}}'$ ($\bar{\alpha}$ je dutý úhel). Potom platí: α, $\bar{\alpha}$ mají společná ramena – označme je p, q, $\alpha \cup \bar{\alpha} = \mathbf{A}$ (množina všech bodů prostoru $\mathbf{A}_n$) a $\alpha \cap \bar{\alpha} = p \cup q$.

Důkaz. Tvrzení snadno dokážeme z množinových vlastností, ze vzorců (5), (6) z odstavce 1.9 a z věty 1.9.10. Podrobnější provedení důkazu ponecháme jako cvičení.

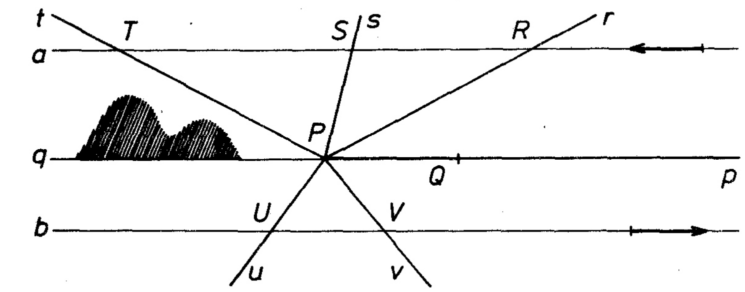
Tuto větu můžeme snadno obrátit. Důkaz obrácené věty je rovněž snadný – opět ho ponecháme jako cvičení.

Věta 1.10.6. Mějme dán dutý úhel $\beta = \mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}'_1$ ($\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}'_1$ jsou dvě poloroviny). Označíme-li $\bar{\mathbf{M}}_1$, resp. $\bar{\mathbf{M}}'_1$ polorovinu opačnou k polorovině $\mathbf{M}_1$, resp. $\mathbf{M}'_1$, je $\bar{\beta} = \bar{\mathbf{M}}_1 \cup \bar{\mathbf{M}}'_1$ vypuklý úhel, a položíme-li $\bar{\beta} = \alpha$ a sestrojíme-li k úhlu α úhel $\bar{\alpha}$ podle věty 1.10.5, je $\bar{\alpha} = \beta$.

Vidíme, že k tomu, abychom k úhlu α z věty 1.10.5 sestrojili úhel $\bar{\alpha}$, nepotřebujeme vyjadřovat úhel α jako průnik dvou polorovin. Stačí totiž položit $\bar{\alpha} = (\mathbf{A} \setminus \alpha) \cup p \cup q$. Podobně je (viz věta 1.10.6) $\bar{\beta} = (\mathbf{A} \setminus \beta) \cup p \cup q$.

Víme, že ve fyzikální rovině můžeme úhly názorně zavést ještě jinak: Vezmeme polopřímku s hraničním bodem P a tuto polopřímku otáčíme kolem bodu P. Vezmeme nyní část roviny, kterou polopřímka projde mezi dvěma zvolenými krajními polohami, a tuto část roviny nazveme úhlem. Tento způsob zavedení úhlu má tu výhodu, že najednou zavedeme všechny úhly – úhel dutý, přímý a vypuklý (nekonvexní). Provedeme-li „nulové“ otočení, dostaneme i úhel nulový. Tuto metodu použitou ve fyzikální rovině zobecníme i do afinního prostoru. Pojem otáčení však nemůžeme použít. Tento pojem není v afinní rovině definován. Můžeme však na množině všech polopřímek s hraničním bodem P definovat uspořádání tak, aby ve fyzikální rovině bylo dáno otáčením, tzn., aby polopřímka p byla před polopřímkou q tehdy, jestliže při otáčení otáčející se polopřímka nejdříve projde polopřímkou p, a potom teprve polopřímkou q. Toto uspořádání nyní zavedeme. Postup můžeme sledovat na obr. 7.

Zvolme v $\mathbf{A}_2$ polopřímku p s hraničním bodem P. Nechť q je přímka obsahující polopřímku p. Z dvou polorovin majících hraniční přímku q nyní zvolíme jednu – označme ji $\mathbf{M}$ (na obr. 7 je vyznačena náznakem šrafování), opačnou polorovinu budeme označovat $\bar{\mathbf{M}}$. Dále označme $\mathbf{M}_p$ množinu všech polopřímek v rovině $\mathbf{A}_2$,



Obr. 7

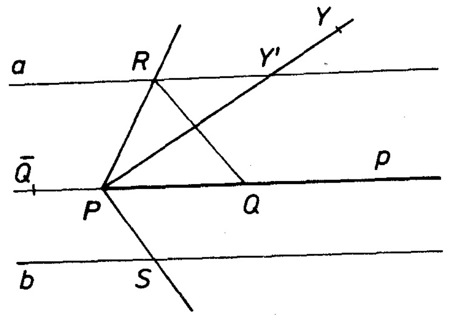
které mají hraniční bod P a nerovnají se polopřímce p. Na množině $\mathbf{M}_p$ budeme definovat slíbené uspořádání – pro jeho označení použijeme stejný symbol $\leqq$, který jsme v odstavci 1.9 použili pro uspořádání bodů na přímce. Pro každou polopřímku $x \in \mathbf{M}_p$ platí, že je buď $x \subset \mathbf{M}$, nebo $x \subset \bar{\mathbf{M}}$. Právě jen pro polopřímku $\bar{p}$ opačnou k polopřímce p platí $\bar{p} \subset \mathbf{M} \cap \bar{\mathbf{M}}$, $\bar{p} \in \mathbf{M}_p$. Označme $\mathbf{M}_{p_1} = \{x \in \mathbf{M}_p;\ x \neq \bar{p},\ x \subset \mathbf{M}\}$, $\mathbf{M}_{p_2} = \{x \in \mathbf{M}_p;\ x \neq \bar{p},\ x \subset \bar{\mathbf{M}}\}$. Zvolme nyní přímky a, b rovnoběžné s přímkou q tak, aby $a \neq q \neq b$, a aby $a \subset \mathbf{M}$, $b \subset \bar{\mathbf{M}}$. Potom zřejmě každá polopřímka z množiny $\mathbf{M}_{p_1}$ protne přímku a (a neprotne přímku b), a každá polopřímka z množiny $\mathbf{M}_{p_2}$ protne přímku b (a neprotne přímku a). Tudíž každou polopřímku $x \in \mathbf{M}_p$, $x \neq \bar{p}$ můžeme psát ve tvaru $x = \overrightarrow{PX}$, přičemž je buď $X \in a$, nebo $X \in b$. Obráceně zřejmě pro $X \in a$ je $\overrightarrow{PX} \in \mathbf{M}_{p_1}$, a pro $X \in b$ je $\overrightarrow{PX} \in \mathbf{M}_{p_2}$. Nechť $p = \overrightarrow{PQ}$, označme $\mathbf{w} = Q - P$. Zvolme na přímce a uspořádání určené vektorem $-\mathbf{w}$ a na přímce b uspořádání určené vektorem $\mathbf{w}$ (obě uspořádání budeme označovat symbolem $\leqq$). Je-li nyní $x, y \in \mathbf{M}_p$, definujeme

1. pro $x, y \in \mathbf{M}_{p_1}, x = \overrightarrow{PX}, y = \overrightarrow{PY}$, kde $X, Y \in a$, je $x \leqq y$ právě tehdy, je-li $X \leqq Y$,
2. pro $x = \bar{p}$, $y \in \mathbf{M}_{p_1}$ je $y \leqq x$,
3. pro $x \in \mathbf{M}_{p_2}$, $y \in \mathbf{M}_{p_1}$ je $y \leqq x$,
4. pro $x \in \mathbf{M}_{p_2}$, $y = \bar{p}$ je $y \leqq x$,
5. pro $x, y \in \mathbf{M}_{p_2}, x = \overrightarrow{PX}, y = \overrightarrow{PY}$, kde $X, Y \in b$, je $x \leqq y$ právě tehdy, je-li $X \leqq Y$.

Tím je uspořádání na množině $\mathbf{M}_p$ již definováno. Stručně můžeme toto uspořádání popsat tak, že všechny polopřímky z $\mathbf{M}_{p_1}$ jsou před polopřímkou $\bar{p}$ a ta je před všemi polopřímkami z $\mathbf{M}_{p_2}$ a v množinách $\mathbf{M}_{p_1}$ a $\mathbf{M}_{p_2}$ je uspořádání určeno uspořádáním na přímkách a, b. Tak např. pro polopřímky vyznačené na obr. 7 je $r \leqq s \leqq t \leqq \bar{p} \leqq u \leqq v$.

Snadno se lze přesvědčit, že sestrojené uspořádání $\leqq$ na množině $\mathbf{M}_p$ závisí jen na volbě poloroviny $\mathbf{M}$ a nikoli na volbě přímek a, b, tzn. že vezmeme-li např. místo přímky $a \subset \mathbf{M}$ jinou přímku $a_1 \subset \mathbf{M}$ (samozřejmě $a_1 \neq q$), dostaneme na množině $\mathbf{M}_{p_1}$ stejné uspořádání. Toto tvrzení dokážeme například tak, že provedeme stejnolehlost φ o středu P tak, aby bylo $\varphi(a) = a_1$. Nyní pro $X, Y \in a$ je $\varphi(X) - \varphi(Y) = k(X - Y)$ (viz odstavec 1.6) a $k > 0$ (protože $\varphi(X) \in \overrightarrow{PX}$). Tudíž

$\varphi(X) \leqq \varphi(Y)$ právě tehdy, je-li $X \leqq Y$. Odtud vyplývá, že množinu $\mathbf{M}_p$ můžeme popsaným způsobem uspořádat právě dvěma způsoby. Jedno uspořádání je to, které jsme dostali, druhé uspořádání bychom dostali analogicky, kdybychom místo poloroviny $\mathbf{M}$ vzali polorovinu $\bar{\mathbf{M}}$. Obě tato uspořádání jsou zřejmě k sobě opačná. Označení, které jsme v průběhu konstrukce uspořádání $\leqq$ zavedli, budeme používat i nadále.



Obr. 8

Nyní budeme charakterizovat úhly (konvexní i nekonvexní) pomocí zavedeného uspořádání. Tvrzení i důkaz následující věty můžeme sledovat na obr. 8.

Věta 1.10.7. Buď $R \in a$, $S \in b$, $\bar{Q} \in \bar{p}$, $\bar{Q} \neq P$. Potom pro $Y \neq P$, $Y \in \mathbf{A}_2$ platí

1. $Y \in \sphericalangle QPR$ právě tehdy, je-li buď $\overrightarrow{PY} = p$, nebo $\overrightarrow{PY} \leqq \overrightarrow{PR}$,
2. $Y \in \sphericalangle RP\bar{Q}$ právě tehdy, je-li $\overrightarrow{PR} \leqq \overrightarrow{PY} \leqq \bar{p}$,
3. $Y \in \sphericalangle \bar{Q}PS$ právě tehdy, je-li $\overrightarrow{P\bar{Q}} \leqq \overrightarrow{PY} \leqq \overrightarrow{PS}$,
4. $Y \in \sphericalangle SPQ$ právě tehdy, je-li buď $\overrightarrow{PS} \leqq \overrightarrow{PY}$, nebo $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PQ}$.

Přitom p, $\bar{p}$, P, Q, a, b mají dříve zavedený význam.

Důkaz. Důkaz všech čtyř tvrzení je téměř stejný. Dokážeme proto jen tvrzení 1. Důkaz ostatních tvrzení ponecháme jako cvičení. Zvolíme v $\mathbf{A}_2$ lineární soustavu souřadnic repérem $\langle P; Q - P, R - P\rangle$. Potom $P = [0, 0]$, $Q = [1, 0]$, $R = [0, 1]$ a přímka a má rovnici $y = 1$. Víme, že $Y \in \sphericalangle QPR$ právě tehdy, je-li $\overrightarrow{PY} \cap QR \neq \emptyset$ (viz věta 1.10.2). Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že to platí právě tehdy, je-li $y_1 \geqq 0$ a $y_2 \geqq 0$ $(Y = [y_1, y_2])$. Je-li $\overrightarrow{PY} \neq \overrightarrow{PQ}$, určíme souřadnice průsečíku Y' přímek a a $\overleftrightarrow{PY}$. Dostaneme $Y' = [y_1/y_2, 1]$. Je $Y - P = y_2(Y' - P)$. Tudíž, aby bylo $\overrightarrow{PY} = \overrightarrow{PY'}$, musí být $y_2 > 0$, a aby bylo $\overrightarrow{PY} \leqq \overrightarrow{PR}$, musí na přímce a být $Y' \leqq R$ (při uspořádání daném vektorem $P - Q$), což bude platit právě tehdy, bude-li $y_1/y_2 \geqq 0$. Odtud již plyne tvrzení.

Věta 1.10.8. Mějme dán úhel α o ramenech r, s a o vrcholu P. Buď p polopřímka s hraničním bodem P, pro niž platí $p \not\subset \alpha$. Nechť při uspořádání $\leqq$ na množině $\mathbf{M}_p$ je např. $r \leqq s$. Potom pro $Y \in \mathbf{A}_2$, $Y \neq P$, je $Y \in \alpha$ právě tehdy, je-li

$$r \leqq \overrightarrow{PY} \leqq s.$$

Důkaz. Jestliže $r = \bar{p}$, nebo $s = \bar{p}$, je věta 1.10.8 vlastně větou 1.10.7. Nechť tedy $r \neq \bar{p}$ a $s \neq \bar{p}$. Víme, že můžeme psát $r = \overrightarrow{PR}$ a $s = \overrightarrow{PS}$, kde $R \in a$, nebo $R \in b$ a $S \in a$, nebo $S \in b$. Další důkaz rozdělíme na tři případy.

I. Nechť α je dutý úhel. Potom mohou nastat možnosti

a) $R, S \in a$. Tvrzení nyní vyplývá ze zavedení uspořádání $\leqq$ a z věty 1.10.2.

b) $R \in a$, $S \in b$. Potom zřejmě existuje bod T tak, že $\{T\} = RS \cap \overleftrightarrow{PQ}$. Nemůže být $T \in p$, protože $T \neq P$ (úhel α je dutý), a protože $p \not\subset \alpha$, tudíž $T \in \bar{p}$. Z věty 1.10.2 snadno dokážeme, že $\alpha = \sphericalangle RPT \cup \sphericalangle TPS$. Tvrzení nyní již vyplývá z věty 1.10.7.

c) $R, S \in b$. Případ je zcela analogický případu a).

II. Nechť α je přímý úhel. Zadáme-li soustavu souřadnic repérem $\langle P; Q - P, R - P\rangle$ (viz též důkaz věty 1.10.7), snadno zjistíme, že $Y \in \alpha$ $(Y = [y_1, y_2])$ právě tehdy, je-li $y_1 \leqq 0$. Odtud dostaneme (zvolíme-li $\bar{Q} \in \bar{p}$, $\bar{Q} \neq P$), že $\alpha = \sphericalangle RP\bar{Q} \cup \sphericalangle \bar{Q}PS$. Tvrzení nyní již vyplývá z věty 1.10.7.

III. Nechť α je vypuklý úhel. Potom musí zřejmě být $R \in a$, $S \in b$ a $RS \cap p \neq \emptyset$. Protože $Q \in p$, $Q \neq P$, byl libovolný bod, můžeme předpokládat, že $\{Q\} = RS \cap p$. Z věty 1.10.7 nyní plyne (viz též případ I.b)), že $Y \in \sphericalangle RPS$ právě tehdy, je-li buď $\overrightarrow{PY} = p$, nebo $\overrightarrow{PY} \leqq \overrightarrow{PR}$, nebo $\overrightarrow{PS} \leqq \overrightarrow{PY}$. Zřejmě je-li $\bar{\alpha}$ úhel sestrojený k úhlu α ve větě 1.10.5, je $\bar{\alpha} = \sphericalangle RPS$. Odtud již plyne tvrzení.

Právě dokázanou větu je možné snadno obrátit. To činí následující věta.

Věta 1.10.9. Buď p polopřímka v $\mathbf{A}_2$. Buďte dále $r, s \in \mathbf{M}_p$, $r \neq s$, a nechť např. $r \leqq s$. Potom sjednocení všech polopřímek $x \in \mathbf{M}_p$, pro něž platí $r \leqq x \leqq s$, je úhel.

Důkaz. Zřejmě existuje právě jeden úhel α o ramenech r, s, který neobsahuje polopřímku p (viz věty 1.10.5 a 1.10.6). Podle věty 1.10.8 je to hledaný úhel.

Věty 1.10.8 a 1.10.9 nám charakterizují úhly pomocí uspořádání na množině $\mathbf{M}_p$. Kdybychom ve větě 1.10.9 vynechali předpoklad $r \neq s$, množina, kterou bychom obdrželi, by byla tvořena jedinou polopřímkou r. Je účelné tento případ nevylučovat a i polopřímku brát jako zvláštní případ úhlu.

Definice 1.10.5. Polopřímku r v afinní rovině $\mathbf{A}_2$ nazýváme *nulový úhel*, její hraniční bod nazýváme *vrchol* tohoto *úhlu* a zároveň polopřímku r nazýváme *rameno* tohoto *úhlu*.

Nulový úhel má jen jedno rameno. Z charakterizace úhlu pomocí uspořádání v množině $\mathbf{M}_p$ je zřejmé, že by se dalo též říci, že nulový úhel má dvě splývající ramena. Nulový úhel budeme počítat mezi úhly konvexní.

Věta 1.10.10. Buďte α, β dva úhly v rovině $\mathbf{A}_2$, které mají společný vrchol P a polopřímku $\overrightarrow{PY}$. Potom je buď $\alpha \cup \beta = \mathbf{A}$ (množina všech bodů roviny $\mathbf{A}_2$), nebo $\alpha \cup \beta$ je úhel s vrcholem P a každé jeho rameno je buď ramenem úhlu α, nebo úhlu β. V druhém případě je též $\alpha \cap \beta$ úhel s vrcholem P a každé jeho rameno je buď ramenem úhlu α, nebo je ramenem úhlu β.

Důkaz. Nechť nenastává případ $\alpha \cup \beta = \mathbf{A}$. Potom existuje polopřímka p s hraničním bodem P, pro niž platí $p \not\subset \alpha \cup \beta$. Buďte r, s ramena úhlu α a u, v ramena úhlu β. Nechť při zavedeném uspořádání na množině $\mathbf{M}_p$ je např. $r \preceq s$, $u \preceq v$. Je $r \preceq \overrightarrow{PY} \preceq s$, $u \preceq \overrightarrow{PY} \preceq v$. Tudíž $r \preceq v$, $u \preceq s$. Buď $Z \in \mathbf{A}_2$, $Z \neq P$. Protože $Z \in \alpha$, právě když $r \preceq \overrightarrow{PZ} \preceq s$, a $Z \in \beta$, právě když $u \preceq \overrightarrow{PZ} \preceq v$, zřejmě platí $Z \in \alpha \cup \beta$, právě když $\min(r, u) \preceq \overrightarrow{PZ} \preceq \max(s, v)$, a $Z \in \alpha \cap \beta$, právě když $\max(r, u) \preceq \overrightarrow{PZ} \preceq \min(s, v)$. Co je minimum a maximum dvou prvků uspořádané množiny, je známo z algebry. Tím je věta dokázána.

Úplnou indukcí se z věty 1.10.10 snadno dokáže následující tvrzení.

Důsledek. Mějme v rovině $\mathbf{A}_2$ dány úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Nechť všechny mají vrchol P a nechť úhel α_i má s úhlem α_{i+1} společnou polopřímku s hraničním bodem P, $i = 1, \ldots, k-1$. Potom $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$ je buď množina $\mathbf{A}$, nebo je to úhel v $\mathbf{A}_2$.

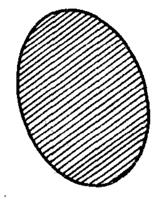
Poznámka 3. Všechna tvrzení, která byla v tomto odstavci uvedena, se zdají být na první pohled zřejmá. Musíme si však uvědomit, že musíme postupovat zcela deduktivně jen z tvrzení, která jsme již odvodili, a nesmíme se při důkazech opírat o názor. Proto je důležité, aby každý všechna tvrzení, která byla ponechána na dokázání čtenáři, skutečně dokázal a nespokojil se s namalováním obrázku.

1.11. Konvexní množiny

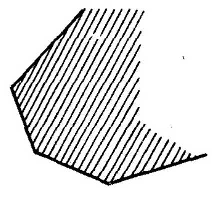
Konvexní množiny, které budeme v tomto odstavci vyšetřovat, jsou přirozeným zobecněním vypuklých (konvexních) k-úhelníků v rovině. Jejich definice je názorná a snadno pochopitelná. Opět si musíme však uvědomit, že při dokazování vět o konvexních množinách musíme postupovat (stejně jako dříve) přísně deduktivně, přestože některá tvrzení budou zdánlivě zcela zřejmá a jejich důkaz se bude zdát zbytečný.

Definice 1.11.1. Množinu $\mathbf{M}$ bodů z prostoru $\mathbf{A}_n$ nazýváme *konvexní množina*, jestliže platí: Je-li $X, Y \in \mathbf{M}$, je i $XY \subset \mathbf{M}$.

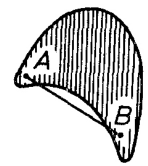
Tedy množina $\mathbf{M}$ je konvexní, obsahuje-li s každými dvěma body i úsečku, která je spojuje. Jak je vidět, prázdná množina je konvexní. Konvexní množinou je také každá jednobodová množina a množina $\mathbf{A}$ všech bodů prostoru $\mathbf{A}_n$. Další příklady konvexních množin jsou na obrázcích 9 a 10, zatímco na obrázcích 11 a 12 jsou



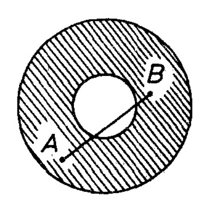
Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

množiny, které konvexní nejsou – v těchto případech je na obrázku vždy vyznačena úsečka, jejíž krajní body do množiny patří, a která není celá částí dané množiny.

Snadno můžeme zjistit všechny konvexní množiny na přímce.

Věta 1.11.1. Každá konvexní množina na přímce je buď celá přímka, nebo otevřená polopřímka, nebo uzavřená polopřímka, nebo úsečka, nebo úsečka bez jednoho nebo bez obou krajních bodů, nebo množina prázdná.

Důkaz. Buď $\mathbf{M}$ konvexní množina na přímce $\mathbf{A}_1$. Je-li množina $\mathbf{M}$ neprázdná, zvolme na přímce lineární soustavu souřadnic. Označme $\mathbf{M}'$ množinu souřadnic všech bodů z množiny $\mathbf{M}$ (je $\mathbf{M}' \subset \mathbf{R}$). Dále označme $a = \inf \mathbf{M}'$, $b = \sup \mathbf{M}'$. Snadno se přesvědčíme, že pro $x \in (a, b)$ je $[x] \in \mathbf{M}$. Nyní pro $a = -\infty$, $b = +\infty$ dostaneme, že $\mathbf{M}$ je přímka, pro $a = -\infty$, $b \neq +\infty$ nebo $a \neq -\infty$, $b = +\infty$ dostaneme, že $\mathbf{M}$ je polopřímka (otevřená nebo uzavřená podle toho, je-li $[b] \in \mathbf{M}$ – v prvním případě, nebo $[a] \in \mathbf{M}$ – v druhém případě). Pro $a \neq -\infty$, $b \neq +\infty$ dostaneme, že $\mathbf{M}$ je úsečka popřípadě bez některého krajního bodu, nebo úsečka bez obou krajních bodů. Podrobnější provedení důkazu je možné ponechat jako cvičení.

Následující věta je zřejmá – vyplývá přímo z definice konvexní množiny a z definice průniku množin.

Věta 1.11.2. Průnik libovolné množiny konvexních množin je konvexní množina.

Speciálním příkladem konvexní množiny je podprostor afinního prostoru. Jako důsledek věty 1.11.2 tedy dostáváme, že podprostor protíná konvexní množinu opět v konvexní množině. Speciálně podle věty 1.11.1 dostáváme, že přímka může protnout konvexní množinu buď v celé přímce (tj. přímka je v uvažované konvexní množině obsažena), nebo v polopřímce (otevřené nebo uzavřené), nebo v úsečce, nebo v prázdné množině. Snadno též vyšetříme průniky jednoduchých konvexních množin, které již známe. Zvolíme-li na přímce $\mathbf{A}_1$ lineární soustavu souřadnic, můžeme snadno každou polopřímku i každou úsečku zapsat pomocí nerovnic. Jednoduchým vyřešením soustavy několika nerovnic určíme průnik každých dvou konvexních množin na přímce. Např. průnikem úsečky s jinou konvexní množinou může být jen úsečka (popřípadě bez jednoho nebo bez obou krajních bodů), nebo množina prázdná.

Věta 1.11.3. Buďte $A, B \in \mathbf{A}_1$. Potom je

$AB = \{X = x_1 A + x_2 B; x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1 + x_2 = 1, x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0\}$.

Důkaz. Tvrzení vyplývá z věty 1.9.9.

Věta 1.11.4. Buď $\mathbf{M}$ konvexní množina v prostoru $\mathbf{A}_n$. Nechť $B_1, \ldots, B_k \in \mathbf{M}$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ buďte nezáporná čísla, pro něž $c_1 + \ldots + c_k = 1$. Potom $c_1 B_1 + \ldots + c_k B_k \in \mathbf{M}$.

Důkaz. Důkaz provedeme úplnou indukcí podle k.

1. $k = 1$. Tvrzení je v tomto případě triviální, protože musí být $c_1 = 1$ a $c_1 B_1 = B_1$. Tvrzení je dokonce zřejmé i pro $k = 2$ (v tomto případě plyne z věty 1.11.3 a z definice 1.11.1).

2. Nechť nyní tvrzení platí pro číslo $k - 1$, kde $k \geqq 2$. Dokazujme je pro číslo k. Jestliže je $c_k = 1$, plyne z nezápornosti čísel $c_1, \ldots, c_k$ a z vlastnosti $c_1 + \ldots + c_k = 1$, že musí být $c_1 = \ldots = c_k = 0$. V tomto případě je $c_1 B_1 + \ldots + c_k B_k = B_k \in \mathbf{M}$. Jestliže $c_k \neq 1$ (tj. $c_k < 1$), je $c_1 + \ldots + c_{k-1} \neq 0$. Označme $c_1 + \ldots + c_{k-1} = d$. Protože $c_k < 1$, je $d > 0$. Položme $B_0 = (c_1/d) B_1 + \ldots + (c_{k-1}/d) B_{k-1}$. Podle věty 1.8.3 je

$$\sum_{i=1}^{k} c_i B_i = dB_0 + c_k B_k.$$

Podle indukčního předpokladu je $B_0 \in \mathbf{M}$ a podle bodu 1 pro $k = 2$ je $dB_0 + c_k B_k \in \mathbf{M}$. Tím je věta dokázána.

Definice 1.11.2. Buď $\mathbf{M} \subset \mathbf{A}_n$ libovolná množina. Průnik všech konvexních množin obsahujících množinu $\mathbf{M}$ nazýváme *konvexní obal množiny* $\mathbf{M}$ a označujeme ho symbolem $K(\mathbf{M})$.

Je zřejmé, že máme-li dány dvě množiny $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ a je $\mathbf{M} \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{A}_n$, je také $K(\mathbf{M}) \subset K(\mathbf{N})$.

Věta 1.11.5. Buď $\mathbf{M} \subset \mathbf{A}_n$. Potom je $X \in K(\mathbf{M})$ právě tehdy, jestliže existují body $B_1, \ldots, B_k \in \mathbf{M}$ a čísla $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{R}$ tak, že $x_i \geqq 0, i = 1, \ldots, k, x_1 + \ldots + x_k = 1$ a $X = x_1 B_1 + \ldots + x_k B_k$.

Důkaz. Označme $\mathbf{M}'$ množinu všech bodů $X \in \mathbf{A}_n$, které lze psát jako lineární kombinaci bodů z množiny $\mathbf{M}$ s nezápornými koeficienty. Dokazujeme, že $\mathbf{M}' = K(\mathbf{M})$. Nejdříve dokážeme, že $\mathbf{M}'$ je konvexní. Buď $B_1, \ldots, B_r, C_1, \ldots, C_s \in \mathbf{M}'$,

$$X = x_1 B_1 + \ldots + x_r B_r,$$
$$Y = y_1 C_1 + \ldots + y_s C_s,$$

přičemž $x_i \geqq 0, i = 1, \ldots, r, y_j \geqq 0, j = 1, \ldots, s, x_1 + \ldots + x_r = 1, y_1 + \ldots + y_s = 1$. Buď $Z \in XY$, potom podle věty 1.11.3 existují čísla $z_1, z_2 \in \mathbf{R}$ tak, že $z_i \geqq 0$, $i = 1, 2$ a $z_1 + z_2 = 1$ a $Z = z_1 X + z_2 Y$. Avšak podle věty 1.8.3 je $z_1 X + z_2 Y = z_1 x_1 B_1 + \ldots + z_1 x_r B_r + z_2 y_1 C_1 + \ldots + z_2 y_s C_s$, a tudíž $Z \in \mathbf{M}'$. Množina $\mathbf{M}'$

je tedy konvexní. Je-li nyní $\mathbf{M}_1$ libovolná konvexní množina obsahující množinu $\mathbf{M}$, je podle věty 1.11.4 $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}_1$. Tudíž je $\mathbf{M}' = K(\mathbf{M})$.

Definice 1.11.3. Konvexní množinu $\mathbf{M}'$ v prostoru $\mathbf{A}_n$ nazýváme *konvexní mnohostěn* v prostoru $\mathbf{A}_n$, jestliže existuje konečná množina $\mathbf{M} \subset \mathbf{A}_n$ tak, že $\mathbf{M}' = K(\mathbf{M})$. Konvexní obal $n + 1$ lineárně nezávislých bodů v $\mathbf{A}_n$ se nazývá *simplex*. Simplex v rovině se nazývá *trojúhelník*, simplex v trojrozměrném prostoru se nazývá *čtyřstěn*. Konvexní mnohostěn v rovině nazýváme *konvexní mnohoúhelník*.

Jak nám ukáže následující věta, na přímce jsou konvexní mnohostěny velmi jednoduché.

Věta 1.11.6. Konvexní mnohostěn na přímce je uzavřená úsečka.

Důkaz. Mějme konečnou množinu $\mathbf{M}$ tvořenou body $B_1, \ldots, B_k \in \mathbf{A}_1$. Zvolme na přímce lineární soustavu souřadnic. Nechť v této soustavě souřadnic je $B_i = [b_i]$, $i = 1, \ldots, k$. Nechť B_r je bod s nejmenší souřadnicí a B_s je bod s největší souřadnicí, $1 \leqq r \leqq k$, $1 \leqq s \leqq k$. Zřejmě $B_i \in B_r B_s$, $i = 1, \ldots, k$, a tudíž $K(\mathbf{M}) = B_r B_s$.

Věta 1.11.7. Průnik konvexního mnohostěnu v prostoru $\mathbf{A}_n$ s nadrovinou je buď množina prázdná, nebo konvexní mnohostěn.

Důkaz. Buď $\mathbf{M}$ konečná množina, $\mathbf{M} \subset \mathbf{A}_n$. Mějme dánu nadrovinu $\mathbf{A}'_{n-1} \subset \mathbf{A}_n$. Označme $\mathbf{M}_1$ množinu těch bodů X z nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$, pro něž platí: Buď je $X \in \mathbf{M}$, nebo X je průsečíkem úsečky, mající koncové body v množině $\mathbf{M} \setminus \mathbf{A}'_{n-1}$, s nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$. Je vidět, že množina $\mathbf{M}_1$ je prázdná právě tehdy, leží-li množina $\mathbf{M}$ v jednom otevřeném poloprostoru s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$. V tomto případě leží v tomto poloprostoru i konvexní obal $K(\mathbf{M})$ množiny $\mathbf{M}$, a tedy $K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1} = \emptyset$. Nechť tedy nadále $\mathbf{M}_1 \neq \emptyset$. Protože úseček majících koncové body v množině $\mathbf{M}$ je nejvýše konečný počet a protože každá úsečka, jejíž alespoň jeden koncový bod neleží v nadrovině $\mathbf{A}'_{n-1}$, nám tuto nadrovinu protne v nejvýše jednom bodě, je množina $\mathbf{M}_1$ konečná. Dokážeme, že $K(\mathbf{M}_1) = K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1}$. Zřejmě $\mathbf{M}_1 \subset K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1}$. Množina $K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1}$ je konvexní, a tudíž $K(\mathbf{M}_1) \subset K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1}$. Zbývá tedy dokázat, že je i $K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1} \subset K(\mathbf{M}_1)$. Označme $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M} \cup \mathbf{M}_1$. $\mathbf{M} \subset \mathbf{M}_2 \subset K(\mathbf{M})$, a tedy $K(\mathbf{M}) \subset K(\mathbf{M}_2) \subset K(\mathbf{M})$, to znamená $K(\mathbf{M}_2) = K(\mathbf{M})$. Buď nyní $X \in K(\mathbf{M}) \cap \mathbf{A}'_{n-1}$. Potom bod X můžeme napsat jako lineární kombinaci bodů z množiny $\mathbf{M}_2$. Ze všech takových lineárních kombinací vybereme tu, v níž se vyskytuje nejmenší počet bodů z množiny $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M} \setminus \mathbf{M}_1$, u nichž jsou nenulové koeficienty (v množině $\mathbf{M}_3$ jsou tedy právě ty body z množiny $\mathbf{M}$, které neleží v nadrovině $\mathbf{A}'_{n-1}$). Buď

$$\begin{aligned} &X = b_1 B_1 + \ldots + b_r B_r + c_1 C_1 + \ldots + c_s C_s, \\ (1) \quad &b_1 + \ldots + b_r + c_1 + \ldots + c_s = 1, \\ &b_i \geqq 0, i = 1, \ldots, r, c_j > 0, j = 1, \ldots, s, \end{aligned}$$

kde $B_1, \dots, B_r \in \mathbf{M}_1$ a $C_1, \dots, C_s \in \mathbf{M}_3$, taková lineární kombinace. Dokážeme, že musí být $s = 0$, tj. že bod X je lineární kombinací jen bodů z množiny $\mathbf{M}_1$. Důkaz provedeme sporem. Nechť $s \neq 0$. Označme $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ otevřené poloprostory s hraniční nadrovinou $\mathbf{A}'_{n-1}$ (samozřejmě různé, říká se též opačné). Kdyby byly všechny body $C_1, \dots, C_s$ ve stejném poloprostoru (z těchto dvou), byl by v tomto poloprostoru i bod X. Toto tvrzení vyplývá z vět 1.8.7 a 1.9.9. Nechť tedy např. $C_1 \in \mathbf{M}'$ a $C_2 \in \mathbf{M}''$. Označme $D = (c_1/(c_1 + c_2))\, C_1 + (c_2/(c_1 + c_2))\, C_2$, $E = C_1C_2 \cap \mathbf{A}'_{n-1}$ (jelikož body C_1, C_2 leží v různých poloprostorech, je $C_1C_2 \cap \mathbf{A}'_{n-1} \neq \emptyset$ – viz věta 1.9.7). Platí $D \in C_1C_2$ a $C_1C_2 = C_1E \cup EC_2$. Tudíž je buď $D \in C_1E$, nebo $D \in EC_2$. Nechť např. $D \in C_1E$, potom můžeme psát $D = d_1C_1 + d_2E$ a podle věty 1.8.3 je $X = b_1B_1 + \dots + b_rB_r + (c_1 + c_2)\, D + c_3C_3 + \dots + c_sC_s$, a tedy

$$X = b_1B_1 + \dots + b_rB_r + (c_1 + c_2)\, d_2E + (c_1 + c_2)\, d_1C_1 + c_3C_3 + \dots + c_sC_s.$$

To je však spor, neboť $E \in \mathbf{M}_1$ a v obdrženém vyjádření je o jeden bod z množiny $\mathbf{M}_3$ méně, než bylo ve vyjádření (1). Případ $D \in C_2E$ je stejný. Tím je věta dokázána.

Jak bylo ukázáno v odstavci 1.5, můžeme každý podprostor dostat jako průnik konečného počtu nadrovin. Z právě dokázané věty 1.11.7 tedy okamžitě vyplývá následující důsledek.

Důsledek. Průnik konvexního mnohostěnu v prostoru $\mathbf{A}_n$ s podprostorem prostoru $\mathbf{A}_n$ je buď množina prázdná, nebo konvexní mnohostěn.

Definice 1.11.4. Buď $\mathbf{M}$ konečná množina bodů v prostoru $\mathbf{A}_n$. Bod $A \in \mathbf{M}$ nazýváme *vrchol konvexního mnohostěnu* $K(\mathbf{M})$, jestliže $A \notin K(\mathbf{M} \setminus \{A\})$.

Nyní se budeme snažit dokázat, že množina vrcholů konvexního mnohostěnu je již určena tímto mnohostěnem a nezávisí na množině $\mathbf{M}$. Tzn. budeme dokazovat, že je-li pro dvě konečné množiny $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ $K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}')$, pak množina vrcholů, kterou dostaneme z množiny $\mathbf{M}$, bude stejná jako množina vrcholů, kterou dostaneme z množiny $\mathbf{M}'$. Dále dokážeme, že každý konvexní mnohostěn je konvexním obalem své množiny vrcholů. K důkazu těchto tvrzení použijeme jednoduchou konstrukci konvexního obalu konečné množiny, kterou nám umožní následující věta.

Věta 1.11.8. Buď $\mathbf{B}$ neprázdná konvexní množina v prostoru $\mathbf{A}_n$. Buď $C \in \mathbf{A}_n$. Potom

$$K(\mathbf{B} \cup \{C\}) = \bigcup_{X \in \mathbf{B}} CX.$$

Důkaz. Poznamenejme, že pravá strana dokazované rovnosti označuje sjednocení všech úseček CX, kde $X \in \mathbf{B}$. Z definice 1.11.1 vyplývá, že pro každý bod $X \in \mathbf{B}$ je $CX \subset K(\mathbf{B} \cup \{C\})$, a tudíž je i

$$\bigcup_{X \in \mathbf{B}} CX \subset K(\mathbf{B} \cup \{C\}).$$

Nechť obráceně $Y \in K(\mathbf{B} \cup \{C\})$. Potom podle věty 1.11.5 existují body $B_1, \dots, B_k \in \mathbf{B}$ a čísla $y_1, \dots, y_{k+1} \in \mathbf{R}$ tak, že $y_i \geqq 0$, $i = 1, \dots, k + 1$, $y_1 + \dots + y_{k+1} = 1$ a

$$Y = y_1B_1 + \dots + y_kB_k + y_{k+1}C.$$

Označíme-li $c = y_1 + \dots + y_k$, je $c \neq 0$ pro $Y \neq C$. Tudíž pro $Y \neq C$ dostáváme podle věty 1.8.3

$$Y = c((y_1/c)\, B_1 + \dots + (y_k/c)\, B_k) + y_{k+1}C.$$

Nyní stačí položit $X = (y_1/c)\, B_1 + \dots + (y_k/c)\, B_k$ a vidíme, že $Y \in CX$.

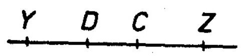
Právě dokázaná věta nám umožňuje snadno sestrojit konvexní obal konečné množiny bodů. Je-li množina $\mathbf{M}$ konečná, např. $\mathbf{M} = \{B_1, \dots, B_k\}$, můžeme sestrojit konečnou posloupnost množin $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_k$ tak, že položíme $\mathbf{M}_1 = \{B_1\}$, $\mathbf{M}_2 = B_1B_2$ atd. Obecně klademe

$$\mathbf{M}_i = \bigcup_{X \in \mathbf{M}_{i-1}} B_iX, \qquad i = 2, \dots, k.$$

Potom dostaneme $\mathbf{M}_k = K(\mathbf{M})$.

Věta 1.11.9. Buď $\mathbf{B}$ neprázdná konvexní množina v prostoru $\mathbf{A}_n$, buď $C \in \mathbf{A}_n$. Nechť $C \notin \mathbf{B}$ a nechť dále $D \in K(\mathbf{B} \cup \{C\})$ a $D \neq C$. Potom $C \notin K(\mathbf{B} \cup \{D\})$.

Důkaz. Podle věty 1.11.8 existuje bod $Y \in \mathbf{B}$ tak, že $D \in CY$. Důkaz dále děláme sporem. Nechť tedy $C \in K(\mathbf{B} \cup \{D\})$. Potom existuje $Z \in \mathbf{B}$ tak, že $C \in ZD$. Situaci vidíme na obr. 13. Je zřejmé, že musí být $C \in YZ$, a tedy $C \in \mathbf{B}$, což je spor. To, že $C \in YZ$, je zřejmé nejen z obr. 13 (stačí na přímce $\overleftrightarrow{CD}$ zvolit uspořádání a zadat vztahy $C \in ZD$ a $D \in CY$ pomocí nerovností).



Obr. 13

Při dalším odvozování nám přijdou vhod tři jednoduchá tvrzení. Pro každé dvě množiny $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ bodů z $\mathbf{A}_n$ platí

(2) $\qquad \mathbf{M}' \subset K(\mathbf{M}'') \Rightarrow K(\mathbf{M}') \subset K(\mathbf{M}'')$,

(3) $\qquad \mathbf{M}' \subset \mathbf{M}'' \Rightarrow K(\mathbf{M}') \subset K(\mathbf{M}'')$,

(4) $\qquad \mathbf{M}' \subset K(\mathbf{M}'')$ a $\mathbf{M}'' \subset K(\mathbf{M}') \Rightarrow K(\mathbf{M}') = K(\mathbf{M}'')$.

Tvrzení (2) plyne přímo z definice 1.11.1, tvrzení (3) a (4) plynou z tvrzení (2).

Nyní dokážeme slíbená tvrzení o množině vrcholů konvexního mnohostěnu. Než tato tvrzení dokážeme, musíme předpokládat, že množina vrcholů konvexního mnohostěnu $K(\mathbf{M})$ ($\mathbf{M}$ je neprázdná a konečná) závisí nejen na tomto mnohostěnu, ale i na množině $\mathbf{M}$. Označme tedy $\mathbf{M}_v$ množinu vrcholů mnohostěnu $K(\mathbf{M})$, kterou dostaneme z množiny $\mathbf{M}$. Tedy $X \in \mathbf{M}_v$ právě tehdy, je-li

(5) $\qquad X \in \mathbf{M} \quad \text{a} \quad X \notin K(\mathbf{M} \setminus \{X\})$.

Buď R bod, pro nějž

(6) $\qquad R \in \mathbf{M} \quad \text{a} \quad R \in K(\mathbf{M} \setminus \{R\})$.

Označíme $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M} \setminus \{R\}$ a budeme dokazovat, že $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_{1v}$. Ze (4) a (6) plyne, že $K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}_1)$. Nechť nyní $X \in \mathbf{M}_v$. Dokazujeme, že i $X \in \mathbf{M}_{1v}$. Z (3) vyplývá, že

(7) $\qquad K(\mathbf{M} \setminus \{X\}) \supset K(\mathbf{M}_1 \setminus \{X\})$.

Protože $R \neq X$ (plyne z (5), (6)), dostáváme z (5) a (7)

(8) $\qquad X \in \mathbf{M}_1 \quad \text{a} \quad X \notin K(\mathbf{M}_1 \setminus \{X\})$,

a tedy $X \in \mathbf{M}_{1v}$ a $\mathbf{M}_v \subset \mathbf{M}_{1v}$. Nechť nyní obráceně $X \in \mathbf{M}_{1v}$, tj. platí (8). Použijeme větu 1.11.9. Přitom v ní položíme $\mathbf{B} = K(\mathbf{M}_1 \setminus \{X\})$, $C = X$, $D = R$. Ověříme, že jsou splněny potřebné předpoklady. Zřejmě $C \notin \mathbf{B}$ (viz (8)) a také $C \neq D$ (tj. $X \neq R$). To plyne z (2) a (2'). Kdyby bylo $\mathbf{M}_1 \setminus \{X\} = \emptyset$, dostali bychom postupně $\mathbf{M}_1 = \{X\}$ (je $X \in \mathbf{M}_1$), $K(\mathbf{M}_1) = \{X\}$, $K(\mathbf{M}) = \{X\}$, $R = X$, což není možné. Tudíž $\mathbf{M}_1 \setminus \{X\} \neq \emptyset$, a tedy $\mathbf{B} \neq \emptyset$. Zbývá ověřit, že označíme-li $\mathbf{S} = K((K(\mathbf{M}_1) \setminus \{X\}) \cup \{X\})$, je $R \in \mathbf{S}$. To však plyne z toho, že $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{S}$, a že $K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}_1)$. Podle (2) a (6) je $R \in K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}_1) \subset \mathbf{S}$. Tudíž všechny předpoklady věty 1.11.9 jsou splněny, a proto

(9) $\qquad X \notin K(K(\mathbf{M}_1 \setminus \{X\}) \cup \{R\})$.

Zřejmě $\mathbf{M} \setminus \{X\} \subset K(\mathbf{M}_1 \setminus \{X\}) \cup \{R\}$, a tudíž z tvrzení (3) plyne (5), a proto $X \in \mathbf{M}_v$. Tím jsme dokázali, že skutečně platí $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_{1v}$. Nyní budeme zjišťovat, zda existuje bod $R_1 \in \mathbf{M}_1$ tak, že $R_1 \in K(\mathbf{M}_1 \setminus \{R_1\})$. Jestliže ano, sestrojíme množinu $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1 \setminus \{R_1\}$. Stejným postupem pokračujeme dál, až po konečném počtu kroků dostaneme množinu $\mathbf{M}_i$, pro kterou bude platit, že pro každé $X \in \mathbf{M}_i$, $X \notin K(\mathbf{M}_i \setminus \{X\})$. Bude tedy platit $\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{iv}$. Avšak víme, že $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_{1v}$, a proto i $\mathbf{M}_{1v} = \mathbf{M}_{2v}$ atd. Odtud plyne, že $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_{iv}$, a tedy $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_i$. Protože $K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}_1)$, je i $K(\mathbf{M}_1) = K(\mathbf{M}_2)$ atd. Odtud dostaneme $K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}_i)$, a tedy $K(\mathbf{M}) = K(\mathbf{M}_v)$. Buď nyní $\mathbf{M}' \subsetneqq \mathbf{M}$ taková podmnožina, že $K(\mathbf{M}') = K(\mathbf{M})$. Potom můžeme psát $\mathbf{M} \setminus \mathbf{M}' = \{T_1, \dots, T_k\}$. Nyní můžeme položit $\mathbf{M}'_1 = \mathbf{M} \setminus \{T_1\}$, $\mathbf{M}'_2 = \mathbf{M}_1 \setminus \{T_2\}$, ..., $\mathbf{M}'_k = \mathbf{M}'_{k-1} \setminus \{T_k\}$. Zřejmě $\mathbf{M}'_k = \mathbf{M}'$. Z rovnosti $K(\mathbf{M}') = K(\mathbf{M})$ plyne, že $T_j \in K(\mathbf{M}_{j-1} \setminus \{T_j\})$, a tudíž opět podle dříve dokázané rovnosti $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}_{1v}$ dostáváme, že $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}'_v$. Jsou-li nyní $\mathbf{M}'$ a $\mathbf{M}''$ dvě libovolné neprázdné konečné množiny, pro které platí $K(\mathbf{M}') = K(\mathbf{M}'')$, tak položíme-li $\mathbf{M} = \mathbf{M}' \cup \mathbf{M}''$, dostáváme podle právě dokázaného tvrzení, že $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}'_v$ a $\mathbf{M}_v = \mathbf{M}''_v$. Získané výsledky shrneme do následující věty.

Věta 1.11.10. Buďte $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}''$ dvě neprázdné konečné množiny, pro které platí $K(\mathbf{M}') = K(\mathbf{M}'')$. Potom platí $\mathbf{M}'_v = \mathbf{M}''_v$, tj. množina vrcholů konvexního mnohostěnu je dána tímto mnohostěnem a nezávisí na množině $\mathbf{M}'$. Dále platí $K(\mathbf{M}'_v) = K(\mathbf{M}')$.

Také můžeme říci, že množina vrcholů konvexního mnohostěnu $\mathbf{C}$ je nejmenší množina, jejímž konvexním obalem je daný konvexní mnohostěn a jež je obsažena v každé množině $\mathbf{M}$, pro kterou platí $K(\mathbf{M}) = \mathbf{C}$.

Na závěr odstavce uveďme ještě jednu zajímavou větu a její zobecnění. V rovině se tato věta nazývá Hellyova věta.

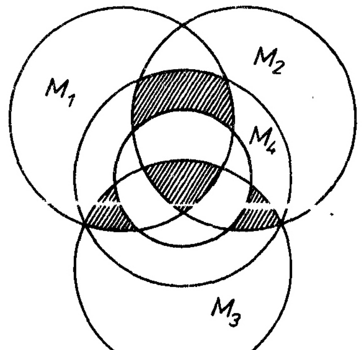
Věta 1.11.11. Mějme v prostoru $\mathbf{A}_n$ dáno $n + 2$ konvexních množin $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{n+2}$. Nechť každých $n + 1$ množin z množin $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{n+2}$ má neprázdný průnik. Potom všechny množiny $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_{n+2}$ mají neprázdný průnik.

Důkaz. Buď $A_i \in \mathbf{M}_1 \cap \dots \cap \mathbf{M}_{i-1} \cap \mathbf{M}_{i+1} \cap \dots \cap \mathbf{M}_{n+2}$ pro $i = 1, \dots, n + 2$. Dostali jsme $n + 2$ bodů $A_1, \dots, A_{n+2}$. Těchto $n + 2$ bodů musí být lineárně závislých, tj. existuje $c_1, \dots, c_{n+2} \in \mathbf{R}$ tak, že $c_1 + \dots + c_{n+2} = 0$, alespoň jeden koeficient c_j je nenulový a

(10) $\qquad c_1 A_1 + \dots + c_{n+2} A_{n+2} = \mathbf{o}$.

Z koeficientů $c_1, \dots, c_{n+2}$ je alespoň jeden kladný a alespoň jeden záporný (je $c_1 + \dots + c_{n+2} = 0$). Buďte $i_1, \dots, i_r$ ta čísla z čísel $1, \dots, n + 2$, pro něž $c_{i_k} \geq 0$, $k = 1, \dots, r$, a buďte $j_1, \dots, j_s$ ta čísla z čísel $1, \dots, n + 2$, pro něž $c_{j_k} < 0$, $k = 1, \dots, s$ (zřejmě musí být $r + s = n + 2$). Položme $d = c_{i_1} + \dots + c_{i_r}$. Zřejmě $d > 0$ a také $d = -c_{j_1} - \dots - c_{j_s}$. Vztah (10) můžeme podle věty 1.8.4 upravit na tvar

$$(c_{i_1}/d)\, A_{i_1} + \dots + (c_{i_r}/d)\, A_{i_r} = -(c_{j_1}/d)\, A_{j_1} - \dots - (c_{j_s}/d)\, A_{j_s}.$$



Obr. 14

Každý bod A_k je ve všech množinách $\mathbf{M}_t$, $t = 1, \ldots, n + 2$ kromě množiny $\mathbf{M}_k$. Tudíž $A_{i_p} \in \mathbf{M}_{j_q}$ pro $p = 1, \ldots, r$, $q = 1, \ldots, s$. Označíme-li $B = (c_{i_1}/d) A_{i_1} + \ldots + (c_{i_r}/d) A_{i_r}$, je tedy $B \in \mathbf{M}_{j_q}$, $q = 1, \ldots, s$ (neboť množiny $\mathbf{M}_{j_q}$ jsou konvexní – viz věta 1.11.4). Podobně zjistíme, že je i $B \in \mathbf{M}_{i_p}$, $p = 1, \ldots, r$. Tudíž $B \in \mathbf{M}_1 \cap \ldots \cap \mathbf{M}_{n+2}$. Tím je věta dokázána.

V rovině tedy platí, že máme-li dány čtyři konvexní množiny, z nichž každé tři mají neprázdný průnik, mají všechny čtyři množiny neprázdný průnik. Že nemůžeme vynechat předpoklad konvexnosti množin, je patrné z obr. 14, na němž jsou množiny $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_4$ zvoleny jako tři kruhy a jedno mezikruží. Vyšrafovány jsou průniky všech trojic množin.

Větu 1.11.11 můžeme snadno zobecnit.

Věta 1.11.12. Mějme v prostoru $\mathbf{A}_n$ dáno m konvexních množin $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_m$, kde $m \geqq n + 2$. Nechť každých $n + 1$ množin z množin $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_m$ má neprázdný průnik. Potom všechny množiny $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_m$ mají neprázdný průnik.

Důkaz. Větu dokazujeme úplnou indukcí podle m:

1. Pro $m = n + 2$ věta platí (věta 1.11.11).

2. Nechť věta platí pro číslo m, dokazujeme ji pro číslo $m + 1$. Mějme tedy množiny $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_{m+1}$. Označme $\mathbf{M}'_m = \mathbf{M}_m \cap \mathbf{M}_{m+1}$. Snadno se přesvědčíme, že každých $n + 1$ množin z množin $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_{m-1}, \mathbf{M}'_m$ má neprázdný průnik. V případě, že v $(n + 1)$-tici množin není obsažena množina $\mathbf{M}'_m$, to plyne přímo z předpokladů věty, v případě, že je v ní obsažena množina $\mathbf{M}'_m$ (např. $(n + 1)$-tice $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n, \mathbf{M}'_m$), dokážeme to z věty 1.11.11 (v uvedeném příkladu ji použijeme na množiny $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n, \mathbf{M}_m, \mathbf{M}_{m+1}$). Nyní již tvrzení vyplývá z indukčního předpokladu.

Cvičení.

1. Najděte v rovině konvexní množinu $\mathbf{M}$, pro niž platí: Existují přímky p_1, p_2, p_3, p_4 tak, že $p_1 \subset \mathbf{M}$, $p_2 \cap \mathbf{M}$ je uzavřená polopřímka, $p_3 \cap \mathbf{M}$ je otevřená polopřímka a $p_4 \cap \mathbf{M}$ je uzavřená úsečka.
2. Dokažte: Neexistuje konvexní množina $\mathbf{M}$ splňující podmínky cvičení 1, pro niž navíc existuje přímka p_5 tak, že $p_5 \neq p_4$ a $p_5 \cap \mathbf{M}$ je úsečka a přímka p_6 tak, že $p_6 \neq p_2$ a $p_6 \cap \mathbf{M}$ je uzavřená polopřímka.

1.12. Transformace lineární soustavy souřadnic

Může se stát, že v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ máme dány dvě lineární soustavy souřadnic. Budeme znát souřadnice bodu $X \in \mathbf{A}_n$ v jedné lineární soustavě souřadnic a budeme chtít vypočítat souřadnice téhož bodu v druhé lineární soustavě souřadnic. Než k tomu přistoupíme, vyšetříme analogický problém

ve vektorovém prostoru, tj. vyšetříme, jak se změní souřadnice daného vektoru ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$, změníme-li bázi vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$. Tato část (týkající se vektorových prostorů) je vlastně opakováním látky z algebry. Celý tento odstavec by šel, tak jako odstavce 1.1 – 1.8, snadno zobecnit tak, že bychom místo tělesa reálných čísel $\mathbf{R}$ vzali libovolné těleso $\mathbf{T}$.

Mějme ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ dány dvě báze $\mathscr{B} = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ a $\mathscr{B}' = \langle \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n \rangle$. Potom můžeme vektory jedné z nich vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů druhé báze. Např. můžeme psát

$$(1) \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{u}'_1 &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{12}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{1n}\boldsymbol{u}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{u}'_n &= a_{n1}\boldsymbol{u}_1 + a_{n2}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{u}_n, \end{aligned}$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$ pro $i, j = 1, \ldots, n$. Koeficienty a_{ij} tvoří matici

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots\ldots, a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Získanou matici budeme nazývat *matice přechodu* od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\mathscr{B}'$ a budeme ji označovat symbolem $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$. Matice $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ je zřejmě regulární. Mějme nyní dánu ještě třetí bázi $\mathscr{B}'' = \langle \boldsymbol{u}''_1, \ldots, \boldsymbol{u}''_n \rangle$. Můžeme psát

$$(2) \qquad \boldsymbol{u}''_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\boldsymbol{u}'_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Matice $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}'', \mathscr{B}')$ je matice tvořená prvky a'_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Dosadíme-li do vztahů (2) ze vztahů (1), vypočítáme snadno matici $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}'', \mathscr{B})$:

$$\boldsymbol{u}''_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\boldsymbol{u}_k,$$

tudíž

$$(3) \qquad \boldsymbol{u}''_i = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}a_{jk}\right) \boldsymbol{u}_k.$$

Označíme-li tedy b_{ik} prvky matice přechodu od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\mathscr{B}''$, tj. píšeme-li

$$\boldsymbol{u}''_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\boldsymbol{u}_k,$$

dostáváme srovnáním se vztahy (3), že musí být

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}a_{jk}.$$

Podle definice násobení matic tedy je

(4) $$\mathbf{M}(\mathscr{B}'', \mathscr{B}) = \mathbf{M}(\mathscr{B}'', \mathscr{B}')\,\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B}).$$

Snadno můžeme určit matici $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B})$. Zřejmě je

(5) $$\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}) = \mathbf{E},$$

přičemž $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Položíme-li ve vztahu (4) $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}$, dostáváme

(6) $$\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')\,\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = \mathbf{E},$$

neboli matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$ a $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ jsou k sobě inverzní.

Libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n$ můžeme vyjádřit pomocí souřadnic v každé bázi prostoru $\mathbf{V}_n$. Píšeme

(7) $$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n,$$

(8) $$\mathbf{x} = x'_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{u}'_n.$$

Označme $\bar{a}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$ prvky matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$, tj.

(9) $$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\mathbf{u}'_j, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dosadíme-li nyní do vztahu (7) ze vztahů (9), dostáváme

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}\mathbf{u}'_j.$$

Tudíž

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_i\right)\mathbf{u}'_j.$$

Srovnáme-li obdržené vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ s vyjádřením (8), musí být (souřadnice vektoru v dané bázi jsou určeny jednoznačně)

(10) $$x'_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_i, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Vztahy (10), které jsme právě obdrželi, můžeme pomocí matic zapsat jednoduše. Označíme-li symbolem $\mathbf{X}$, resp. $\mathbf{X}'$ matici $(x_1, \ldots, x_n)$, resp. $(x'_1, \ldots, x'_n)$, (jde o matice o jednom řádku a n sloupcích), můžeme podle definice násobení matic psát vztahy (10) ve tvaru

(11) $$\mathbf{X}' = \mathbf{X} \,.\, \mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}').$$

Mějme nyní dány v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ dvě lineární soustavy souřadnic $\mathscr{L}$ repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$, $\mathscr{L}'$ repérem $\mathscr{R}' = \langle P'; \mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n \rangle$. Připomeňme ještě, že lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ v afinním prostoru je vzájemně jednoznačné

zobrazení prostoru $\mathbf{A}_n$ (přesně řečeno množiny $\mathbf{A}$ – viz definice 1.1.1) na množinu $\mathbf{R}^n$, které každému bodu $X \in \mathbf{A}_n$ přiřadí n-tici $[x_1, \ldots, x_n]$, pro niž platí

$$X - P = x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Označíme-li ještě $x'_1, \ldots, x'_n$ souřadnice bodu X v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$, je

$$X - P' = x'_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + x'_n\mathbf{u}'_n.$$

Počítejme souřadnice $x'_1, \ldots, x'_n$ pomocí souřadnic $x_1, \ldots, x_n$. Víme, že

(12) $$X - P' = (X - P) + (P - P').$$

Souřadnice vektoru $X - P$ v bázi $\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n$ jsou (viz (10)) $\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_i$, $j = 1, \ldots, n$. Označme $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ souřadnice vektoru $P - P'$ v bázi $\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n$. Pro souřadnice $x'_1, \ldots, x'_n$ nyní ze vztahu (12) dostáváme

(13) $$x'_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_i + \bar{b}_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Definice 1.12.1. Mějme v afinním prostoru $\mathbf{A}_n$ dány dvě lineární soustavy souřadnic $\mathscr{L}$ a $\mathscr{L}'$. Zobrazení $\mathscr{L}' \circ \mathscr{L}^{-1}$ nazýváme *transformací lineární soustavy souřadnic $\mathscr{L}$ na lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}'$*.

Transformace lineární soustavy souřadnic je tedy vzájemně jednoznačné zobrazení množiny $\mathbf{R}^n$ na sebe. Jak jsme již zjistili, je to zobrazení, které každé n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$ přiřazuje n-tici $(x'_1, \ldots, x'_n)$ danou vztahy (13).

Věta 1.12.1. Buď dána lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ v prostoru $\mathbf{A}_n$. Dále buď dána regulární matice o prvcích $\bar{a}_{ij} \in \mathbf{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ a čísla $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \in \mathbf{R}$. Potom existuje právě jedna lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}'$ v prostoru $\mathbf{A}_n$ tak, že pro transformaci lineární soustavy souřadnic $\mathscr{L}$ na soustavu $\mathscr{L}'$ platí vzorce (13).

Důkaz. Symboly $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{L}$ budeme používat v tomtéž smyslu, v jakém byly dosud v tomto odstavci používány. Matice o prvcích $\bar{a}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$ je matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$. Matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ k ní musí být inverzní (viz (6)) – můžeme tedy určit matici $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$, známe-li matici $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$. Maticí $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ a bází $\mathscr{B}$ je jednoznačně určena báze $\mathscr{B}'$ (vzorci (1)). Nyní již stačí položit $P' = P - \bar{b}_1\mathbf{u}'_1 - \ldots - \bar{b}_n\mathbf{u}'_n$. Potom $P - P' = \bar{b}_1\mathbf{u}'_1 + \ldots + \bar{b}_n\mathbf{u}'_n$, a označíme-li $\mathscr{L}'$ lineární soustavu souřadnic určenou repérem $\mathscr{R}' = \langle P'; \mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_n \rangle$, je transformace $\mathscr{L}' \circ \mathscr{L}^{-1}$ dána vzorci (13). Z provedeného postupu též vyplývá, že lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}'$ je určena jednoznačně.

Snadno se můžeme přesvědčit, že zobrazením $\varphi = \mathscr{L}' \circ \mathscr{L}^{-1}$ jsou čísla $\bar{a}_{ij}$ a $\bar{b}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ dána jednoznačně. Jinými slovy: Je-li pro čísla $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_j$, $\bar{\bar{a}}_{ij}$, $\bar{\bar{b}}_j$

(14) $$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_i + \bar{b}_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{\bar{a}}_{ij}x_i + \bar{\bar{b}}_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

pro každou n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$, je $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij}$ a $\bar{b}_j = \bar{b}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Toto tvrzení snadno dokážeme, upravíme-li vztahy (14) na tvar

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{a}_{ij} - \bar{a}_{ij}) x_i = \bar{b}_j - \bar{b}_j, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Tvrzení nyní plyne ze známého faktu, že soustava lineárních rovnic, která má za řešení všechny n-tice čísel, má všechny koeficienty rovny nule.

Ukážeme, že všechny vztahy (13) můžeme opět výhodně zapsat pomocí maticového počtu. K tomu účelu zavedeme následující označení: Jestliže bod $X \in \mathbf{A}_n$ má v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ souřadnice $x_1, \ldots, x_n$ (tj. je $X = [x_1, \ldots, x_n]$), označíme $\mathbf{X}_{\mathscr{L}} = (1, x_1, \ldots, x_n)$. Tudíž $\mathbf{X}_{\mathscr{L}}$ označuje matici o jednom řádku. Podobný význam mají i symboly $\mathbf{X}_{\mathscr{L}'}$, $\mathbf{X}_{\mathscr{L}''}$ atd. Dále budeme psát

$$\mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}') = \begin{pmatrix} 1, & \bar{b}_1, & \ldots, & \bar{b}_n \\ 0, & \bar{a}_{11}, & \ldots, & \bar{a}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \bar{a}_{n1}, & \ldots, & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyní se můžeme snadno přesvědčit, že vztahy (13) můžeme zapsat v maticovém tvaru

(15) $\qquad \mathbf{X}_{\mathscr{L}'} = \mathbf{X}_{\mathscr{L}} \mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}').$

Čísla $\bar{a}_{ij}$, $\bar{b}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ byla transformací lineární soustavy souřadnic dána jednoznačně. Proto je touto transformací lineární soustavy souřadnic jednoznačně dána i matice $\mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$, neboli matice $\mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ je jednoznačně dána vztahem (15).

Mějme nyní zvolenu ještě třetí lineární soustavu souřadnic $\mathscr{L}''$. Použitím vztahu (15) dostáváme

(16) $\qquad \mathbf{X}_{\mathscr{L}''} = \mathbf{X}_{\mathscr{L}'} \,.\, \mathbf{A}(\mathscr{L}', \mathscr{L}'') = \mathbf{X}_{\mathscr{L}} \,.\, \mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}') \,.\, \mathbf{A}(\mathscr{L}', \mathscr{L}'').$

Ale zároveň je

(17) $\qquad \mathbf{X}_{\mathscr{L}''} = \mathbf{X}_{\mathscr{L}} \,.\, \mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}'').$

Protože, jak už jsme jednou podotkli, je matice $\mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}'')$ určena transformací lineární soustavy souřadnic (tj. zobrazením přiřazujícím každé matici $\mathbf{X}_{\mathscr{L}}$ matici $\mathbf{X}_{\mathscr{L}''}$) jednoznačně, dostáváme srovnáním vztahů (16) a (17) následující větu.

Věta 1.12.2. Buďte $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ tři lineární soustavy souřadnic v prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom platí

(18) $\qquad \mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}'') = \mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}') \mathbf{A}(\mathscr{L}', \mathscr{L}'').$

Zřejmě $\mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}) = \mathbf{E}$ (jednotková matice). Položíme-li nyní ve vztahu (18) $\mathscr{L}'' = \mathscr{L}$, dostáváme větu:

Věta 1.12.3. Buďte $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ lineární soustavy souřadnic v prostoru $\mathbf{A}_n$. Potom platí

$$\mathbf{A}(\mathscr{L}', \mathscr{L}) = \mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')^{-1}.$$

Věta 1.12.3 nám tedy říká, že matice $\mathbf{A}(\mathscr{L}', \mathscr{L})$ a $\mathbf{A}(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ jsou k sobě inverzní. Tudíž známe-li jednu z nich, můžeme snadno určit druhou.

Nyní budeme předpokládat, že známe rovnici dané nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, a budeme ji určovat v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$. Víme, že rovnici nadroviny můžeme psát ve tvaru nezávislém na volbě lineární soustavy souřadnic: $\bar{f}(X) = 0$. Přitom $\bar{f}$ je lineární funkce na prostoru $\mathbf{A}_n$. V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ dané repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ můžeme psát

$$\bar{f}(X) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1}.$$

Samozřejmě $X = [x_1, \ldots, x_n]$. Vidíme, že

(19) $\qquad \bar{f}(P) = a_{n+1}.$

Dále vidíme, že $\bar{f}(X) = f(X - Q)$, kde $Q \in \mathbf{A}'_{n-1}$, a

(20) $\qquad f(\mathbf{x}) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$

je analytické vyjádření formy f (píšeme $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ v bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$). Tudíž

(21) $\qquad f(\mathbf{u}_i) = a_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$

To nám umožňuje určit rovnici nadroviny $\mathbf{A}'_{n-1}$ v libovolné lineární soustavě souřadnic. Podrobné provedení si ozřejmíme na následujícím příkladu.

P ř í k l a d. V rovině $\mathbf{A}_2$ je v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ dané repérem $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle$ dána rovnice přímky p

(22) $\qquad 2x + 3y - 1 = 0.$

Dále je $P' = [1, 3]$ v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ a $\mathbf{u}'_1 = (1, 1)$, $\mathbf{u}'_2 = (-1, 2)$ v bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$. Určete rovnici přímky p v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$ dané repérem $\mathscr{R}' = \langle P'; \mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2 \rangle$.

Řešení. Hledaná rovnice bude mít tvar

$$a'_1 x' + a'_2 y' + a'_3 = 0.$$

Podle vztahu (19) $a'_3 = \bar{f}(P')$. Tedy

$$a'_3 = 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 3 - 1 = 10.$$

(Za x a y jsme dosadili do rovnice (22) souřadnice bodu P'.) Lineární forma f v bázi $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ má analytické vyjádření

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2.$$

Z toho plyne

$$f(\mathbf{u}'_1) = 2 \,.\, 1 + 3 \,.\, 1 = 5$$
$$f(\mathbf{u}'_2) = 2 \,.\, (-1) + 3 \,.\, 2 = 4.$$

Dostali jsme tedy $a'_1 = f(\mathbf{u}'_1) = 5$, $a'_2 = f(\mathbf{u}'_2) = 4$. Hledaná rovnice přímky p v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$ tedy je

$$5x' + 4y' + 10 = 0.$$

Cvičení

1. Mějme v afinní rovině dány dvě lineární soustavy souřadnic $\mathscr{L}$ a $\mathscr{L}'$ repéry $\mathscr{R} = \langle P; \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ a $\mathscr{R}' = \langle P'; \mathbf{u}', \mathbf{v}'\rangle$. Nechť $P' = P + 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, $\mathbf{v}' = -\mathbf{u} + \mathbf{v}$. V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ máme dány body $A = [-1, 3]$, $B = [2, 2]$, $C = [0, 0]$ a přímky p: $2x - y + 1 = 0$, q: $3x + 5 = 0$. V lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$ máme dány body $D = [0, 3]$, $E = [-1, -1]$, $F = [1, 2]$ a přímky r: $3y' - 2 = 0$, s: $2x' + y' = 0$. Určete souřadnice bodů A, B, C, resp. D, E, F v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$, resp. $\mathscr{L}$. Určete rovnice přímek p, q, resp. r, s v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}'$, resp. $\mathscr{L}$.

1.13. Orientace

Na střední škole se zavádí přímá a nepřímá shodnost trojúhelníků. Dva trojúhelníky jsou přímo shodné, lze-li jeden do druhého přenést posunutím nebo otočením, a jsou nepřímo shodné, potřebujeme-li k jejich ztotožnění navíc ještě osovou souměrnost. Podobně bychom mohli definovat přímou a nepřímou shodnost i jiných útvarů než trojúhelníků. Ukáže se, že nejdůležitější je přímá a nepřímá shodnost repérů. Shodnost dvou trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ se např. převede na shodnost repérů $\langle A; B - A, C - A\rangle$, $\langle A'; B' - A', C' - A'\rangle$. Zde ovšem pracujeme ve fyzikální rovině (popřípadě prostoru). Shodnost v afinním prostoru jsme ještě nezkoumali. Názorně tedy můžeme říci, že dva útvary jsou přímo shodné, můžeme-li jeden do druhého převést „spojitým pohybem". Ve fyzikálním prostoru se proto přímá shodnost repérů zavádí tak, že se repér pevně spojí s nějakým známým předmětem. Např. se dohodne, že budeme volit repér tak, že pro libovolnou polohu hodinek v prostoru zvolíme počátek ve středu ciferníku, první a druhý vektor položíme do velké a malé ručičky, když ukazují devět hodin, a třetí vektor volíme kolmo na oba předešlé tak, že směřuje do té části prostoru, z níž je vidět ciferník hodinek. Každé dvě takové lineární soustavy souřadnic sestrojené pro dvě různé polohy hodinek jsou zřejmě přímo shodné. V afinním prostoru však nemáme k dispozici ani hodinky, ani řadu dalších pojmů, jež jsme ve výše uvedené konstrukci použili. Proto musíme z názorného významu přímé

shodnosti vypreparovat matematické jádro, které by bylo možno vzít za základ definice přímé shodnosti v afinním prostoru. K tomu nám poslouží determinant přechodu od jedné báze k druhé, což je pojem, který teď zavedeme.

Definice 1.13.1. Mějme dány dvě báze $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$. Determinant z matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ nazýváme *determinant přechodu* od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\mathscr{B}'$ a označujeme ho symbolem $D(\mathscr{B}', \mathscr{B})$.

Z věty o násobení determinantů a ze vzorců (4), (5), (6) z odstavce 1.10 vyplývají vztahy (pro báze $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}''$)

(1) $\quad D(\mathscr{B}'', \mathscr{B}) = D(\mathscr{B}'', \mathscr{B}') \,.\, D(\mathscr{B}', \mathscr{B}),$

(2) $\quad D(\mathscr{B}, \mathscr{B}) = 1,$

(3) $\quad D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = 1/D(\mathscr{B}, \mathscr{B}').$

Vraťme se nyní opět do fyzikálního prostoru. V tomto prostoru vezmeme dvě báze $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Bázi $\mathscr{B}$ necháme pevnou a bází $\mathscr{B}'$ budeme spojitě pohybovat v závislosti na čase. Přitom budeme stále počítat determinant $D(\mathscr{B}', \mathscr{B})$. Souřadnice vektorů báze $\mathscr{B}'$ v bázi $\mathscr{B}$ se při pohybu také budou spojitě měnit v závislosti na čase, a proto i determinant $D(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ bude spojitou funkcí času. Budeme nyní s bází $\mathscr{B}'$ pohybovat tak, že v časovém okamžiku t_0 obě báze $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ splynou. V tomto okamžiku tedy bude $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = 1$. Protože musí vždy být $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) \neq 0$ (je to determinant z regulární matice), musí být v každém časovém okamžiku $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) > 0$. Vidíme tedy, že můžeme-li jednu bázi $\mathscr{B}'$ ve fyzikálním prostoru dostat z druhé báze $\mathscr{B}$ spojitým pohybem, musí být determinant přechodu $D(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ větší než nula. S trochou námahy by se dokonce podařilo dokázat i obrácené tvrzení: Je-li $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) > 0$, můžeme bázi $\mathscr{B}'$ dostat z báze $\mathscr{B}$ spojitým pohybem. Vidíme, že jsme u hledaného matematického jádra. Za kritérium přímé shodnosti bází $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ můžeme vzít zjištění, zda $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) > 0$. Vidíme ovšem, že takto nemůžeme přímou shodnost zavést v afinním (resp. vektorovém) prostoru nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$ (např. již v tělese komplexních čísel nemá vztah $a > 0$ žádný smysl). Je proto pro nás podstatné, že úvahy provádíme v reálném vektorovém, popřípadě afinním prostoru. Ještě jednou zdůrazněme, že veškeré úvahy, které jsme ve fyzikálním prostoru dělali o „spojitých pohybech", byly prováděny zcela nematematickým způsobem a správně by se měly vynechat (nebo uvést do matematického tvaru). Tyto úvahy měly jen ten význam, aby ukázaly názorný význam přímé shodnosti bází (tento pojem však používat nebudeme, zavedeme si jiné označení).

Definice 1.12.2. Říkáme, že dvě báze $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ jsou *souhlasné*, je-li $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) > 0$.

Věta 1.13.1. Relace „být souhlasné" na množině všech bází prostoru $\mathbf{V}_n$ je ekvivalence.

Důkaz. Reflexivita, symetričnost a tranzitivnost relace plynou po řadě ze vztahů (2), (3), (1).

Věta 1.13.2. Při ekvivalenci „být souhlasné“ se množina všech bází vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ rozpadne na právě dvě třídy ekvivalence.

Důkaz. Mějme bázi $\mathscr{B} = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$. Označme $\mathscr{B}' = \langle -\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$. Zřejmě $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = -1$. Báze $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ tedy nepatří do stejné třídy ekvivalence. Třídy ekvivalence jsou tedy alespoň dvě. Buď nyní $\mathscr{B}''$ libovolná báze. Nepatří-li báze $\mathscr{B}''$ do třídy ekvivalence obsahující bázi $\mathscr{B}'$, musí být $D(\mathscr{B}'', \mathscr{B}') < 0$. Protože $D(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = -1$, vyplývá ze vztahu (1), že $D(\mathscr{B}'', \mathscr{B}) > 0$. Báze $\mathscr{B}''$ je tedy ekvivalentní s bází $\mathscr{B}$. Třídy ekvivalence jsou právě dvě.

Definice 1.13.3. *Orientací vektorového prostoru* $\mathbf{V}_n$ nazýváme volbu jedné ze dvou tříd bází při ekvivalenci „býti souhlasné“ na množině všech bází. Vektorový prostor, v kterém je dána orientace, nazýváme *orientovaný vektorový prostor*. Báze ze zvolené třídy nazýváme *kladné báze*, báze z druhé třídy nazýváme *záporné báze*.

Komu by se „volba jedné třídy bází“ zdála nematematickým pojmem a je zvyklý se vyjadřovat jen v termínech množina, relace, zobrazení, ..., může „volbu“ definovat jako zobrazení dané jednoprvkové množiny do dvouprvkové množiny tříd bází.

Poznámka 1. V průběhu důkazu věty 1.13.2 jsme mimo jiné zjistili, že nahradíme-li v kladné bázi jeden vektor vektorem k němu opačným, obdržíme zápornou bázi a obráceně ze záporné báze tímto způsobem dostaneme kladnou bázi. Z definice 1.13.1 a z teorie determinantů také vyplývá, že provedeme-li na vektory kladné báze permutaci p, dostaneme opět kladnou bázi v případě, že permutace p byla sudá. Jestliže permutace p byla lichá, dostaneme po provedení této permutace zápornou bázi.

Definice 1.13.4. *Orientací afinního prostoru* $\mathbf{A}_n$ nazýváme orientaci jeho zaměření $\mathbf{V}_n$.

Připomeňme závěrem, že poslední definice odpovídá názorným představám, které jsme si o orientaci učinili ve fyzikálním prostoru. Vyšetřujeme-li, jak bylo řečeno v počátku odstavce, přímou shodnost repérů, vidíme, že počátky těchto repérů nejsou podstatné. Počátek jednoho z nich můžeme totiž vždy spojitým pohybem (např. posunutím) přenést do počátku druhého.

KAPITOLA 2

EUKLIDOVSKÝ PROSTOR

Euklidovský prostor, který budeme vyšetřovat v této kapitole, je svými vlastnostmi nejbližší fyzikálnímu prostoru, pokud tento fyzikální prostor zkoumáme pozorovacími metodami. Stručně můžeme říci, že euklidovský prostor je afinní prostor, v kterém navíc můžeme měřit, tj. máme v něm definovanou vzdálenost. Tato vzdálenost ovšem musí mít vlastnosti, které má „obvyklá vzdálenost“ ve fyzikálním prostoru.

Při zkoumání vlastností objektů euklidovského prostoru brzy přijdeme na to, že je nutné zavést velikost úhlu, nebo chceme-li přesněji, míru úhlu. Při zavádění míry úhlu můžeme v podstatě postupovat dvojím způsobem. Za prvé můžeme postupovat způsobem analogickým způsobu, kterým se zavádí míra úhlu na střední škole – v tomto případě zavedeme míru úhlu jako délku oblouku na jednotkové kružnici. Za druhé můžeme nejdříve definovat kosinus úhlu α a potom zavést míru úhlu jako číslo $m(\alpha)$, pro něž je číslo $\cos m(\alpha)$ rovno definovanému kosinu. Oba způsoby zavedení míry úhlu mají své přednosti a nevýhody. Výhodou prvního způsobu je jeho názornost a to, že je tento postup již znám ze základní i střední školy. Jeho nevýhodou je to, že řadu věcí, které jsme na základní škole brali jako samozřejmost, při přesném postupu jako samozřejmost brát nemůžeme. Např. již přesné zavedení délky kruhového oblouku a dokázání základních vlastností tohoto pojmu je značně zdlouhavé. Druhý způsob je značně jednodušší a kratší – což je jeho výhodou. Jeho nevýhodou je to, že předpokládá znalost reálné funkce cos, která tedy musí být nějak definována v jiné oblasti matematiky – např. v matematické analýze. Zavedení funkce cos ovšem v tomto případě nesmí vycházet z názoru, tj. z jejího zavedení na střední škole. Kdybychom to připustili, znamenalo by to, že funkci cos zavedeme nejdříve s použitím nepřesné míry úhlu a pomocí takto zavedené funkce se pokoušíme přesně zavést míru úhlu. To samozřejmě nejde. Vhodné zavedení funkce cos pro tyto účely je např. její zavedení pomocí součtu nekonečné mocninné řady nebo axiomatické zavedení.

V této kapitole je zavedena míra úhlu alternativně – nejdříve bez pomoci funkce cos (v první části odstavce 2.5), a potom s pomocí funkce cos (v druhé části odstavce 2.5). Při studiu je možné jeden způsob vynechat.

V celé kapitole je podstatné, že vektorové prostory, s nimiž budeme pracovat, jsou reálné, a není možné, jako v případě afinního prostoru, tuto část zobecnit tak, že bychom zkoumali vektorové (popřípadě afinní) prostory nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$.

2.1. Základní vlastnosti vektorových prostorů se skalárním součinem

Značná část tohoto odstavce je vlastně opakováním látky probrané v algebře, ale z důvodů přehlednosti a návaznosti další látky ji uvádíme i zde. Protože však jde o látku již dříve vyloženou, budeme ji probírat stručněji a většinu vět i definic budeme uvádět jako součást souvislého textu. Přesto snad bude látka srozumitelná i pro toho, kdo příslušnou část algebry neprostudoval.

V celé kapitole budeme symbolem $\mathbf{V}_n$ označovat vektorový prostor dimenze n (samozřejmě reálný).

Vektorovým prostorem se skalárním součinem nazýváme dvojici $(\mathbf{V}_n, F)$, kde F je zobrazení množiny $\mathbf{V}_n \times \mathbf{V}_n$ (množina všech dvojic vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$) do $\mathbf{R}$, jestliže pro každé vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_n$ a pro každé číslo $c \in \mathbf{R}$ platí:

$$\begin{aligned} &1.\ F(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\\ &2.\ F(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = cF(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\\ (1)\quad &3.\ F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\\ &4.\ F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqq 0\\ &5.\ F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

Číslo $F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ přiřazené vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ zobrazením F nazýváme *skalární součin* vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Nadále budeme předpokládat, že na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ máme pevně definován skalární součin. Místo $F(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ budeme tedy psát $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}$.

Nyní pro skalární součin dokážeme některá jednoduchá tvrzení. Předně vztahy (1) můžeme přepsat do tvaru:

$$\begin{aligned} &1'.\ (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{w}\\ &2'.\ (c\boldsymbol{u}) \,.\, \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v})\\ &3'.\ \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{u}\\ &4'.\ \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u} \geqq 0\\ &5'.\ \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

Vidíme, že vlastnosti 1′, 2′, 3′, a tedy i vlastnosti 1, 2, 3 můžeme formulovat tak, že skalární součin je distributivní při násobení zprava, asociativní s násobením vektoru reálným číslem a komutativní. Nyní z vlastností 1′ a 3′ vyplývá

$$\boldsymbol{w} \,.\, (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{v}.$$

Z vlastností 2′ a 3′ vyplývá

$$\boldsymbol{u} \,.\, (c\boldsymbol{v}) = (c\boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{u} = c(\boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{u}) = c(\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}).$$

Dále platí

$$\boldsymbol{o} \,.\, \boldsymbol{u} = (0\boldsymbol{o}) \,.\, \boldsymbol{u} = 0(\boldsymbol{o} \,.\, \boldsymbol{u}) = 0.$$

Úplnou indukcí lze snadno dokázat, že pro vektory $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbf{V}_n$ platí

$$(\boldsymbol{u}_1 + \ldots + \boldsymbol{u}_k) \,.\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 \,.\, \boldsymbol{w} + \ldots + \boldsymbol{u}_k \,.\, \boldsymbol{w}.$$

Uveďme teď několik příkladů na skalární součin.

Příklad. Mějme dán vektorový prostor $\mathbf{R}^2$ (operace definovány obvyklým způsobem). Pro každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ položíme

a) $\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = x_1 y_1$,

b) $\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$,

c) $\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2x_2 y_2$.

Zjistěte, zda definované operace (v případech a), b), c)) jsou skalárním součinem na $\mathbf{R}^2$.

Řešení. Buďte $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ vektory z $\mathbf{R}^2$, buď $c \in \mathbf{R}$, potom platí v případě

a) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{w} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \,.\, (w_1, w_2) = (u_1 + v_1) \,.\, w_1$, $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{w} = u_1 w_1$, $\boldsymbol{v} \,.\, \boldsymbol{w} = v_1 w_1$, tudíž skalární součin splňuje axióm 1′. Dále je $(c\boldsymbol{u}) \,.\, \boldsymbol{v} = (cu_1, cu_2) \,.\, (v_1, v_2) = cu_1 v_1 = c(\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v})$, a tedy je splněn i axióm 2′. Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny i axiómy 3′ a 4′, ale axióm 5′ splněn není. Pro $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^2$ je totiž $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u} = 0$ právě tehdy, je-li $u_1^2 = 0$, a tedy i $u_1 = 0$. Podmínku $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u} = 0$ tudíž splňuje např. i vektor $(0, 1)$.

b) V tomto případě se ověřením axiómů 1′, …, 5′ přesvědčíme, že všechny tyto axiómy jsou splněny a jde tedy o skalární součin.

c) I v tomto případě se snadno ověří axiómy 1′, 2′, 3′. Určíme nyní $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u} = u_1^2 - 2u_1 u_2 + 2u_2^2 = (u_1 - u_2)^2 + u_2^2.$$

Vidíme též, že axiómy 4′, 5′ jsou splněny a že opět jde o skalární součin.

Dalším pojmem je velikost vektoru. *Velikostí vektoru* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}_n$ nazýváme číslo $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u}}$. Přímo z této definice vyplývá, že pro $c \in \mathbf{R}$ je $\|c\boldsymbol{u}\| = |c| \,.\, \|\boldsymbol{u}\|$. Číslo $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{u}$ budeme nadále zapisovat ve tvaru $\boldsymbol{u}^2$.

Máme-li v prostoru $\mathbf{V}_n$ zvolenu bázi $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ a je-li pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}_n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, můžeme psát

$$\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = (x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n) \,.\, (y_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{u}_n),$$

a tedy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = {} & x_1y_1\boldsymbol{u}_1 \,.\, \boldsymbol{u}_1 + x_1y_2\boldsymbol{u}_1 \,.\, \boldsymbol{u}_2 + \ldots + x_1y_n\boldsymbol{u}_1 \,.\, \boldsymbol{u}_n +\\ & + x_2y_1\boldsymbol{u}_2 \,.\, \boldsymbol{u}_1 + x_2y_2\boldsymbol{u}_2 \,.\, \boldsymbol{u}_2 + \ldots + x_2y_n\boldsymbol{u}_2 \,.\, \boldsymbol{u}_n +\\ (2)\qquad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + x_ny_1\boldsymbol{u}_n \,.\, \boldsymbol{u}_1 + x_ny_2\boldsymbol{u}_n \,.\, \boldsymbol{u}_2 + \ldots + x_ny_n\boldsymbol{u}_n \,.\, \boldsymbol{u}_n. \end{aligned}$$

Označíme-li $\boldsymbol{u}_i \,.\, \boldsymbol{u}_j = a_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, můžeme rovnost (2) psát ve tvaru

$$\boldsymbol{x} \,.\, \boldsymbol{y} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}.$$

Věta 2.1.1. Buďte $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$. Potom platí

$$(3)\qquad |\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}| \leqq \|\boldsymbol{u}\| \,.\, \|\boldsymbol{v}\|.$$

Dále je $|\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}| = \|\boldsymbol{u}\| \,.\, \|\boldsymbol{v}\|$ právě tehdy, jsou-li vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárně závislé.

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, je tvrzení zřejmé. Nechť tedy $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$. Potom pro každé $t \in \mathbf{R}$ platí $(t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 \geqq 0$, a tedy

$$(4) \qquad t^2\boldsymbol{u}^2 + 2t\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^2 \geqq 0.$$

Položíme-li v tomto vztahu $t = -(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})/\boldsymbol{u}^2$ a vzniklou nerovnost upravíme, dostaneme nerovnost

$$(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})^2 \leqq \boldsymbol{u}^2.\boldsymbol{v}^2.$$

Odmocněním této nerovnosti dostáváme

$$|\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}| \leqq \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|.$$

Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárně nezávislé, je pro každé $t \in \mathbf{R}$, $t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, a tedy $(t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 > 0$. Stejným postupem odtud dostáváme nerovnost $|\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}| < \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|$. Tvrzení bychom mohli dokázat též takto: Platí-li nerovnost (4) pro každé číslo $t \in \mathbf{R}$, musí být diskriminant kvadratického trojčlenu z levé strany nerovnosti (4) menší nebo roven nule. Odtud již opět snadno dostaneme tvrzení. Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárně závislé, je např. $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$, $c \in \mathbf{R}$. Potom je

$$|\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}.(c\boldsymbol{u})| = |c|\boldsymbol{u}^2 = |c|.\|\boldsymbol{u}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|.\|c\boldsymbol{u}\|.$$

Ve vztahu (3) tedy platí rovnost. Tím je věta dokázána.

Dokázaná nerovnost (3) dostala v průběhu historie několikrát jméno některého význačného matematika. Nejčastěji se jí říká nerovnost Cauchyova.

Následující věta je přímým důsledkem věty právě dokázané.

Věta 2.1.2. Buďte $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$. Potom platí

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \leqq \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|.$$

Dále platí $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|$ právě tehdy, jestliže existuje číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že $c \geqq 0$ a buď $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$, nebo $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$.

Důkaz. Tvrzení plyne z předcházející věty a ze známého faktu, že pro $a \in \mathbf{R}$ je $a \leqq |a|$ a $a = |a|$ právě tehdy, je-li $a \geqq 0$.

Pomocí věty 2.1.2 nyní dokážeme další nerovnosti pro velikosti vektorů.

Věta 2.1.3. Buďte $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$. Potom platí

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|,$$
$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \geqq |\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\||.$$

Přitom rovnost v každé z těchto dvou nerovností platí právě tehdy, existuje-li číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že $c \geqq 0$ a buď $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$ nebo $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$.

Důkaz. Snadno se přesvědčíme, že následující úpravy první z obou dokazovaných nerovností jsou ekvivalentní.

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$$
$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})^2 = \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 \leqq (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2$$
$$\boldsymbol{u}^2 + 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^2 \leqq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2$$
$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \leqq \|\boldsymbol{u}\|.\|\boldsymbol{v}\|$$

První nerovnost tedy okamžitě vyplývá z věty 2.1.2. Druhou nerovnost můžeme buď dokazovat analogicky (umocněním na druhou a převedením na tvrzení věty 2.1.2), nebo z již dokázané první nerovnosti: Položíme-li v první nerovnosti $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{v}'$, a potom nejdříve $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}'$, a pak $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}'$, dostaneme dvě nerovnosti, z nichž též vyplývá druhá dokazovaná nerovnost (pro vektory $\boldsymbol{u}'$ a $\boldsymbol{v}'$).

Poznámka 1. Z věty 2.1.3 okamžitě vyplývají další dvě nerovnosti

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| \leqq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|,$$
$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \geqq |\|\boldsymbol{u}\| - \|\boldsymbol{v}\||.$$

Přitom rovnost v každé z nich platí právě tehdy, existuje-li číslo $c \in \mathbf{R}$ tak, že $c \leqq 0$ a buď $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{v}$, nebo $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$. Toto tvrzení dokážeme, použijeme-li větu 2.1.3 na vektory $\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}$ místo na vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

Jsou-li dány vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbf{V}_n$, říkáme, že jsou *ortogonální*, jestliže $\boldsymbol{u}_i.\boldsymbol{u}_j = 0$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{w} \in \mathbf{V}_n$ je *jednotkový*, jestliže $\|\boldsymbol{w}\| = 1$. Přímo z definice ortogonálních vektorů plyne tvrzení: Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbf{V}_n$ ortogonální a lineárně závislé, pak existuje j, $1 \leqq j \leqq k$ tak, že $\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{o}$. Platí-li totiž pro ortogonální vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ rovnost $c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{o}$ ($c_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, k$) a např. $c_j \neq 0$, dostaneme $\boldsymbol{u}_j.(c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{u}_k) = c_j\boldsymbol{u}_j^2 = \boldsymbol{o}.\boldsymbol{u}_j = 0$. Protože $c_j \neq 0$, musí být $\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{o}$.

Říkáme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ jsou *ortonormální*, jestliže jsou ortogonální a každý z nich je jednotkový.

Z definice ortogonálních a ortonormálních vektorů vyplývá, že to, jestli vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ jsou, nebo nejsou ortogonální (popřípadě ortonormální), je vlastností celé této množiny vektorů, a nikoli jednotlivých vektorů z této množiny. Správně by se tedy mělo říkat, že nějaká konečná podmnožina prostoru $\mathbf{V}_n$ je, nebo není ortogonální. (Zde je situace podobná jako u lineární závislosti nebo nezávislosti vektorů.) Každý vektor sám o sobě (tj. chápeme-li ho jako jednoprvkovou množinu) je ortogonální, a každý jednotkový vektor je ortonormální.

Bylo dokázáno, že jsou-li ortogonální vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ lineárně závislé, musí některý z nich být nulový. Odtud okamžitě vyplývá: Jsou-li vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ ortonormální, pak jsou lineárně nezávislé.

Nyní ukážeme způsob, kterým se ortonormální vektory sestrojují. Přitom, stejně jako v předchozí kapitole, budeme symbolem $[\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}]$ označovat vektorový prostor generovaný vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$.

Věta 2.1.4. Buďte $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbf{V}_n$ lineárně nezávislé vektory. Potom existují ortonormální vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \mathbf{V}_n$ tak, že pro každé i, $1 \leqq i \leqq k$ je $[\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}] = [\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k\}]$.

Důkaz. Větu dokážeme úplnou indukcí podle k.

1. Je-li $k = 1$, položíme $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1/\|\boldsymbol{v}_1\|$.

2. Nechť tvrzení platí pro číslo $k - 1$. Dokážeme tvrzení i pro číslo k. Podle indukčního předpokladu můžeme k vektorům $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ najít vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}$ splňující tvrzení věty. Položme $\boldsymbol{u}'_k = \boldsymbol{v}_k + a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_{k-1}\boldsymbol{u}_{k-1}$. Zřejmě je $[\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}] = [\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{u}'_k\}]$ pro každou volbu čísel $a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbf{R}$. Čísla $a_1, \ldots, a_{k-1}$ zvolíme tak, aby bylo $\boldsymbol{u}'_k . \boldsymbol{u}_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, k - 1$. K tomu stačí položit $a_i = -\boldsymbol{v}_k . \boldsymbol{u}_i$. Položíme-li ještě $\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{u}'_k/\|\boldsymbol{u}'_k\|$, dostaneme tvrzení věty.

Z věty 2.1.4 vyplývá, že každý podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$, speciálně tedy i sám vektorový prostor $\mathbf{V}_n$, má bázi tvořenou ortonormálními vektory – budeme ji nazývat *ortonormální báze*. Buď tedy $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}_n$. Nechť pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}_n$ je v této bázi $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Ze vzorce (2) nyní vyplývá, že

$$\boldsymbol{x} . \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n .$$

Z definice velikosti vektoru nyní vyplývá, že

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{5}$$

Důkaz věty 2.1.4 nám dává návod pro výpočet vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ při konkrétně zadaných vektorech $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Pro numerický výpočet je však výhodnější určit pro dané lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ libovolné ortogonální vektory $\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_k$ tak, že pro $i = 1, \ldots, k$ je $[\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i\}] = [\{\boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_i\}]$, a teprve dodatečně položit $\boldsymbol{u}_i = (1/\|\boldsymbol{u}'_i\|) . \boldsymbol{u}'_i$. Tento postup si ozřejmíme na příkladě.

P ř í k l a d. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_3$ mějme dánu ortonormální bázi $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3$. Nechť v této bázi je $\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 2, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-2, -1, 1)$. Určete ortonormální vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ tak, aby bylo $[\{\boldsymbol{u}_1\}] = [\{\boldsymbol{v}_1\}]$, $[\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}] = [\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}]$, $[\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}] = [\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}]$.

Řešení. Položíme $\boldsymbol{u}'_1 = \boldsymbol{v}_1$. Dále položíme

$$\boldsymbol{u}''_2 = \boldsymbol{v}_2 + a_1\boldsymbol{u}'_1 .$$

Koeficient a_1 zvolíme tak, aby bylo $\boldsymbol{u}''_2 . \boldsymbol{u}'_1 = 0$. Tedy je $a_1 = -(\boldsymbol{v}_2 . \boldsymbol{u}'_1)/\boldsymbol{u}'^2_1 = -1/3$ a $\boldsymbol{u}''_2 = (0, 2, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, -1)$. Místo vektoru $\boldsymbol{u}''_2$ je numericky výhodnější vzít vektor $\boldsymbol{u}'_2 = 3\boldsymbol{u}''_2 = (-1, 5, 4)$. Dále hledáme vektor $\boldsymbol{u}''_3$ tak, aby

$$\boldsymbol{u}''_3 = \boldsymbol{v}_3 + b_1\boldsymbol{u}'_1 + b_2\boldsymbol{u}'_2 ,$$

a aby $\boldsymbol{u}'_1 . \boldsymbol{u}''_3 = \boldsymbol{u}'_2 . \boldsymbol{u}''_3 = 0$. Odtud dostáváme $b_1 = -(\boldsymbol{v}_3 . \boldsymbol{u}'_1)/\boldsymbol{u}'^2_1 = 4/3$, $b_2 = -(\boldsymbol{v}_3 . \boldsymbol{u}'_2)/\boldsymbol{u}'^2_2 = -1/42$. Výhodnější je opět za vektor $\boldsymbol{u}'_3$ vzít celočíselný násobek vektoru $\boldsymbol{u}''_3$. Protože 42 je dělitelné třemi, položíme $\boldsymbol{u}'_3 = 42\boldsymbol{u}''_3 = 42(-2, -1, 1) + 4 . 14(1, 1, -1) - (-1, 5, 4) = (-27, 9, -18) = 9(-3, 1, -2)$. Nyní máme $\|\boldsymbol{u}'_1\| = \sqrt{3}$, $\|\boldsymbol{u}'_2\| = \sqrt{42}$, $\|\boldsymbol{u}'_3\| = 9\sqrt{14}$. Tudíž dostáváme řešení:

$$\boldsymbol{u}_1 = (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$$

$$\boldsymbol{u}_2 = (1/\sqrt{42})(-1, 5, 4)$$

$$\boldsymbol{u}_3 = (1/\sqrt{14})(-3, 1, -2)$$

Poznámka 2. Sestrojíme-li k lineárně nezávislým vektorům $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ortonormální vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tak, jak to bylo ukázáno v důkazu věty 2.1.4 (a v právě vyřešeném příkladě), říkáme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ vznikly z vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ ortogonalizačním procesem. Znění věty 2.1.4 bychom mohli upravit tak, že k lineárně nezávislým vektorům $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ existuje právě jedna k-tice vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tak, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ jsou ortonormální, je $[\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_i\}] = [\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_i\}]$ a $\boldsymbol{u}_i . \boldsymbol{v}_i > 0$ pro každé i, $1 \leqq i \leqq k$. Přitom vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ splňující uvedené podmínky byly vlastně již sestrojeny v průběhu důkazu věty 2.1.4 a to, že jsou určeny napsanými podmínkami jednoznačně, bychom snadno dokázali.

Důsledek věty 2.1.4. Buď $\mathbf{V}'_k$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom existuje ortonormální báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvoří ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}'_k$.

Důkaz. Zřejmě můžeme zvolit bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ prostoru $\mathbf{V}'_k$. Tuto bázi můžeme doplnit na bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ celého prostoru $\mathbf{V}_n$. Provedeme-li nyní ortogonalizační proces na bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$, dostaneme ortonormální bázi požadovaných vlastností.

Věta 2.1.5. Buď $\mathbf{V}'_k$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom množina všech vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$, pro něž je $\boldsymbol{x} . \boldsymbol{y} = 0$ pro každý vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbf{V}'_k$, tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$ dimenze $n - k$.

Důkaz. Zvolme ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ tak, aby vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ tvořily bázi prostoru $\mathbf{V}'_k$. Potom je-li vektor

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n$$

ortogonální ke všem vektorům z vektorového prostoru $\mathbf{V}'_k$, tedy speciálně i k vektorům $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$, musí být $0 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i = x_i$, $i = 1, \dots, k$. Je-li obráceně $x_i = 0$ pro $i = 1, \dots, k$, je $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_i = 0$ pro $i = 1, \dots, k$, a pro každý vektor $\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \dots + y_k\mathbf{u}_k$ je tedy $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$. Odtud vyplývá, že $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ pro každý vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{V}_k$ právě tehdy, je-li $x_1 = \dots = x_k = 0$, tj. je-li $\mathbf{x} \in [\{\mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}]$. Tím je tvrzení dokázáno.

Poznámka 3. Označme $\mathbf{V}'^{\perp}_k = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V}_n;\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0,\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}'_k\}$, tj. $\mathbf{V}'^{\perp}_k$ je vektorový prostor z věty 2.1.5. V průběhu důkazu věty 2.1.5 jsme dokázali, že máme-li zvolenou ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}_n$ tak, že k vektorů z vektorů báze tvoří bázi prostoru $\mathbf{V}'_k$, tvoří zbývající $n - k$ vektory bázi prostoru $\mathbf{V}'^{\perp}_k$. Odtud vyplývá, že je $(\mathbf{V}'^{\perp}_k)^{\perp} = \mathbf{V}'_k$.

Definice 2.1.1. Vektorový prostor $\mathbf{V}'^{\perp}_k$, zavedený k prostoru $\mathbf{V}'_k$ v poznámce 3, se nazývá vektorový prostor *totálně kolmý* k vektorovému prostoru $\mathbf{V}'_k$.

Poznámka 4. Protože podle poznámky 3 je vektorovým prostorem totálně kolmým k vektorovému prostoru $\mathbf{V}'^{\perp}_k$ opět prostor $\mathbf{V}'_k$, budeme též říkat, že prostory $\mathbf{V}'_k$ a $\mathbf{V}'^{\perp}_k$ jsou navzájem *totálně kolmé.*

Věta 2.1.6. Buďte $\mathbf{V}'_r$ a $\mathbf{V}''_s$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom je $\mathbf{V}'_r \subset \mathbf{V}''_s$ právě tehdy, když $\mathbf{V}'^{\perp}_r \supset \mathbf{V}''^{\perp}_s$.

Důkaz. Tvrzení věty je zřejmé, neboť je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{V}''^{\perp}_s$, tj. vektor $\mathbf{x}$ je ortogonální ke všem vektorům z $\mathbf{V}''_s$, je tím spíše ortogonální ke všem vektorům z $\mathbf{V}'_r$, a tedy z $\mathbf{V}'_r \subset \mathbf{V}''_s$ vyplývá, že je $\mathbf{V}'^{\perp}_r \supset \mathbf{V}''^{\perp}_s$. Obrácené tvrzení plyne nyní z poznámky 2.

Teď budeme definovat kolmost podprostorů tak, abychom pod tento pojem zahrnuli případy kolmosti, které jsou nám známy ze střední školy.

Definice 2.1.2. Říkáme, že vektorové podprostory $\mathbf{V}'_r$ a $\mathbf{V}''_s$ prostoru $\mathbf{V}_n$ jsou na sebe kolmé, jestliže je buď $\mathbf{V}'^{\perp}_r \subset \mathbf{V}''_s$, nebo $\mathbf{V}'^{\perp}_r \supset \mathbf{V}''_s$.

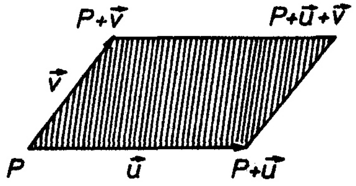
Z věty 2.1.6 vyplývá, že vztah kolmosti je symetrický, tj. jsou-li kolmé prostory $\mathbf{V}'_r$ a $\mathbf{V}''_s$, jsou kolmé i prostory $\mathbf{V}''_s$ a $\mathbf{V}'_r$. Skutečně, je-li $\mathbf{V}'^{\perp}_r \subset \mathbf{V}''_s$, je podle věty 2.1.6 $\mathbf{V}'_r = (\mathbf{V}'^{\perp}_r)^{\perp} \supset \mathbf{V}''^{\perp}_s$, a je-li $\mathbf{V}'^{\perp}_r \supset \mathbf{V}''_s$, je $\mathbf{V}'_r = (\mathbf{V}'^{\perp}_r)^{\perp} \subset \mathbf{V}''^{\perp}_s$.

Na závěr ještě upozorněme, že základní vztahy pro skalární součin – vyjádření skalárního součinu v ortonormální bázi, vyjádření velikosti vektoru v ortonormální bázi, vztahy (1) atd. – budeme v dalších odstavcích používat zcela automaticky, bez jakýchkoliv odkazů.

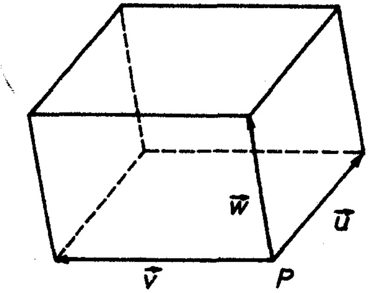
2.2. Vnější a vektorový součin

V celém odstavci budeme předpokládat, že $\mathbf{V}_n$ je orientovaný vektorový prostor se skalárním součinem. Nejdříve zavedeme vnější součin. Vnější součin budeme definovat pro n vektorů v n-rozměrném prostoru.

Abychom objasnili názorný význam vnějšího součinu dvou vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve fyzikální rovině, zvolíme v rovině bod P a sestrojíme rovnoběžník o vrcholech P, $P + \mathbf{u}$, $P + \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $P + \mathbf{v}$ (viz obr. 15). Označme S jeho obsah. Nyní vnější součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ bude roven číslu S, tvoří-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ kladnou bázi a číslu $-S$, tvoří-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ zápornou bázi, a je roven nule, jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé. Podobný význam má vnější součin tří vektorů v trojrozměrném fyzikálním prostoru: Tři vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ umístíme počátkem do jednoho bodu P a tento bod, spolu s koncovými body vektorů, doplníme na rovnoběžnostěn (viz obr. 16). Označíme-li V objem tohoto rovnoběžnostěnu, je vnější součin vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ roven číslu V, určují-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ kladnou bázi, je roven číslu $-V$, určují-li zápornou bázi, a je roven nule, jsou-li lineárně závislé. O tomto významu se přesvědčíme později, vnější součin zavedeme trochu jinak.



Obr. 15



Obr. 16

Mějme v prostoru $\mathbf{V}_n$ dánu kladnou ortonormální bázi $\mathscr{B} = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$. Buď dále $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}_n$. V bázi $\mathscr{B}$ můžeme psát $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in})$, $i = 1, \dots, n$. Označme

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} = \begin{vmatrix} v_{11}, & \dots, & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n1}, & \dots, & v_{nn} \end{vmatrix}.$$

Mějme zvoleno ve $\mathbf{V}_n$ dalších n vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$. Nechť v bázi $\mathscr{B}$ je $\mathbf{w}_i = (w_{i1}, \dots, w_{in})$, $i = 1, \dots, n$. Použijeme-li nyní na výraz $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} \cdot [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n]_{\mathscr{B}}$ větu o násobení determinantů tak, že násobíme řádky první matice řádky druhé matice, dostaneme vztah

$$(1) \qquad [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} \cdot [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n]_{\mathscr{B}} = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1, & \dots, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1, & \dots, & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_n \end{vmatrix}.$$

Přitom jsme ovšem využili skutečnosti, že báze $\mathscr{B}$ je ortonormální a že tedy je např.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = v_{11}w_{11} + v_{12}w_{12} + \ldots + v_{1n}w_{1n}.$$

Věta 2.2.1. Buďte $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ dvě kladné ortonormální báze, nechť $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}_n$. Potom platí

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}'}.$$

Důkaz. Položíme-li ve vztahu (1) $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, dostaneme vyjádření výrazu $([\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}})^2$ pomocí skalárních součinů $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, které pochopitelně nezávisí na volbě ortonormální báze. Odtud plyne, že

$$(2) \qquad |[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}}| = |[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}'}|.$$

Dále zřejmě platí: Je $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} = 0$ právě tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé, a $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} > 0$ právě tehdy, tvoří-li vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ kladnou bázi prostoru $\mathbf{V}_n$ (výraz $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}}$ je determinantem přechodu od báze $\mathscr{B}$ k bázi $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$). Tudíž $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}} \geqq 0$ právě tehdy, je-li $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}'} \geqq 0$. Dokazované tvrzení nyní plyne z dokázané rovnosti (2).

Protože, jak jsme právě dokázali, nezávisí výraz $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}}$ na volbě kladné ortonormální báze, můžeme nadále index $\mathscr{B}$ v tomto výrazu vynechávat.

Definice 2.2.1. *Vnějším součinem* vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbf{V}_n$ nazýváme číslo $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]_{\mathscr{B}}$, kde $\mathscr{B}$ je kladná ortonormální báze. Vnější součin vektorů $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ označujeme symbolem $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n]$.

Použijeme-li definici vnějšího součinu a známé věty z teorie determinantů, dostáváme snadno všechna tvrzení následující věty.

Věta 2.2.2. Mějme dány vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}'_i \in \mathbf{V}_n$, $1 \leqq i \leqq n$, buď dále $c \in \mathbf{R}$. Potom platí

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i + \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n] = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] + [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}'_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n],$$

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, c\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n] = c[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n].$$

Je-li navíc $p = \begin{pmatrix} 1, & \ldots, & n \\ i_1, & \ldots, & i_n \end{pmatrix}$ pořadí čísel $1, \ldots, n$, platí

$$[\mathbf{v}_{i_1}, \ldots, \mathbf{v}_{i_n}] = \operatorname{zn} p[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n],$$

přičemž symbolem $\operatorname{zn} p$ označujeme znamení pořadí p (viz [3]).

Jako speciální případ posledního tvrzení věty dostáváme, že zaměníme-li ve vnějším součinu dva vektory, změní vnější součin znaménko. Též je zřejmé, že $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] = 0$ právě tehdy, jsou-li vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé.

Přímo z dokázaného vztahu (1) plyne následující věta.

Věta 2.2.3. Buď $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{V}_n$. Potom platí

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] \cdot [\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n] = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_1, & \ldots, & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{w}_n \end{vmatrix}.$$

Nyní zavedeme vektorový součin. Vektorový součin budeme definovat jen v trojrozměrném prostoru. Nadále budeme tedy předpokládat, že $n = 3$. Symbol $\mathbf{V}_3$ bude tedy označovat trojrozměrný orientovaný prostor se skalárním součinem.

Věta 2.2.4. Ke každým dvěma vektorům $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_3$ existuje právě jeden vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_3$ tak, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_3$ platí

$$(3) \qquad [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}.$$

Důkaz. Napíšeme-li vztah (3) v nějaké kladné ortonormální bázi $\mathscr{B}$, dostaneme

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix} = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3.$$

Rozvineme-li determinant na levé straně rovnosti podle posledního řádku, dostáváme

$$x_1 \begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} = w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3.$$

Vidíme, že pro to, aby rovnost (3) platila pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_3$, je nutné a stačí, aby platilo

$$(4) \qquad w_1 = \begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = -\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}.$$

Odtud již plyne dokazované tvrzení.

Definice 2.2.2. Nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_3$. Vektor $\mathbf{w} \in \mathbf{V}_3$, pro nějž platí vztah (3) pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}_3$, nazýváme *vektorový součin* vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a označujeme ho symbolem $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Je-li v kladné ortonormální bázi $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, je podle vzorců (4)

$$(5) \qquad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2, & u_3 \\ v_2, & v_3 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} u_1, & u_3 \\ v_1, & v_3 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Věta 2.2.5. Buď $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}' \in \mathbf{V}_3$, $c \in \mathbf{R}$. Potom platí

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}, \\ (c\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} \times (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}), \\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') \times \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}', \\ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o}, \quad \text{právě když jsou vektory } \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \text{ lineárně závislé.} \end{aligned}$$

Důkaz. Důkazy všech tvrzení právě vyslovené věty jsou tak jednoduché, že je lze ponechat jako cvičení. Každé dokazované tvrzení lze buď dokázat výpočtem souřadnic obou stran rovnosti podle vzorce (5), nebo bez použití souřadnic z věty 2.2.2. Např. pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_3$ je

$$[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}] + [\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}] = (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}) \,.\, \boldsymbol{x},$$

a tedy podle definice 2.2.2 $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}') \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}' \times \boldsymbol{v}$.

Věta 2.2.6. Nechť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_3$. Potom vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je ortogonální k oběma vektorům $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, a jsou-li vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lineárně nezávislé, tvoří vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ kladnou bázi prostoru $\mathbf{V}_3$.

Důkaz. Označíme-li $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, platí pro každý vektor $\boldsymbol{x}$ vztah (3). Položíme-li v něm postupně $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$, dostáváme podle věty 2.2.2, že $\boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{v} = 0$. Dosadíme-li do (3) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}$, vidíme, že v případě, že jsou vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ lineárně nezávislé, platí $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}] = \boldsymbol{w}^2 > 0$, a tudíž $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$ je kladná báze.

Souvislost mezi vnějším součinem dvou vektorů ve dvojrozměrném prostoru a jejich vektorovým součinem v trojrozměrném prostoru ukazuje následující věta.

Věta 2.2.7. Nechť $\mathbf{V}_2$ je podprostor prostoru $\mathbf{V}_3$. Nechť vektorový prostor $\mathbf{V}_2$ je orientovaný. Buď $\boldsymbol{a}_3 \in \mathbf{V}_3$ takový vektor, že je-li $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ kladná ortonormální báze $\mathbf{V}_2$, je $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ kladná ortonormální báze $\mathbf{V}_3$. Buď dále $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_2$. Pak označíme-li $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ vnější součin vektorů $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ v prostoru $\mathbf{V}_2$, je $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] \,.\, \boldsymbol{a}_3$.

Důkaz. V bázi $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ můžeme psát

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= u_1\boldsymbol{a}_1 + u_2\boldsymbol{a}_2 \\ \boldsymbol{v} &= v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 . \end{aligned}$$

Potom je $[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}] = \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}$ a $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1, & u_2 \\ v_1, & v_2 \end{vmatrix}\right)$,
odkud již plyne tvrzení.

Poznámka 1. Větu 2.2.6 zřejmě též můžeme dostat jako jednoduchý důsledek věty 2.2.7. Navíc je z věty 2.2.7 patrné, že jsou-li vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ ortonormální, tvoří vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ kladnou ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}_3$.

Než přistoupíme k další větě a jejímu důkazu, uveďme jedno na první pohled zřejmé tvrzení: Je-li $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$ (zde se nemusíme omezovat na $n = 3$), existuje číslo $t \in \mathbf{R}$ tak, že vektor $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + t\boldsymbol{u}$ je ortogonální k vektoru $\boldsymbol{u}$. Toto tvrzení je skutečně zřejmé. Je-li totiž $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, je $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}' = 0$ pro každé číslo $t \in \mathbf{R}$. Je-li $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, je t řešením lineární rovnice $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} + t\boldsymbol{u}^2 = 0$.

Věta 2.2.8. Budiž $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbf{V}_3$. Potom platí

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,.\, (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}, & \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c}, & \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Tvoří-li dvojice $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ i $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ lineárně závislé vektory, existuje vektorový podprostor $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}_3$ tak, že $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d} \in \mathbf{V}_2$. V tomto případě tvrzení vyplývá z věty 2.2.7 a 2.2.3. Jsou-li např. vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ lineárně nezávislé, označme $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Nyní můžeme určit čísla t_c, $t_d \in \mathbf{R}$ tak, aby vektory $\boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c} + t_c\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{d}' = \boldsymbol{d} + t_d\boldsymbol{u}$ byly ortogonální k vektoru $\boldsymbol{u}$. Podle věty 2.2.6 je $\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{b} = 0$. Tudíž je $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{d}' = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{d}' = \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{d}$. Protože je $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}', \boldsymbol{d}' \in [\{\boldsymbol{u}\}]^{\perp} = \mathbf{V}_2$, je podle věty 2.2.7 a věty 2.2.3

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,.\, (\boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{d}') = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{c}', & \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{d}' \\ \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{c}', & \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{d}' \end{vmatrix}.$$

Avšak $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \,.\, (\boldsymbol{c}' \times \boldsymbol{d}') = \boldsymbol{u} \,.\, ((\boldsymbol{c} + t_c\boldsymbol{u}) \times (\boldsymbol{d} + t_d\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{u} \,.\, (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} + t_c\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{d} + t_d\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u} + t_c t_d\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \,.\, (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d})$, neboť $\boldsymbol{u} \,.\, (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{u} \,.\, (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{u}) = 0$ a $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ (viz věta 2.2.6 a 2.2.5). Odtud již plyne dokazované tvrzení.

Větu 2.2.8 můžeme též dokázat přímým výpočetm ve vhodně zvolené kladné ortonormální bázi. Je vidět, že kladnou ortonormální bázi můžeme zvolit tak, aby bylo $\boldsymbol{a} = (a_1, 0, 0)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, 0)$. Vypočteme-li nyní pomocí souřadnic obě strany dokazované rovnosti, snadno se přesvědčíme, že jsou stejné.

Analogii vektorového součinu bychom mohli zavést i v orientovaném n-rozměrném vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$. Tam by ovšem tento součin byl definován pro $n - 1$ vektorů – pro vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1} \in \mathbf{V}_n$ by to byl vektor $\boldsymbol{w}$, pro nějž by pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}_n$ platilo $[\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{x}$. Pro $n \neq 3$ tento vektor $\boldsymbol{w}$ však nenazýváme vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$, ale *ortogonální doplněk* těchto vektorů.

2.3. Základní vlastnosti euklidovského prostoru

Euklidovský prostor zavedeme jako afinní prostor, na jehož zaměření je definován skalární součin.

Definice 2.3.1. Buď $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}, \mathbf{V}_n, „-“)$ afinní prostor. Buď „.“ operace skalárního součinu na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$. Potom dvojici $\mathbf{E}_n = (\mathbf{A}_n, „.“)$ nazýváme *n-rozměrný euklidovský prostor*.

Z definice euklidovského prostoru vyplývá, že můžeme na euklidovský prostor přenést všechny pojmy a vlastnosti afinního prostoru. Potom je zřejmý význam těchto pojmů: bod euklidovského prostoru, lineární soustava souřadnic v euklidovském prostoru atd. Uvedené pojmy nebudeme v euklidovském prostoru znovu zavádět, ale budeme je automaticky přenášet z afinního prostoru. Podobně, jako jsme v afinním prostoru psali $X \in \mathbf{A}_n$ místo správného $X \in \mathbf{A}$, budeme i v euklidovském prostoru psát $X \in \mathbf{E}_n$ místo $X \in \mathbf{A}$. V celé této kapitole budeme symbolem $\mathbf{E}_n$ označovat n-rozměrný euklidovský prostor zavedený v definici 2.3.1.

Základním pojmem euklidovského prostoru je pojem vzdálenosti dvou bodů.

Definice 2.3.2. Buď $X, Y \in \mathbf{E}_n$. Číslo $\|X - Y\|$ nazýváme *vzdálenost bodů* X, Y a označujeme symbolem $|XY|$.

Věta 2.3.1. Nechť $X, Y, Z \in \mathbf{E}_n$. Potom platí

1. $|XY| \geqq 0$,
2. $|XY| = 0 \Leftrightarrow X = Y$,
3. $|XY| = |YX|$,
4. $|XY| + |YZ| \geqq |XZ|$.

Důkaz. První tři tvrzení jsou zřejmá – plynou okamžitě z definice vzdálenosti dvou bodů. Čtvrté tvrzení je důsledkem věty 2.1.3, položíme-li v ní $\mathbf{u} = X - Y$, $\mathbf{v} = Y - Z$.

Množinu, jejímž každým dvěma bodům X, Y je přiřazeno reálné číslo $|XY|$ tak, že jsou splněny vlastnosti 1, 2, 3, 4 z věty 2.3.1, nazýváme metrický prostor. Věta 2.3.1 nám tedy říká, že euklidovský prostor je metrický prostor. Pojem metrický prostor je ovšem značně obecnější a metrické prostory mohou být o hodně „divočejší" než euklidovský prostor. Např. přiřadíme-li každým dvěma přirozeným číslům m, n reálné číslo $\log(\sqrt{mn}/D(m,n))$, kde $D(m,n)$ je největší společný dělitel čísel m, n, tvoří množina všech přirozených čísel metrický prostor, ovšem metrický prostor zcela se lišící od euklidovského prostoru.

Všimněme si ještě, že tvrzení 4 ve větě 2.3.1 šlo zformulovat ještě silněji. Z věty 2.1.3 totiž vyplývá, že v nerovnosti 4 platí rovnost právě tehdy, je-li buď $X - Y = c(Y - Z)$, kde $c \geqq 0$, nebo je-li $Y = Z$. Tudíž platí následující věta.

Věta 2.3.2. Nechť $X, Y, Z \in \mathbf{E}_n$. Potom rovnost

$$|XY| + |YZ| = |XZ| \tag{1}$$

platí právě tehdy, je-li $Y \in XZ$.

Důkaz. Jak bylo řečeno, platí rovnost (1) právě tehdy, je-li buď $Y = Z$, nebo $X - Y = c(Y - Z)$, kde $c \geqq 0$. To je ekvivalentní podmínce, že body X a Z leží v opačných polopřímkách s hraničním bodem Y. Odtud již plyne tvrzení.

Nyní zavedeme kartézský repér a kartézskou soustavu souřadnic. V kartézské soustavě souřadnic se provádí většina výpočtů v euklidovském prostoru.

Definice 2.3.3. Buď $P \in \mathbf{E}_n$, buď $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ ortonormální báze zaměření $\mathbf{V}_n$. Potom repér $\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$ nazýváme *kartézský repér* a lineární soustavu souřadnic jím určenou nazýváme *kartézská soustava souřadnic* v prostoru $\mathbf{E}_n$.

Pokud budeme dále používat zápis bodů pomocí souřadnic, budeme, pokud nebude řečeno něco jiného, vždy automaticky předpokládat, že souřadnice bodů bereme v kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ dané repérem $\langle P; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$. Souřadnice vektorů samozřejmě budeme vyjadřovat v ortonormální bázi $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$. Máme-li tedy nyní $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $Y = [y_1, \ldots, y_n]$, plyne ze vztahu (5) z odstavce 2.1, že

$$|XY| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{2}$$

Ukážeme si nyní, že střed dvojice bodů můžeme charakterizovat pomocí vzdálenosti.

Věta 2.3.3. Bod $S \in \mathbf{E}_n$ je středem dvojice bodů $A, B \in \mathbf{E}_n$ právě tehdy, je-li

$$|SA| = |SB| = (1/2)|AB|. \tag{3}$$

Důkaz. Je-li $A = B$, je tvrzení triviální. Nechť nyní platí rovnost (3). Je-li $A \neq B$, plyne z rovnosti $|AS| + |SB| = |AB|$ a z věty 2.3.2, že $S \in AB$, a tedy $S - A = c(B - A)$, přičemž $0 \leqq c \leqq 1$. Odtud však plyne, že $|S - A| = |c|\,|B - A|$, a tedy $|c| = 1/2$, a tudíž i $c = 1/2$. Bod S je střed dvojice bodů A, B. Je-li obráceně bod S středem dvojice bodů A, B, platí $S - A = (1/2)(B - A)$ a zároveň $S - B = (1/2)(A - B)$; odtud již plyne rovnost (3).

To, že střed dvojice bodů můžeme charakterizovat pomocí vzdálenosti, umožňuje vybudovat celou euklidovskou geometrii jen pomocí pojmu vzdálenost. Při tomto způsobu výstavby geometrie definujeme euklidovský prostor jako množinu bodů, v níž je každým dvěma bodům X, Y přiřazeno reálné číslo $|XY|$, nazývané jejich vzdáleností, a existuje vzájemně jednoznačné zobrazení vyšetřované množiny na prostor $\mathbf{R}^n$ tak, že pro vzdálenost bodů X, Y platí vztah (2). Přitom $(x_1, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, \ldots, y_n)$ je n-tice přiřazená bodu X, resp. Y uvažovaným zobrazením. Potom zavedeme střed dvojice bodů A, B jako bod S, splňující rovnost (3). Nyní bychom mohli pomocí středu zavést vektory – tak jak to bylo popsáno na začátku kapitoly 1 a jak se to též někdy probírá na střední škole. Po zavedení vektorů bychom již mohli pokračovat v podstatě stejným způsobem jako v této učebnici. Tímto způsobem je euklidovský prostor vyšetřován v [6].

Rovnici nadroviny, s kterou jsme pracovali v odstavci 1.5, můžeme v euklidovském prostoru dostat ještě jiným způsobem. Zvolíme-li ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$

(se skalárním součinem) vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}_n$, můžeme definovat na prostoru $\mathbf{V}_n$ lineární formu $f_{\boldsymbol{a}}$ předpisem

(4) $$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{x}.$$

Že zobrazení $f_{\boldsymbol{a}}$ je skutečně lineární forma, plyne přímo z definice skalárního součinu. Jestliže v prostoru $\mathbf{V}_n$ zvolíme ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, můžeme napsat analytické vyjádření lineární formy $f_{\boldsymbol{a}}$: Nejdříve vyjádříme vektor $\boldsymbol{x}$ ve tvaru $\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + x_n \boldsymbol{u}_n$, a potom dostáváme

$$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f_{\boldsymbol{a}}(x_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + x_n \boldsymbol{u}_n) = x_1 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_1) + \dots + x_n f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_n).$$

Můžeme však psát $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + a_n \boldsymbol{u}_n$ a podle zavedení lineární formy $f_{\boldsymbol{a}}$ a z vlastností ortonormální báze dostaneme

(5) $$f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{u}_i = a_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

a tedy $f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$. Tento vztah ovšem též vyplývá přímo z rovnosti (4) a z vyjádření skalárního součinu v ortonormální bázi. Z obdrženého vztahu vyplývá, že ke každé lineární formě g na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ existuje vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbf{V}_n$ tak, že $g = f_{\boldsymbol{b}}$. K důkazu tohoto tvrzení stačí napsat analytické vyjádření lineární formy g v ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, a je-li $g(\boldsymbol{x}) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$ toto vyjádření, položit $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Vzpomeneme-li si, že množina všech lineárních forem na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ tvoří vektorový prostor $\tilde{\mathbf{V}}_n$ (duální vektorový prostor k prostoru $\mathbf{V}_n$), tak přiřadíme-li každému vektoru $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}_n$ lineární formu $f_{\boldsymbol{a}}$ danou vztahem (4), dostaneme vzájemně jednoznačné zobrazení prostoru $\mathbf{V}_n$ na prostor $\tilde{\mathbf{V}}_n$. Mohli bychom ukázat, že toto zobrazení je izomorfismus.

Je vidět, že nulovou množinou lineární formy $f_{\boldsymbol{a}}$ je množina všech vektorů ortogonálních k vektoru $\boldsymbol{a}$, neboli je to vektorový prostor $[\{\boldsymbol{a}\}]^{\perp}$. Víme, že tento vektorový prostor má dimenzi n (tj. $[\{\boldsymbol{a}\}]^{\perp} = \mathbf{V}_n$) právě tehdy, je-li $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. V ostatních případech je dimenze prostoru $[\{\boldsymbol{a}\}]^{\perp}$ rovna $n - 1$. Je-li obráceně $\mathbf{V}'_{n-1}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$, je $\mathbf{V}'^{\perp}_{n-1}$ jednorozměrný podprostor prostoru $\mathbf{V}_n$, tj. $\mathbf{V}'^{\perp}_{n-1} = [\{\boldsymbol{a}\}]$, kde $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}_n$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$.

Mějme nyní nadrovinu $\mathbf{E}'_{n-1}$ v prostoru $\mathbf{E}_n$. Nechť tato nadrovina má zaměření $\mathbf{V}'_{n-1}$. Rovnice nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ je, jak bylo ukázáno v odstavci 1.5,

$$f(X - Q) = 0,$$

přičemž $Q \in \mathbf{E}'_{n-1}$ a f je lineární forma mající za nulovou množinu prostor $\mathbf{V}'_{n-1}$. Zvolíme-li nyní vektor $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}'^{\perp}_{n-1}$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$, můžeme vzít za lineární formu f formu $f_{\boldsymbol{a}}$. Tudíž rovnici nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ můžeme psát ve tvaru

(6) $$\boldsymbol{a} \,.\, (X - Q) = 0.$$

Máme-li tuto rovnici nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ v lineární soustavě souřadnic $\mathscr{L}$ ve tvaru

(7) $$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0,$$

víme, že $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ je analytické vyjádření formy $f_{\boldsymbol{a}}$ v příslušné bázi. Tudíž, je-li $\mathscr{L}$ kartézská soustava souřadnic, je podle (5) $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Protože rovnice nadroviny je touto nadrovinou dána, až na nenulový násobek, jednoznačně, platí věta:

Věta 2.3.4. Buď $\mathbf{E}'_{n-1}$ nadrovina v prostoru $\mathbf{E}_n$ se zaměřením $\mathbf{V}'_{n-1}$. Rovnici nadroviny můžeme psát ve tvaru (6), kde $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}'^{\perp}_{n-1}$, $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$. Je-li (7) rovnice nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ v kartézské soustavě souřadnic $\mathscr{L}$, pro $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$ je $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}'^{\perp}_{n-1}$.

V odstavci 1.12 jsme zkoumali transformace lineární soustavy souřadnic. Všimněme si, jak to vypadá v případě dvou kartézských soustav souřadnic. Máme-li dvě ortonormální báze $\mathscr{B} = \langle \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, $\mathscr{B}' = \langle \boldsymbol{u}'_1, \dots, \boldsymbol{u}'_n \rangle$, můžeme určit matici přechodu

$$\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Protože řádky matice $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ jsou souřadnice vektorů ortonormální báze $\mathscr{B}'$ v ortonormální bázi $\mathscr{B}$, platí

(8) $$a_{i1} a_{j1} + a_{i2} a_{j2} + \dots + a_{in} a_{jn} = \delta^j_i$$

pro každé $i, j = 1, \dots, n$ (δ^j_i je Kroneckerův symbol, tj. číslo, pro které platí $\delta^j_i = 1$ pro $i = j$ a $\delta^j_i = 0$ pro $i \neq j$). Jestliže obráceně předpokládáme, že $\mathscr{B}$ je ortonormální báze, a že pro matici přechodu $\mathbf{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$ platí vztahy (8), musí být zřejmě báze $\mathscr{B}'$ také ortonormální. Dokážeme nyní, že platí i toto tvrzení: Je-li báze $\mathscr{B}'$ ortonormální a pro matici $\mathbf{M}(\mathscr{B}', \mathscr{B})$ platí vztahy (8), je i báze $\mathscr{B}$ ortonormální. Na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ zvolíme nový skalární součin G tak, aby báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ byla ortonormální. K tomu je nutné a stačí, aby pro vektory

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + x_n \boldsymbol{u}_n$$
$$\boldsymbol{y} = y_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + y_n \boldsymbol{u}_n$$

platilo

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Je tedy vidět, že máme-li na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ dány dva skalární součiny a jedna báze je ortonormální bází při obou skalárních součinech, pak oba skalární součiny splývají. Odtud však již okamžitě vyplývá dokazované tvrzení, neboť podle již dokázaného tvrzení vyplývá ze vztahů (8) a z ortonormálnosti báze $\mathscr{B}$ při skalárním součinu G i ortonormálnost báze $\mathscr{B}'$ při skalárním součinu G. Tudíž G

je skalární součin „." na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ (báze $\mathscr{B}'$ je ortonormální při obou součinech) a báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ je tedy ortonormální i při skalárním součinu „.". Protože koeficienty $\bar{a}_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$ ze vzorců (13) odstavce 1.12 jsou koeficienty matice přechodu $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$, dostáváme tvrzení:

Věta 2.3.5. Mějme v euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ dány dvě lineární soustavy souřadnic $\mathscr{L}$ a $\mathscr{L}'$. Nechť transformace lineární soustavy $\mathscr{L}$ na soustavu $\mathscr{L}'$ je dána vztahy (13) z odstavce 1.12. Potom jsou-li splněny dvě z následujících tří podmínek:

(a) lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}$ je kartézská,

(b) lineární soustava souřadnic $\mathscr{L}'$ je kartézská,

(c) je $\bar{a}_{i1}\bar{a}_{j1} + \ldots + \bar{a}_{in}\bar{a}_{jn} = \delta_i^j$, $i, j = 1, \ldots, n$,

je splněna i třetí z nich.

Protože v dalších odstavcích budeme používat také vektorový a vnější součin, uděláme tuto úmluvu: Nadále předpokládáme, že pracujeme v orientovaném prostoru $\mathbf{E}_n$ se zaměřením $\mathbf{V}_n$. Volíme-li v tomto prostoru kartézskou soustavu souřadnic repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, vždy to děláme tak, aby $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ byla kladná báze (pochopitelně ortonormální) prostoru $\mathbf{V}_n$.

2.4. Obsah trojúhelníku

Nyní definitoricky zavedeme obsah trojúhelníku tak, aby bylo vše v souladu s našimi představami získanými na střední škole. Jak bylo řečeno v definici 1.11.3, je trojúhelník konvexní obal trojice lineárně nezávislých bodů nazývaných jeho vrcholy. Při značení trojúhelníku se přidržíme středoškolského značení, tj. trojúhelník o vrcholech A, B, C budeme značit symbolem $\triangle ABC$. Podle označení, které jsme zavedli v definici 1.11.2, ho však můžeme značit též $K(\{A, B, C\})$.

V celém odstavci budeme předpokládat, že všechna vyšetřování jsou prováděna v euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$, a že v této rovině je zvolena orientace. Bude však zřejmé, že veškeré pojmy a věty nezávisí na volbě této orientace. Písmena A, B, C, A', B', C' budou stále (v celém odstavci) označovat body v $\mathbf{E}_2$.

V následující definici zavedeme obsah trojúhelníku. Jak již bylo řečeno, bude zavedena tak, aby to bylo v souladu s tímto pojmem známým ze střední školy. Ovšem o tomto souladu se nepřesvědčíme hned, ale až v odstavci 2.7.

Definice 2.4.1. *Obsahem trojúhelníku ABC nazýváme číslo*

(1) $$V(A, B, C) = \tfrac{1}{2} \left| [B - A, C - A] \right|.$$

Následující věta říká, že obsah trojúhelníku skutečně závisí jen na trojúhelníku, a ne na uspořádání jeho vrcholů.

Věta 2.4.1. Mějme dán trojúhelník ABC. Potom je

$$V(A, B, C) = V(A, C, B) = V(B, A, C) = V(C, A, B) = V(B, C, A) = V(C, B, A).$$

Důkaz. Protože každou permutaci lze získat zaměňováním sousedních prvků (v našem případě tří vrcholů A, B, C se o tom můžeme snadno přesvědčit přímo), stačí zřejmě dokázat první dvě rovnosti. Máme však

$$\begin{aligned} V(A, C, B) &= \tfrac{1}{2} \left| [C - A, B - A] \right| = \tfrac{1}{2} \left| -[B - A, C - A] \right| = \\ &= V(A, B, C), \\ V(B, A, C) &= \tfrac{1}{2} \left| [A - B, C - B] \right| = \\ &= \tfrac{1}{2} \left| [A - B, (C - A) + (A - B)] \right| = \\ &= \tfrac{1}{2} \left| [A - B, C - A] + [A - B, A - B] \right| = \\ &= \tfrac{1}{2} \left| -[B - A, C - A] \right| = V(A, B, C). \end{aligned}$$

Než vyslovíme další tvrzení, ještě se dohodněme, že symbol $V(A, B, C)$ bude mít význam definovaný vztahem (1) i v případě, že body A, B, C nebudou vrcholy trojúhelníku, tj. budou-li ležet na přímce. V tomto případě ovšem vyjde $V(A, B, C) = 0$.

Následující tvrzení je zřejmé – plyne přímo ze vztahu (1).

Věta 2.4.2. Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť pro body B', C' platí $C' - A = u(C - A)$, $B' - A = v(B - A)$. Potom

$$V(A, B', C') = |uv| \, V(A, B, C).$$

Z této věty okamžitě vyplývá:

Věta 2.4.3. Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť $B' \in AB$, $C' \in AC$. Potom je

$$V(A, B', C') \leqq V(A, B, C)$$

a rovnost v tomto vztahu platí právě tehdy, je-li $B = B'$ a $C = C'$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmé, neboť z $B' \in AB$ vyplývá, že $B' - A = v(B - A)$, přičemž $0 \leqq v \leqq 1$. Podobně $C' - A = u(C - A)$, přičemž $0 \leqq u \leqq 1$. Odtud již plyne tvrzení.

Věta 2.4.4. Mějme dán trojúhelník ABC. Nechť $B' \in AB$. Potom je

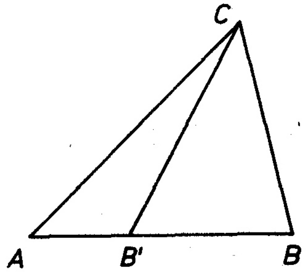
$$V(A, B, C) = V(A, B', C) + V(B', B, C).$$

Důkaz. Z $B' \in AB$ vyplývá, že $B' - A = c_1(B - A)$, $c_1 \geqq 0$ a zároveň $B' - B = c_2(A - B)$, $c_2 \geqq 0$, tj. $B - B' = c_2(B - A)$. Odtud vyplývá, že

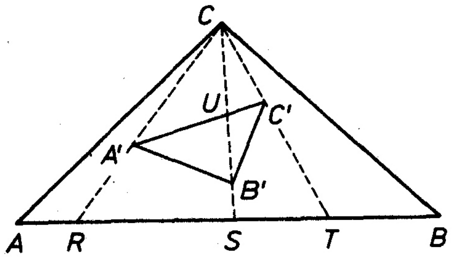
$$B - A = (B - B') + (B' - A) = (c_1 + c_2)(B - A),$$

a tedy $c_1 + c_2 = 1$ $(B - A \neq \mathbf{o})$. Avšak podle věty 2.4.2 $V(A, B', C) = c_1 V(A, B, C)$, $V(B, B', C) = c_2 V(B, A, C)$. Sečtením těchto vztahů dostáváme dokazované tvrzení.

Názorný význam věty 2.4.4 je patrný z obr. 17. Pomocí věty 2.4.4 bychom mohli zobecnit větu 2.4.3 tak, že jsou-li dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ a je $\triangle A'B'C' \subset \triangle ABC$, potom $V(A', B', C') \leqq V(A, B, C)$ a rovnost v tomto vztahu platí právě tehdy, je-li $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$ (tato rovnost ovšem znamená rovnost dvou množin a neznamená vůbec, že by např. muselo být $A = A'$).



Obr. 17



Obr. 18

Důkaz tohoto tvrzení je pro jednu možnou polohu možno sledovat na obr. 18. Jeho úplný důkaz by znamenal, že by se musela provést diskuse vzájemné polohy trojúhelníků ABC a $A'B'C'$. To však nebudeme provádět a spokojíme se s tvrzením vět 2.4.3 a 2.4.4. Platí

$$V(A, B, C) \geqq V(A, T, C) \geqq V(R, T, C).$$

Dále

$$V(R, S, C) \geqq V(A', B', C) \geqq V(A', B', U),$$
$$V(S, T, C) \geqq V(C', B', C) \geqq V(C', B', U).$$

Sečtením posledních dvou nerovností dostáváme podle věty 2.4.4, že $V(R, T, C) \geqq \geqq V(A', B', C')$, a tedy $V(A, B, C) \geqq V(A', B', C')$.

2.5. Aditivní míra úhlu

V tomto odstavci zavedeme tzv. aditivní míru úhlu, což je pojem, který odpovídá měření úhlu v radiánech, známém ze střední školy. Jak bylo řečeno na počátku kapitoly 2, zavedeme tuto míru dvěma způsoby – jednou bez znalosti gonio-

metrických funkcí, a podruhé pomocí goniometrické funkce cos. V prvním případě pak goniometrické funkce zadefinujeme. Cílem naší snahy bude, abychom každému úhlu α přiřadili číslo $m(\alpha)$ tak, že je-li α nenulový úhel, je $m(\alpha) \neq 0$, a jestliže pro úhly α', α'' platí

(1) $$\alpha' \cup \alpha'' = \alpha, \qquad \alpha' \cap \alpha'' = r,$$

kde r je společné rameno úhlů α' a α'', platí i

(2) $$m(\alpha) = m(\alpha') + m(\alpha'').$$

Při studiu lze, jak již bylo řečeno, jeden ze způsobů zavedení míry m vynechat.

V celém odstavci budeme předpokládat, že pracujeme v dané euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$ o zaměření $\mathbf{V}_2$.

I. Zavedení míry úhlu bez pomoci goniometrických funkcí

Než přistoupíme k vlastnímu obsahu této části, uvedeme několik jednoduchých pojmů a tvrzení. Těmito pojmy se budeme v obecnějším tvaru zabývat v příštím odstavci, avšak potřebujeme je již nyní.

Říkáme, že dvě přímky p a q jsou na sebe *kolmé*, jsou-li kolmá jejich zaměření. Mají-li tedy tyto přímky zaměření $[\{\boldsymbol{a}\}]$, $[\{\boldsymbol{b}\}]$, jsou na sebe kolmé právě tehdy, je-li $[\{\boldsymbol{b}\}] = [\{\boldsymbol{a}\}]^{\perp}$, nebo, což je totéž, je-li $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Zřejmě každým bodem $Q \in \mathbf{E}_2$ prochází právě jedna přímka q kolmá na danou přímku p. Průsečík R přímek p, q se nazývá pata kolmice q sestrojené z bodu Q na přímku p. Zvolíme nyní bod $X \in p$ a přesvědčíme se, že $|QX| \geqq |QR|$, přičemž znaménko rovnosti platí právě tehdy, je-li $X = R$. Skutečně, umocníme-li rovnost $Q - X = (Q - R) + (R - X)$ na druhou, dostáváme, protože vektory $Q - R$ a $R - X$ jsou k sobě ortogonální, $(Q - X)^2 = (Q - R)^2 + (R - X)^2$, neboli

(3) $$|QX|^2 = |QR|^2 + |RX|^2.$$

Odtud již plyne tvrzení. Dále je vidět, že zvolíme-li číslo $d > |QR|$, najdeme právě dva různé body $X_1, X_2 \in p$ tak, aby bylo $|QX_1| = |QX_2| = d$. Stačí totiž vypočítat vzdálenost $|RX_1| = |RX_2|$ pomocí vztahu (3). Bod R je pak středem dvojice bodů X_1, X_2. Pro každý bod $X \in X_1X_2$, $X_1 \neq X \neq X_2$ je nyní $|QX| < d$ a pro každý bod $X \notin X_1X_2$ je $|QX| > d$. Obě tyto nerovnosti plynou z rovnosti (3).

V odstavci 1.10 jsme se zabývali úhly v afinní rovině. Poznatky z tohoto odstavce využijeme nyní. Jedním ze základních pojmů, který jsme tam použili, bylo uspořádání $\precsim$ množiny $\mathbf{M}_p$ polopřímek s daným hraničním bodem P. Přitom množinu $\mathbf{M}_p$ tvořily všechny polopřímky s hraničním bodem P různé od dané polopřímky p, která měla též hraniční bod P. Pomocí tohoto uspořádání se každý úhel α s vrcholem P, pro který platilo $p \not\subset \alpha$, dal charakterizovat tak, že pro $X \neq P$ bylo $X \in \alpha$ právě tehdy, když

(4) $$r \precsim PX \precsim s.$$

Přitom r, s byla ramena úhlu α. Uspořádání $\lesssim$ bylo na množině $\mathbf{M}_p$ definováno pomocí polopřímky p a poloroviny $\mathbf{M}$, jejíž hraniční přímka obsahovala polopřímku p. Jestliže jsme ponechali polopřímku p a polorovinu $\mathbf{M}$ jsme nahradili polorovinou opačnou, dostali jsme opačné uspořádání.

Uspořádání $\lesssim$ definované na množině $\mathbf{M}_p$ nám dává samozřejmě též uspořádání množiny $\mathbf{M}'_\alpha$ všech polopřímek x s hraničním bodem P, pro něž je $x \subset \alpha$. Má-li úhel α ramena r, s a uspořádání $\lesssim$ je zvoleno tak, aby $r \lesssim s$, můžeme toto uspořádání na množině $\mathbf{M}'_\alpha$ charakterizovat také pomocí množinové inkluze. Je-li $x \in \mathbf{M}'_\alpha$, označme ξ úhel mající ramena r, x, pro nějž $\xi \subset \alpha$. Podobně pro $y \in \mathbf{M}'_\alpha$ sestrojíme úhel $\eta \subset \alpha$ s rameny r, y. Potom je $x \lesssim y$ právě tehdy, je-li $\xi \subset \eta$. Odtud vyplývá, že sestrojené uspořádání $\lesssim$ na množině $\mathbf{M}'_\alpha$ nezávisí na volbě polopřímky $p \not\subset \alpha$. Proto je oprávněná následující definice.

Definice 2.5.1. Nechť všechny použité symboly mají již zavedený význam. Mějme dále dány polopřímky $t_0, \ldots, t_k \in \mathbf{M}_p$, pro něž platí $r = t_0 \lesssim t_1 \lesssim \ldots \lesssim t_k = s$. Pro $i = 1, \ldots, k$ buď α_i úhel s rameny t_{i-1}, t_i, pro nějž $\alpha_i \subset \alpha$. Množinu úhlů $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ nazýváme *rozdělení úhlu* α.

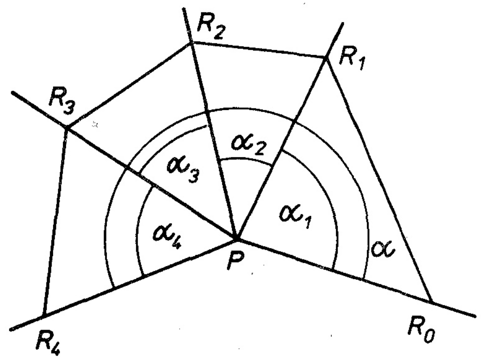
Úhly α_i bychom mohli charakterizovat podobně jako jsme úhel α charakterizovali pomocí relací (4). Je též vidět, že $\{\alpha', \alpha''\}$ (viz (1), (2)) je rozdělení úhlu α podle definice 2.5.1. Nejjednodušší případ rozdělení úhlu α zřejmě dostaneme, položíme-li $k = 1$ a $\alpha_1 = \alpha$ (to znamená $t_0 = r$, $t_1 = s$).

Definice 1.10.1 a 1.10.4 nám dávají rozlišení dutých a vypuklých úhlů. Přímo z těchto definic je patrné, že je-li α vypuklý úhel, existuje polorovina $\mathbf{M}$ tak, že $\mathbf{M} \subset \alpha$ a $\mathbf{M} \neq \alpha$, a je-li α dutý úhel, platí pro každou polorovinu $\mathbf{M}$, že $\mathbf{M} \not\subset \alpha$. Odtud vyplývá, že je-li $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ rozdělení dutého úhlu α, jsou všechny úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ duté. Snadno se můžeme přesvědčit, že i pro vypuklý nebo přímý úhel α existuje rozdělení na duté úhly, tj. existuje rozdělení $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ tak, že všechny úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou duté. Stačí k úhlu α zvolit polopřímku p (s hraničním bodem v jeho vrcholu) tak, aby bylo $p \not\subset \alpha$. Nechť nyní r, s jsou ramena úhlu α a $\bar{p}$ je polopřímka opačná k polopřímce p. Potom, označíme-li α_1, resp. α_2 dutý úhel o ramenech $r, \bar{p}$, resp. $\bar{p}, s$, je $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ hledané rozdělení úhlu α na duté úhly.

Nyní zavedeme následující označení: Mějme dán dutý úhel α o vrcholu P. Zvolme body $R, S \in \mathbf{E}_2$ tak, aby polopřímky $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ byly rameny úhlu α, a aby $|PR| = |PS| = 1$. Označme $V(\alpha) = 2V(P, A, B)$ ($V(P, A, B)$ je obsah trojúhelníku PAB). Buď nyní α libovolný úhel (dutý, přímý nebo vypuklý). Buď dále $\mathbf{D} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ rozdělení úhlu α na duté úhly. Označujeme

$$S(\mathbf{D}) = \sum_{i=1}^{k} V(\alpha_i).$$

Názorný význam čísla $S(\mathbf{D})$ ve fyzikální rovině vidíme na obr. 19. Je to obsah mnohoúhelníku $PR_0R_1R_2R_3R_4$. Vidíme, že budeme-li zvětšovat počet úhlů z rozdělení $\mathbf{D}$ a zároveň zmenšovat úhly α_i, $i = 1, \ldots, k$, bude se číslo $S(\mathbf{D})$ blížit k dvojnásobku obsahu kruhové výseče příslušné k úhlu α na jednotkové kružnici o středu P, což bude oblouková míra úhlu α. Tento postup nyní provedeme i v euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$. Nemůžeme při tom samozřejmě používat obsah mnohoúhelníku, kruhové výseče, ani jiné pojmy, které jsme dosud nezavedli.



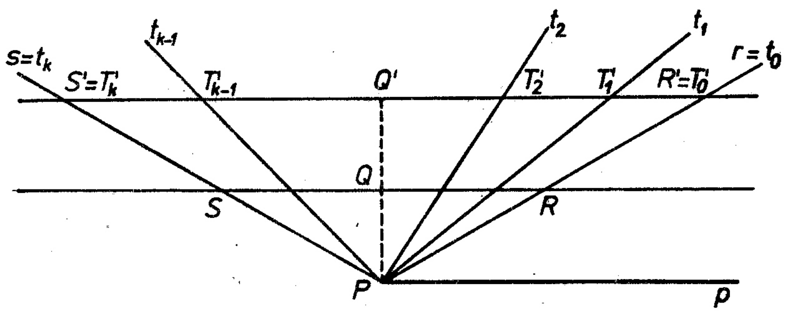
Obr. 19

Věta 2.5.1. Ke každému dutému úhlu α existuje číslo c tak, že je $S(\mathbf{D}) < c$ pro každé rozdělení $\mathbf{D}$ úhlu α.

Důkaz. Nechť $\alpha = \sphericalangle RPS$ a nechť $|RP| = |SP| = 1$. Buď Q pata kolmice sestrojené z bodu P na přímku $\overleftrightarrow{RS}$. Označme $u = |PQ|$. Zřejmě je $u > 0$. Proveďme stejnolehlost φ o středu P a koeficientu $1/u$. Označme $R' = \varphi(R)$, $S' = \varphi(S)$, $c = 2V(P, R', S')$. Ukážeme, že c je hledané číslo. Postup důkazu sledujeme na obr. 20. Je vidět, že $|PQ'| = 1$. Zvolme polopřímku p s hraničním bodem P tak, aby přímka ji obsahující byla rovnoběžná s přímkou $\overleftrightarrow{R'S'}$. Zřejmě $p \not\subset \alpha$. Nechť $\mathbf{D} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ a nechť toto rozdělení je dáno polopřímkami $r = t_0 \lesssim t_1 \lesssim \ldots \lesssim$ $\lesssim t_k = s$ jako v definici 2.5.1, přičemž $\lesssim$ je uspořádání na množině $\mathbf{M}_p$ sestrojené pomocí přímky p. Označme $\{T'_i\} = t_i \cap \overleftrightarrow{R'S'}$ pro $i = 0, \ldots, k$ (z definice uspořádání v odstavci 1.10 plyne, že skutečně $t_i \cap \overleftrightarrow{R'S'} \neq \emptyset$). Zřejmě při vhodně zvoleném uspořádání na přímce $\overleftrightarrow{R'S'}$ (viz odstavec 1.10) je $R' = T'_0 \lesssim T'_1 \lesssim \ldots \lesssim T'_k = S'$. Protože $|PQ'| = 1$, je podle (3) $|PT'_i| \geqq 0$ pro $i = 0, \ldots, k$ a $|PT'_0| > 0$, $|PT'_k| > 0$. Tudíž z věty 2.4.3 vyplývá, že je $V(\alpha_i) \leqq 2V(P, T'_{i-1}, T'_i)$ pro $i = 1, \ldots, k$, a dokonce $V(\alpha_1) < 2V(P, T'_0, T'_1)$, $V(\alpha_k) < 2V(P, T'_{k-1}, T'_k)$. Odtud podle věty 2.4.4 dostáváme, že

$$S(\mathbf{D}) < 2V(P, R', S') = c.$$

Jestliže budeme mít dáno rozdělení $\mathbf{D} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ úhlu α, můžeme z něho dostat další rozdělení tím, že úhly α_i budeme dále dělit. Toto rozdělení budeme nazývat zjemnění rozdělení $\mathbf{D}$. Přesně to formuluje následující definice.



Obr. 20

Definice 2.5.2. Buď $\mathbf{D} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ rozdělení úhlu α. Rozdělení $\mathbf{D}'$ úhlu α nazýváme *zjemnění rozdělení* $\mathbf{D}$, jestliže pro $i = 1, \ldots, k$ existuje rozdělení $\mathbf{D}_i$ úhlu α_i tak, že $\mathbf{D}' = \mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2 \cup \ldots \cup \mathbf{D}_k$.

Vidíme, že mezi zjemnění rozdělení $\mathbf{D}$ patří i samo rozdělení $\mathbf{D}$.

Věta 2.5.2. Buď α dutý úhel, buď $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ rozdělení úhlu α. Potom je

$$V(\alpha) < V(\alpha_1) + V(\alpha_2).$$

Důkaz. Buď $\alpha = \sphericalangle RPS$. Nechť body R, S jsou zvoleny tak, že $|PR| = |PS| = 1$. Nechť úhel α_1 má ramena $r = t_0, t_1$ a úhel α_2 má ramena t_1, t_2. Označíme $\{T_1\} = t_1 \cap \overleftrightarrow{RS}$. Ze vztahu (3) jsme na začátku odstavce ukázali, že $|PT_1| < |PR| = 1$. Buď $U \in t_1$, $|PU| = 1$. Nyní z vět 2.4.3 a 2.4.4 postupně dostáváme:

$$V(\alpha_1) + V(\alpha_2) = 2V(P, R, U) + 2V(P, U, S) < < 2V(P, R, T_1) + 2V(P, T_1, S) = 2V(P, R, S) = V(\alpha)$$

Z právě dokázané věty lze snadno dokázat analogické tvrzení pro libovolné rozdělení $\mathbf{D} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ dutého úhlu α. Důkaz indukcí si každý provede sám. Je

$$V(\alpha) < V(\alpha_1) + \ldots + V(\alpha_k).$$

Jednoduchým důsledkem obdrženého vztahu je následující věta.

Věta 2.5.3. Mějme dána rozdělení $\mathbf{D}$ a $\mathbf{D}'$ úhlu α na duté úhly. Nechť rozdělení $\mathbf{D}'$ je zjemněním rozdělení $\mathbf{D}$. Potom je $S(\mathbf{D}) \leqq S(\mathbf{D}')$ a $S(\mathbf{D}) = S(\mathbf{D}')$ platí právě tehdy, je-li $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$.

Snadno se přesvědčíme, že k dvěma libovolným rozdělením $\mathbf{D}$ a $\mathbf{D}'$ úhlu α existuje rozdělení $\mathbf{D}''$, které je zjemněním obou z nich. Máme-li rozdělení $\mathbf{D}$ dáno pomocí množiny polopřímek $\{t_0, \ldots, t_k\}$ (viz definice 2.5.1) a rozdělení $\mathbf{D}'$ analogicky pomocí množiny polopřímek $\{t_0', \ldots, t_{k'}'\}$, stačí sestrojit rozdělení $\mathbf{D}''$ pomocí množiny polopřímek $\{t_0, \ldots, t_k\} \cup \{t_0', \ldots, t_{k'}'\}$. Tuto množinu ovšem musíme nejdříve uspořádat pomocí uspořádání $\preceq$.

Definice 2.5.3. Mějme dán úhel α. Označme $\bar{\mathbf{D}}$ množinu všech rozdělení úhlu α na duté úhly. Číslo

$$m(\alpha) = \sup_{\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{D}}} S(\mathbf{D})$$

nazýváme *míra úhlu* α.

Nyní se přesvědčíme, že množina všech čísel $S(\mathbf{D})$, kde $\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{D}}$, je omezená, a že tudíž $m(\alpha) \in \mathbf{R}$. Buď $\mathbf{D}' \in \bar{\mathbf{D}}$, $\mathbf{D}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_{k'}'\}$. Podle věty 2.5.1 existuje ke každému úhlu α_i' číslo c_i' tak, že je $S(\mathbf{D}_i') < c_i'$ pro každé rozdělení $\mathbf{D}_i'$ úhlu α_i', $i = 1, \ldots, k'$. Tudíž je pro každé zjemnění $\mathbf{D}''$ rozdělení $\mathbf{D}'$ (viz definice 2.5.2) $S(\mathbf{D}'') < c_1' + \ldots + c_{k'}'$. Je-li nyní $\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{D}}$ libovolné rozdělení, zvolíme rozdělení $\mathbf{D}''$ tak, aby bylo zjemněním rozdělení $\mathbf{D}$ i rozdělení $\mathbf{D}'$, a podle věty 2.5.3 dostáváme

$$S(\mathbf{D}) \leqq S(\mathbf{D}'') < c_1' + \ldots + c_{k'}'.$$

Tím je omezenost množiny všech čísel $S(\mathbf{D})$, kde $\mathbf{D} \in \bar{\mathbf{D}}$, dokázána.

V druhém dílu učebnice budou podrobně rozebrána tzv. shodná zobrazení v euklidovském prostoru. Alespoň částečně se však s nimi musíme seznámit již nyní: *Shodné zobrazení* euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ do euklidovského prostoru $\mathbf{E}_m'$ je takové afinní zobrazení φ $\mathbf{E}_n$ do $\mathbf{E}_m'$, že asociovaný homomorfismus $\bar{\varphi}$ zachovává skalární součin, tj. že pro každé dva vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$ ($\mathbf{V}_n$ je zaměření $\mathbf{E}_n$) je

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \bar{\varphi}(\boldsymbol{u}) \cdot \bar{\varphi}(\boldsymbol{v}).$$

Položíme-li v tomto vztahu $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, dostaneme, že musí být $\|\boldsymbol{u}\| = \|\bar{\varphi}(\boldsymbol{u})\|$, a tudíž homomorfismus $\bar{\varphi}$ je prostý, neboť pro $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ je i $\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}) \neq \boldsymbol{o}$. Odtud vyplývá, že musí být $m \geqq n$, a je-li $m = n$, je homomorfismus $\bar{\varphi}$ izomorfismem a zobrazení φ je vzájemně jednoznačné. Přímo z definice vzdálenosti dvou bodů plyne, že pro každé dva body $X, Y \in \mathbf{E}_n$ je $|XY| = |\varphi(X)\varphi(Y)|$. Zřejmě obrazem ortonormální báze při homomorfismu $\bar{\varphi}$ jsou ortonormální vektory, a je-li $m = n$, je to opět ortonormální báze. Buď nyní $P \in \mathbf{E}_n$, $P' \in \mathbf{E}_m'$, $\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$ buď ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}_n$ a $\boldsymbol{u}_1', \ldots, \boldsymbol{u}_n'$ nechť jsou ortonormální vektory v prostoru $\mathbf{V}_m'$ (zaměření prostoru $\mathbf{E}_m'$). Víme, že existuje právě jedno afinní zobrazení φ prostoru $\mathbf{E}_n$ do prostoru $\mathbf{E}_m'$ tak, že $\varphi(P) = P'$ a $\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{u}_i'$ pro $i = 1, \ldots, n$. Potom pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{V}_n$, $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + y_n\boldsymbol{u}_n$, je $\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}) = x_1\boldsymbol{u}_1' + \ldots + x_n\boldsymbol{u}_n'$, $\bar{\varphi}(\boldsymbol{y}) = y_1\boldsymbol{u}_1' + \ldots + y_n\boldsymbol{u}_n'$, a tedy

$$\bar{\varphi}(\boldsymbol{x}) \cdot \bar{\varphi}(\boldsymbol{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}.$$

Afinní zobrazení φ je tedy shodné zobrazení. Afinní zobrazení prostoru $\mathbf{E}_n$ do sebe (a tudíž i na sebe) se nazývá *shodná transformace* prostoru $\mathbf{E}_n$ nebo jenom *shodnost* v $\mathbf{E}_n$. Nadále použijeme hlavně shodnost v rovině $\mathbf{E}_2$.

Snadno se zjistí, že obrazem trojúhelníku při shodnosti je opět trojúhelník, dokonce trojúhelník o stejném obsahu. Též je zřejmé, že úhel se při shodném zobrazení zobrazí na úhel, rozdělení $\mathbf{D}$ úhlu α se zobrazí na rozdělení $\mathbf{D}'$ jeho obrazu α' a je $S(\mathbf{D}) = S(\mathbf{D}')$ (číslo $S(\mathbf{D})$ je definováno pomocí obsahu trojúhelníků). Odtud již vyplývá, že úhel i jeho obraz při shodném zobrazení mají stejnou míru. Budeme-li mít dány dvě množiny $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ bodů prostoru $\mathbf{E}_n$, řekneme, že jsou shodné, jestliže existuje shodná transformace φ prostoru $\mathbf{E}_n$ tak, že $\varphi(\mathbf{M}_1) = \mathbf{M}_2$. Z toho, co jsme již řekli, tedy vyplývá, že shodné úhly mají stejnou míru. Snadno se lze přesvědčit, že každé dva přímé úhly jsou shodné, a tudíž mají stejnou míru. Míru přímého úhlu budeme označovat číslem π.

Věta 2.5.4. Buď $\{\alpha', \alpha''\}$ rozdělení úhlu α. Potom je

$$m(\alpha) = m(\alpha') + m(\alpha'').$$

Důkaz. Je-li $\mathbf{D}'$ rozdělení na duté úhly úhlu α' a $\mathbf{D}''$ rozdělení na duté úhly úhlu α'', je $\mathbf{D} = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$ rozdělení na duté úhly úhlu α. Potom

$$S(\mathbf{D}) = S(\mathbf{D}') + S(\mathbf{D}''). \tag{5}$$

Protože ke každému $\mathbf{D}'$ a každému $\mathbf{D}''$ existuje $\mathbf{D}$ tak, že platí rovnost (5), dostáváme přechodem k suprému

$$m(\alpha) \geqq m(\alpha') + m(\alpha'').$$

Nechť nyní obráceně máme dáno rozdělení na duté úhly úhlu α – označíme ho $\mathbf{D}$. Sestrojíme společné zjemnění $\mathbf{D}_1$ rozdělení $\mathbf{D}$ a rozdělení $\{\alpha', \alpha''\}$. Potom existují rozdělení $\mathbf{D}'$ úhlu α' a $\mathbf{D}''$ úhlu α'' tak, že $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$. Máme

$$S(\mathbf{D}) \leqq S(\mathbf{D}_1) = S(\mathbf{D}') + S(\mathbf{D}'').$$

Protože ke každému $\mathbf{D}$ existují $\mathbf{D}'$ a $\mathbf{D}''$ tak, že platí tato nerovnost, dostaneme přechodem k suprému

$$m(\alpha) \leqq m(\alpha') + m(\alpha'').$$

Tím je věta dokázána.

Jako důsledek této věty dokážeme snadno indukcí následující větu.

Věta 2.5.5. Buď $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ rozdělení úhlu α. Potom je

$$m(\alpha) = m(\alpha_1) + \ldots + m(\alpha_k).$$

Věta 2.5.6. Mějme dány úhly α, β o společném vrcholu P. Nechť $\beta \subset \alpha$. Potom je $m(\beta) \leqq m(\alpha)$ a $m(\alpha) = m(\beta)$ právě tehdy, je-li $\beta = \alpha$.

Důkaz. Snadno sestrojíme rozdělení $\mathbf{D}$ úhlu α tak, aby bylo $\beta \in \mathbf{D}$. Tvrzení nyní plyne z předešlé věty.

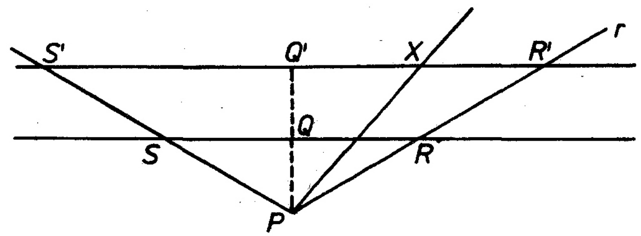
Definice 2.5.4. Říkáme, že úhel $\alpha = \sphericalangle RPS$ je *pravý*, je-li $(R - P) \cdot (S - P) = 0$.

Je zřejmé, že každé dva pravé úhly jsou shodné. Též je zřejmé, že každý přímý úhel α můžeme rozdělit na dva pravé úhly. Odtud vyplývá, že míra pravého úhlu je číslo $\pi/2$. Je zřejmé, jak dodefinujeme míru nulového úhlu.

Definice 2.5.5. Je-li úhel α nulový, definitoricky klademe $m(\alpha) = 0$.

Věta 2.5.7. Buď α úhel s ramenem r. Buď $c \in \mathbf{R}$, $0 < c \leqq m(\alpha)$. Potom existuje právě jeden úhel γ tak, že $\gamma \subset \alpha$, úhly γ a α mají společné rameno r a $m(\gamma) = c$.

Důkaz. 1. Nechť nejdříve úhel α je dutý, $\alpha = \sphericalangle RPS$. Postup důkazu můžeme sledovat na obr. 21. Předpokládejme, že body R, S jsou zvoleny tak, že $|PR| = |PS| = 1$. Označíme Q patu kolmice sestrojené bodem P na přímku $\overleftrightarrow{RS}$.



Obr. 21

Provedeme stejnolehlost φ o středu P a koeficientu $1/|PQ|$. Označíme $R' = \varphi(R)$, $S' = \varphi(S)$, $Q' = \varphi(Q)$. Zřejmě je $|PQ'| = 1$. (Tento postup jsme již jednou prováděli při důkazu věty 2.5.1.) Zvolíme kartézský repér $\langle Q', \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ tak, aby bylo $\boldsymbol{u}_2 = P - Q'$. Potom zřejmě $[Q'; \boldsymbol{u}_1] = \overleftrightarrow{R'S'}$. Můžeme psát $R' = Q' + r'\boldsymbol{u}_1$, $S' = Q' + s'\boldsymbol{u}_1$ (víme, že $r' = -s'$). Nechť např. $r' < s'$. Pro každé $x \in \langle r', s' \rangle$ označíme $X = Q' + x\boldsymbol{u}_1$ a položme

$$M(x) = m(\sphericalangle R'PX)$$

(zřejmě $M(r') = 0$). Zvolme body $X_i = Q' + x_i\boldsymbol{u}_1$, $i = 1, 2$. Určíme-li číslo $S(\mathbf{D})$ pro každé rozdělení $\mathbf{D}$ úhlu X_1PX_2, zjistíme podle věty 2.4.3 a 2.4.4 (popřípadě viz též věta 2.5.1), že $S(\mathbf{D}) < 2V(P, X_1, X_2)$, a tedy $m(\sphericalangle X_1PX_2) \leqq 2V(P, X_1, X_2)$. Ale

$$2V(P, X_1, X_2) = \left\| \begin{matrix} x_1, & -1 \\ x_2, & -1 \end{matrix} \right\| = |x_2 - x_1|.$$

Bude-li $r' \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq s'$, dostaneme podle věty 2.5.4, že $m(\sphericalangle RPX_1) + m(\sphericalangle X_1PX_2) = m(\sphericalangle RPX_2)$, a tedy

$$0 < M(x_2) - M(x_1) \leqq x_2 - x_1.$$

Odtud okamžitě vyplývá, že funkce M je spojitá (dokonce je monotónní), a z věty o tom, že spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá všech hodnot ležících mezi hodnotami v krajních bodech definičního oboru, vyplývá, že existuje $x_0 \in \langle r', s' \rangle$ tak, že $M(x_0) = c$. Označíme-li $X_0 = Q + x_0 \boldsymbol{u}_1$, je $\gamma = \sphericalangle RPX_0$. Že úhel γ je určen jednoznačně, plyne z toho, že funkce $M(x)$ je monotónní.

2. Nechť nyní α je přímý nebo vypuklý úhel. Rozdělíme ho polopřímkou t na dva duté úhly α', α''. Je-li $m(\alpha') \geqq c$, najdeme úhel $\gamma \subset \alpha' \subset \alpha$ podle první části důkazu. Je-li $m(\alpha') < c$, položíme $c' = c - m(\alpha')$ a najdeme úhel $\gamma' \subset \alpha''$ mající rameno t tak, že $m(\gamma') = c'$. (Protože $c \leqq m(\alpha) = m(\alpha') + m(\alpha'')$, je $c' \leqq m(\alpha'')$). Nyní stačí položit $\gamma = \alpha' \cup \gamma'$. Jednoznačnost plyne z bodu 1.

Následující věta snadno plyne z právě dokázané věty.

Věta 2.5.8. Mějme dánu polopřímku r a číslo c, $0 < c < 2\pi$. Potom existuje úhel α mající rameno r tak, že $m(\alpha) = c$.

Důkaz. Sestrojíme přímý úhel β mající rameno r. Opačnou polorovinu označme β' a opačnou polopřímku k r označme r'. Je-li $c \leqq \pi$, najdeme $\alpha < \beta$ podle předešlé věty. Je-li $c > \pi$, položíme $c' = c - \pi$ a najdeme $\gamma \subset \beta'$ s ramenem r' tak, aby $m(\gamma) = c'$. Potom $\alpha = \beta \cup \gamma$.

V důkazech posledních dvou vět jsme použili to, že vypuklý úhel můžeme vyjádřit jako sjednocení úhlu přímého s úhlem dutým. Použitím tohoto obratu též snadno dokážeme další větu. Její důkaz ponecháme jako cvičení.

Věta 2.5.9. Pro každý úhel α platí $m(\alpha) < 2\pi$.

Již jsme konstatovali, že shodné úhly mají stejnou míru. Pomocí věty 2.5.7 snadno dokážeme, že obráceně platí: Mají-li dva úhly stejnou míru, jsou shodné. Tvrzení dokážeme nejdříve pro dva konvexní úhly (duté nebo přímé). Jsou-li α, α' dva takové úhly, tj. $m(\alpha) = m(\alpha') \leqq \pi$, sestrojíme přímé úhly β, β' tak, že α a β, resp. α' a β' mají společné rameno r, resp. r' a že $\alpha \subset \beta$, resp. $\alpha' \subset \beta'$. Nyní snadno najdeme shodnost φ, pro kterou $\varphi(r) = r'$ a $\varphi(\beta) = \beta'$ (shodnost zadáme obrazem vhodně zvoleného kartézského repéru). Protože $m(\alpha) = m(\varphi(\alpha)) = m(\alpha')$, úhly $\varphi(\alpha)$ a α' mají společné rameno r' a $\varphi(\alpha') \subset \beta'$, platí podle věty 2.5.7 $\alpha' = \varphi(\alpha)$. Pro vypuklé úhly dokážeme tvrzení opět známým obratem – rozložením vypuklého úhlu na sjednocení úhlu přímého a úhlu dutého. Dokázali jsme dokonce nejen to, že úhly α a α' jsou shodné, ale i to, že shodnost můžeme sestrojit tak, aby zvolené rameno úhlu α převáděla do zvoleného ramene úhlu α'.

Nyní zavedeme orientované úhly. K tomu však budeme potřebovat pojem „přímá shodnost". V odstavci 1.13 jsme zavedli pojem „souhlasné báze". Mějme ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ dány dvě souhlasné báze $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$, tzn. že $D(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) > 0$ ($D(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ je determinant přechodu od báze $\mathscr{B}_2$ k bázi $\mathscr{B}_1$). Zobrazíme-li báze $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ automorfismem φ do bází $\mathscr{B}'_1 = \varphi(\mathscr{B}_1)$, $\mathscr{B}'_2 = \varphi(\mathscr{B}_2)$, plyne z vlastností

izomorfismu, že $\boldsymbol{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = \boldsymbol{M}(\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2)$ ($\boldsymbol{M}(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ je matice přechodu od báze $\mathscr{B}_2$ k bázi $\mathscr{B}_1$), a tedy $D(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2) = D(\mathscr{B}'_1, \mathscr{B}'_2)$. Tudíž máme-li na vektorovém prostoru $\mathbf{V}_n$ dánu orientaci, tak zobrazíme-li automorfismem φ jednu kladnou bázi opět do kladné báze, zobrazíme již každou kladnou bázi do kladné báze, a zobrazíme-li jednu kladnou bázi do záporné báze, zobrazíme každou kladnou bázi do záporné báze. Nyní již lze zavést „přímou shodnost". Shodná transformace φ orientovaného prostoru $\mathbf{E}_n$ se nazývá *přímá shodná transformace*, nebo jen *přímá shodnost*, jestliže asociovaný automorfismus $\bar{\varphi}$ zobrazuje kladné báze prostoru $\mathbf{V}_n$ opět na kladné báze prostoru $\mathbf{V}_n$.

Předpokládejme, že od této chvíle pracujeme v orientované euklidovské rovině $\mathbf{E}_2$ se zaměřením $\mathbf{V}_2$. Nyní již můžeme definovat orientovaný úhel. Při jeho definici budeme předpokládat, že nulový úhel má dvě splývající ramena.

Definice 2.5.6. Mějme dán úhel α s rameny r, s. Jestliže ramena úhlu seřadíme do uspořádané dvojice, říkáme, že jsme úhel α orientovali a nazýváme ho pak *orientovaný úhel.*

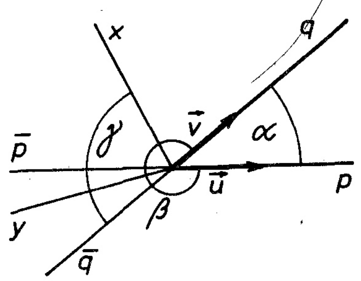
Je zřejmé, že každý nenulový úhel můžeme orientovat právě dvěma způsoby, zatímco nulový úhel jediným způsobem. Nemusíme proto rozlišovat neorientovaný a orientovaný nulový úhel.

Teď si ukážeme souvislost mezi orientací roviny a uspořádáním na množině polopřímek $\mathbf{M}_p$. Nechť $p = \overline{PQ}$. Zvolíme kladnou bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ tak, aby $\boldsymbol{u}_1 = c(Q - P)$, kde $c > 0$. Bude-li $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ jiná kladná báze, pro kterou $\boldsymbol{v}_1 = (Q - P) . d, d > 0$, napíšeme $\boldsymbol{v}_2 = v_{21}\boldsymbol{u}_1 + v_{22}\boldsymbol{u}_2$, dále je $\boldsymbol{v}_1 = (d/c)\,\boldsymbol{u}_1$ a musí být

$$\begin{vmatrix} d/c, & 0 \\ v_{21}, & v_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

a tedy $v_{22} > 0$. Označme $A = P + \boldsymbol{u}_2$. Vidíme, že pro všechny kladné báze $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ je $P + \boldsymbol{v}_2 \in \overline{PQA}$. Toto tvrzení můžeme zřejmě obrátit. Je-li $B \in \overline{PQ}$, $B \neq P$, $C \in \overline{PQA}$, $C \notin \overleftrightarrow{PQ}$, je $\langle B - P, C - P \rangle$ kladná báze. Tudíž zvolíme-li orientaci, je tím ke každé polopřímce $\overline{PQ}$ jednoznačně určena jedna ze dvou polorovin s hraniční přímkou $\overleftrightarrow{PQ}$. Je to ta polorovina $\mathbf{M}$, v níž leží koncové body druhých vektorů kladných bází, umísťujeme-li je počátkem do bodu P a volíme-li za první vektor báze vektor $Q - P$, popřípadě nějaký jeho kladný násobek. Volbou polopřímky $p = \overline{PQ}$ a poloroviny s hraniční přímkou $\overleftrightarrow{PQ}$ je však již jednoznačně určeno uspořádání $\leqq$ na množině $\mathbf{M}_p$. Změníme-li orientaci na opačnou, dostaneme místo poloroviny $\mathbf{M}$ opačnou polorovinu $\bar{\mathbf{M}}$ a uspořádání $\leqq$ se změní též na opačné. Budeme tedy říkat, že uspořádání $\leqq$ je určeno polopřímkou p.

Mějme nyní dány dvě polopřímky p, q se společným hraničním bodem P. Polopřímka p, resp. q určuje na množině $\mathbf{M}_p$, resp. $\mathbf{M}_q$ uspořádání – označme je $\leqq_p$, resp. $\leqq_q$. Obě polopřímky p, q jsou rameny dvou úhlů v rovině – označme je α, β. Přitom buď oba úhly α, β jsou přímé, nebo je jeden z nich dutý, nechť je to např. α, a druhý je vypuklý. Utvořme množinu $\mathbf{M}'_\alpha$, resp. $\mathbf{M}'_\beta$ těch polopřímek $x \in \mathbf{M}_p \cap \mathbf{M}_q$, pro něž je $x \subset \alpha$, resp. $x \subset \beta$. Ukážeme, že jak na množině $\mathbf{M}'_\alpha$, tak na množině $\mathbf{M}'_\beta$ obě uspořádání $\leqq_p$ a $\leqq_q$ splývají. Nechť nejdříve α, β jsou přímé úhly. Potom polopřímky p, q jsou opačné polopřímky a α, β jsou opačné poloroviny. Tvrzení nyní okamžitě vyplývá ze zavedení uspořádání $\leqq_p$ a $\leqq_q$ (viz též odstavec 1.10). Podrobné provedení důkazu ponecháme jako cvičení. Nechť nyní úhel α je dutý a úhel β je vypuklý. Buď $x, y \in \mathbf{M}'_\beta$. Označme $\bar{p}$, resp. $\bar{q}$ polopřímku opačnou k polopřímce p, resp. q. Platí $\bar{p}, \bar{q} \in \mathbf{M}'_\beta$. Snadno lze najít úhel $\gamma \subset \beta$ o stejném vrcholu, pro nějž platí $x, y, \bar{p}, \bar{q} \subset \gamma$, $p, q \not\subset \gamma$ (viz obr. 22). Víme, že uspořádání $\leqq_p$, $\leqq_q$ na úhlu γ mohou být buď stejná, nebo opačná (viz postup provedený před definicí 2.5.1). Stačí tedy ověřit, že souhlasí na dvojici polopřímek $\bar{p}, \bar{q}$. Nechť polopřímka p je určena vektorem $\boldsymbol{u}$, tj. $p = \{P + t\boldsymbol{u};\ t \geqq 0\}$, a podobně polopřímka q nechť je určena vektorem $\boldsymbol{v}$. Potom polopřímka $\bar{p}$ je určena vektorem $-\boldsymbol{u}$ a polopřímka $\bar{q}$ vektorem $-\boldsymbol{v}$. Nechť např. vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ tvoří kladnou bázi.



Obr. 22

Potom je $q \leqq_p \bar{p} \leqq_p \bar{q}$. Vektory $\boldsymbol{v}$, $-\boldsymbol{u}$ tvoří také kladnou bázi, a proto $\bar{p} \leqq_q \bar{q} \leqq_q p$. Tudíž uspořádání $\leqq_p$ a $\leqq_q$ souhlasí na dvojici $\bar{p}, \bar{q}$, a proto je $x \leqq_p y$ právě tehdy, je-li $x \leqq_q y$. Tudíž uspořádání $\leqq_p$ a $\leqq_q$ splývají na množině $\mathbf{M}'_\beta$. Nyní vyšetříme obě uspořádání na množině $\mathbf{M}'_\alpha$. Buďte σ, τ přímé úhly, pro něž $\sigma \cap \tau = \alpha$. Nechť přímý úhel σ, resp. τ má ramena $p, \bar{p}$, resp. $q, \bar{q}$. Označme ještě $\sigma \cup \tau = \delta$. Dostali jsme vypuklý úhel s rameny $\bar{p}, \bar{q}$, pro nějž zřejmě $\alpha \subset \delta$. Nyní podle již dokázaných tvrzení uspořádání $\leqq_p$ splývá na množině $\mathbf{M}'_\sigma$ s uspořádáním $\leqq_{\bar{p}}$, to splývá na množině $\mathbf{M}'_\delta$ s uspořádáním $\leqq_{\bar{q}}$ a to splývá na množině $\mathbf{M}'_\tau$ s uspořádáním $\leqq_q$. Odtud již plyne dokazované tvrzení.

Právě dokázané tvrzení nám umožní definovat míru orientovaného úhlu.

Definice 2.5.7. Mějme dán orientovaný úhel ω s uspořádanou dvojicí ramen (r, s). Buď $\bar{\omega}$ neorientovaný úhel, jehož orientací úhel ω vznikl. Buď dále p polopřímka s hraničním bodem ve vrcholu úhlu $\bar{\omega}$, pro niž $p \not\subset \bar{\omega}$, a nechť $\leqq$ je

uspořádání určené polopřímkou p na množině $\mathbf{M}_p$. *Mírou orientovaného úhlu* ω nazýváme číslo $m'(\omega)$, pro něž platí $m'(\omega) = m(\bar{\omega})$, je-li $r \leqq s$ a $m'(\omega) = -m(\bar{\omega})$, je-li $s \leqq r$.

Právě vyslovená definice je zřejmě oprávněná, neboť jsme předem dokázali, že to, jestli je $r \leqq s$, nezávisí na volbě polopřímky p.

Pruh nad symbolem označujícím orientovaný úhel budeme ve stejném významu jako v definici 2.5.7 používat až do konce tohoto odstavce.

Přímo z definice míry orientovaného úhlu vyplývá, že pro každý orientovaný úhel α je $-2\pi < m(\alpha) < 2\pi$, a že ke každému číslu $c \in (-2\pi, 2\pi)$ existuje orientovaný úhel γ tak, že $m'(\gamma) = c$.

Mějme dán orientovaný úhel ω s uspořádanou dvojicí ramen (r, s). Nechť dále φ je přímá shodnost. Obrazem orientovaného úhlu ω při shodnosti φ nazýváme orientovaný úhel, který dostaneme, orientujeme-li úhel $\varphi(\bar{\omega})$ uspořádáním jeho ramen $\varphi(r)$, $\varphi(s)$ do dvojice $(\varphi(r), \varphi(s))$, tj. první rameno vzoru se musí zobrazit na první rameno obrazu. Míru orientovaného úhlu jsme definovali pomocí míry neorientovaného úhlu, která se zachovává při každé shodnosti a pomocí uspořádání $\leqq$, které bylo dáno orientací. Protože přímá shodnost zachovává orientaci (zobrazuje kladnou bázi opět do kladné báze), je míra orientovaného úhlu rovna míře jeho obrazu při přímé shodnosti.

Předpokládejme obráceně, že pro dva orientované úhly α a β je $m'(\alpha) = m'(\beta)$, a tudíž i $m(\bar{\alpha}) = m(\bar{\beta})$. Nechť uspořádaná dvojice ramen úhlu α, resp. β je (r, s), resp. (u, v). Víme, že existuje shodnost φ tak, že $\varphi(\bar{\alpha}) = \bar{\beta}$ a přitom $\varphi(r) = u$, a tedy $\varphi(s) = v$. Zbývá ověřit, že φ je přímá shodnost. Buď P vrchol úhlu α. Zvolme $p = \overrightarrow{PQ}$ tak, aby $p \not\subset \alpha$. Nechť uspořádání $\leqq$ na množině $\mathbf{M}_p$ je dáno kladnou bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ (viz postup za definicí 2.5.6). Nechť např. $r \leqq s$ (případ $s \leqq r$ je analogický). Označme $p' = \varphi(p)$. Ze zavedení uspořádání $\leqq$ v odstavci 1.10 se snadno dokáže, že je $\varphi(r) \leqq \varphi(s)$ v uspořádání definovaném na množině $\mathbf{M}_{p'}$ bází $\langle \bar{\varphi}(\boldsymbol{u}_1), \bar{\varphi}(\boldsymbol{u}_2) \rangle$. Z rovnosti $m(\alpha) = m(\beta)$ však plyne, že je i $u \leqq v$ v uspořádání určeném na množině $\mathbf{M}_{p'}$ kladnou bází. Tudíž $\langle \bar{\varphi}(\boldsymbol{u}_1), \bar{\varphi}(\boldsymbol{u}_2) \rangle$ je kladná báze a shodnost φ je přímá.

Definice 2.5.8. Buďte α s dvojicí ramen (r, s) a β s dvojicí ramen (s, t) orientované úhly. Nechť $\bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$ je úhel. Zvolme polopřímku p s hraničním bodem ve vrcholu úhlů $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ tak, aby $p \not\subset \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$. Potom orientovaný úhel γ s uspořádanou dvojicí ramen (r, t), pro který platí $p \not\subset \bar{\gamma}$, nazýváme *součet orientovaných úhlů* α a β a píšeme

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

Tudíž pro orientované úhly je definováno sčítání jen tehdy, splývá-li druhé rameno prvního úhlu s prvním ramenem druhého úhlu.

Věta 2.5.10. Buďte α, β orientované úhly. Nechť je definován součet $\alpha + \beta$. Potom

$$m'(\alpha + \beta) = m'(\alpha) + m'(\beta).$$

Důkaz. Zvolíme polopřímku p jako v definici 2.5.8. Na množině $\mathbf{M}_p$ je tím dáno uspořádání $\preceq$. Další důkaz provádíme diskusí podle uspořádání polopřímek r, s, t (celkem šest možností). Nechť např. $s \preceq r \preceq t$. Označíme-li $\gamma = \alpha + \beta$, je $\bar{\beta} = \bar{\alpha} \cup \bar{\gamma}$ a podle věty 2.5.4

$$m(\bar{\beta}) = m(\bar{\alpha}) + m(\bar{\gamma}). \tag{6}$$

Přitom je $m'(\alpha) = -m(\bar{\alpha})$, neboť $s \preceq r$, $m'(\beta) = m(\bar{\beta})$, $m'(\gamma) = m(\bar{\gamma})$. Dosadíme-li odtud do (6), dostaneme po úpravě $m'(\gamma) = m'(\alpha) + m'(\beta)$. Stejným způsobem lze snadno vyšetřit zbývajících pět případů.

Nyní již můžeme zavést základní goniometrické funkce cos a sin a dokázat pro ně součtové vzorce.

Definice 2.5.9. Mějme dáno číslo $x \in (-2\pi, 2\pi)$. Buď ξ orientovaný úhel s dvojicí ramen (r, s), pro nějž $m'(\xi) = x$. Nechť $r = \overrightarrow{PR}$, $s = \overrightarrow{PS}$. Číslo

$$\frac{(R - P)(S - P)}{\|R - P\|\,\|S - P\|}$$

nazýváme *kosinus* čísla x a označujeme ho symbolem $\cos x$. Číslo

$$\frac{[R - P, S - P]}{\|R - P\|\,\|S - P\|}$$

nazýváme *sinus* čísla x a označujeme ho $\sin x$.

Snadno ověříme, že právě vyslovená definice je oprávněná, tj., že nezávisí na volbě úhlu ξ. Na první pohled je zřejmé, že čísla $\cos x$ a $\sin x$ nezávisí na volbě vektorů určujících ramena úhlu ξ. Kdybychom místo vektorů $R - P$, $S - P$ vzali vektory $\boldsymbol{u} = c(R - P)$, $\boldsymbol{v} = d(S - P)$, kde $c, d > 0$, zřejmě by bylo

$$\cos x = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}, \tag{7}$$

$$\sin x = \frac{[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}. \tag{8}$$

Nechť nyní ξ' je jiný orientovaný úhel, pro který je $m'(\xi') = x$. Potom, jak jsme již dokázali, existuje přímá shodnost φ tak, že $\varphi(\xi) = \xi'$. Z definice shodnosti vyplývá, že $\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}) \cdot \bar{\varphi}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$, $\|\bar{\varphi}(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$, $\|\bar{\varphi}(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$, a z definice přímé shodnosti plyne, že je ještě $[\bar{\varphi}(\boldsymbol{u}), \bar{\varphi}(\boldsymbol{v})] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$. Tím je nezávislost hodnot $\cos x$, $\sin x$ na volbě orientovaného úhlu ξ dokázána.

Přímo ze vzorců (7), (8) vyplývá, že $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. Z věty 2.2.3 plyne, že

$$[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}^2, & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{v}^2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{u}^2\boldsymbol{v}^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2.$$

Odtud dostáváme

$$\frac{[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^2}{\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2} + \frac{(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2}{\boldsymbol{u}^2 \cdot \boldsymbol{v}^2} = 1, \tag{9}$$

neboli

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Vidíme též, že číslo $\cos x$ definované vztahem (7) (popřípadě definicí 2.5.9) nezávisí na pořadí vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, a tedy ani na pořadí ramen úhlu ξ. Funkce cos na intervalu $\langle 0, 2\pi)$ by šla tedy zavést bez pomoci orientovaných úhlů.

Věta 2.5.11. Buď $x, y, z \in (-2\pi, 2\pi)$. Nechť $z = x + y$. Potom existují orientované úhly ξ, η, ζ tak, že $m'(\xi) = x$, $m'(\eta) = y$, $m'(\zeta) = z$, a že $\zeta = \xi + \eta$.

Důkaz. Postup dokazování je do značné míry obrácený k důkazu věty 2.5.10. Rovnost $z = x + y$ platí právě tehdy, nastane-li jeden z následujících šesti případů:

1. $|z| = |x| + |y|$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
2. $|z| = |x| + |y|$, $x \leqq 0$, $y \leqq 0$, $z \leqq 0$
3. $|x| = |z| + |y|$, $x \geqq 0$, $y \leqq 0$, $z \geqq 0$
4. $|x| = |z| + |y|$, $x \leqq 0$, $y \geqq 0$, $z \leqq 0$
5. $|y| = |z| + |x|$, $x \leqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$
6. $|y| = |z| + |x|$, $x \geqq 0$, $y \leqq 0$, $z \leqq 0$

Ve všech případech dokážeme tvrzení věty. Nechť např. nastává případ 6. Podle věty 2.5.8 existuje úhel $\bar{\eta}$ (neorientovaný) tak, že $m(\bar{\eta}) = |y|$. Zvolme opět polopřímku $p \not\subset \bar{\eta}$ s hraničním bodem ve vrcholu úhlu $\bar{\eta}$. Nechť ramena s, r máme označena tak, že $s \preceq r$ při uspořádání určeném polopřímkou p na množině $\mathbf{M}_p$. Úhel $\bar{\eta}$ s uspořádanou dvojicí ramen (r, s) pak dává orientovaný úhel η, pro nějž je $m'(\eta) = -m(\bar{\eta}) = y$. Podle věty 2.5.7 existuje úhel $\bar{\xi} \subset \bar{\eta}$ tak, že $m(\bar{\xi}) = |x|$ a že jeho ramena jsou s, t. Potom je $s \preceq t \preceq r$, a tudíž úhel $\bar{\xi}$ s uspořádanou dvojicí ramen (s, t) dává úhel ξ, pro nějž $m'(\xi) = m(\bar{\xi}) = |x| = x$. Úhel $\zeta = \xi + \eta$ je podle věty 2.5.10 hledaný úhel. Stejným způsobem bychom rozebrali i ostatní možnosti.

Věta 2.5.12. Buď $x, y, x + y \in (-2\pi, 2\pi)$. Potom platí:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Důkaz. K číslům $x, y, x + y$ sestrojíme úhly ξ, η, ζ tak, aby tyto úhly měly po řadě uspořádané dvojice ramen (r, s), (s, t), (r, t). Nechť polopřímky r, s, t jsou po řadě určeny vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Můžeme předpokládat, že $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{w}\| = 1$.

Zvolme kladnou ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ tak, že $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{v}$. Potom můžeme psát $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$. Ze vzorců (7) a (8) vyplývá, že $\cos x = u_1$, $\sin x = -u_2$, $\cos y = w_1$, $\sin y = w_2$. Ze vzorce (7) nyní dostáváme

$$\cos(x + y) = \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{w} = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Podobně ze vzorce (8) dostáváme druhou dokazovanou rovnost.

II. Zavedení míry úhlu pomocí funkce cos

Nyní zavedeme míru úhlu druhým způsobem – pomocí funkce cos. Přitom samozřejmě nebudeme používat nic z toho, co jsme vybudovali při prvním způsobu zavedení míry úhlu. Protože předpokládáme, že známe všechny vlastnosti funkce cos, je zavedení míry úhlu tímto způsobem značně kratší.

Definice 2.5.10. Budiž $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_2$. *Odchylkou nenulových vektorů* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_2$ nazýváme číslo $x \in \langle 0, \pi \rangle$, pro něž je

$$\cos x = \frac{\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|}. \tag{10}$$

Z věty 2.1.1 vyplývá, že je

$$\left| \frac{\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \, \|\boldsymbol{v}\|} \right| \leqq 1,$$

a tudíž takové číslo x, pro které platí rovnost (10), skutečně existuje.

Definice 2.5.11. Mějme dán úhel α, buďte $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$ jeho ramena. Je-li úhel α konvexní, nazýváme *mírou $m(\alpha)$ úhlu* α odchylku vektorů $R - P$, $S - P$. Je-li úhel α nekonvexní (vypuklý), označíme c odchylku vektorů $R - P$ a $S - P$ a *mírou $m(\alpha)$ úhlu* α nazýváme číslo $2\pi - c$.

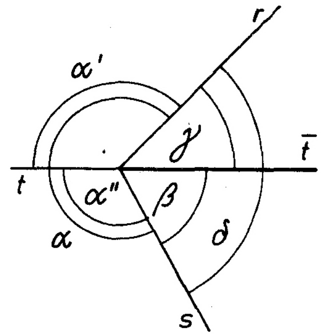
Mějme dán úhel α o vrcholu P. Buďte r, s jeho ramena. Zvolme polopřímku t s hraničním bodem P tak, aby $r \neq t \neq s$, a aby $t \subset \alpha$. Zvolíme-li ještě polopřímku p s hraničním bodem P tak, aby $p \not\subset \alpha$, dokážeme snadno z věty 1.10.8, že existuje právě jeden úhel α', resp. α'' mající ramena r, t, resp. t, s, pro nějž je $\alpha' \subset \alpha$, resp. $\alpha'' \subset \alpha$. Pro tyto úhly α', α'' pak platí $\alpha' \cup \alpha'' = \alpha$, $\alpha' \cap \alpha'' = t$. Budeme říkat, že úhel α se dělí na úhly α' a α'' (obecnější pojem rozdělení úhlu jsme zavedli v definici 2.5.1).

Mějme nyní ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}_2$ zvolenou kladnou ortonormální bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$. Buď $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}_2$, $\|\boldsymbol{a}\| = 1$, $\boldsymbol{a} = a_1 \boldsymbol{u}_1 + a_2 \boldsymbol{u}_2$. Označme t odchylku vektorů $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{a}$. Potom je $a_1 = \cos t$, a je-li $a_2 \geqq 0$, je $a_2 = \sin t$, je-li $a_2 < 0$, je $a_2 = -\sin t$. Toto tvrzení okamžitě vyplývá z definice 2.5.10.

Věta 2.5.13. Nechť úhel α se dělí na úhly α' a α''. Potom platí

$$m(\alpha) = m(\alpha') + m(\alpha''). \tag{11}$$

Než přistoupíme k důkazu této věty, upozorněme ještě, že vztah (11) dokážeme pomocí vzorce pro $\cos(x + y)$. Obráceným postupem jsme ve větě 2.5.12 ze vztahu (10) odvodili vzorec pro $\cos(x + y)$.



Obr. 23

Důkaz věty 2.5.13. Větu dokážeme nejdříve pro případ, že α je konvexní úhel. Zvolme jednotkové vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ tak, aby tyto vektory určovaly po řadě polopřímky r, s, t (tj. aby pro $R = P + \boldsymbol{u}$ bylo $r = \overrightarrow{PR}$ atd.). Sestrojme ortonormální bázi prostoru $\mathbf{V}_2$ tak, aby bylo $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1$. Označme x, resp. y, resp. z odchylku vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$, resp. $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}$, resp. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Potom je $m(\alpha) = z$, $m(\alpha') = x$, $m(\alpha'') = y$. Druhé souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ mají opačná znaménka, tudíž např. $\boldsymbol{u} = \cos x \boldsymbol{u}_1 + \sin x \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v} = \cos y \boldsymbol{u}_1 - \sin y \boldsymbol{u}_2$. Potom $\cos z = \boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v} = \cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$. U poslední rovnosti jsme použili součtový vzorec. Odtud vyplývá, že $z = x + y$, což jsme měli dokázat. Nechť nyní úhel α je nekonvexní. Buď $\bar{t}$ opačná polopřímka k polopřímce t. Nejdříve nechť $\bar{t} \not\subset \alpha$. Označme další úhly jako na obr. 23. Potom podle již dokázané části a podle definice 2.5.11 je

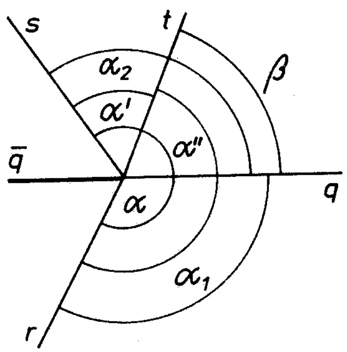
$$\begin{aligned} m(\alpha) &= 2\pi - m(\delta) = 2\pi - (m(\beta) + m(\gamma)) = \\ &= (\pi - m(\beta)) + (\pi - m(\gamma)) = m(\alpha'') + m(\alpha'). \end{aligned}$$

Bude-li nyní polopřímka t libovolná, sestrojíme polopřímku q s hraničním bodem P tak, aby bylo $\bar{q} \not\subset \alpha$. Polopřímka q rozdělí úhel α na dva duté úhly α_1, α_2. Nechť např. $t \subset \alpha_2$. Označíme-li úhly jako na obr. 24, dostáváme

$$\begin{aligned} m(\alpha) &= m(\alpha_1) + m(\alpha_2) = m(\alpha_1) + m(\beta) + m(\alpha') = \\ &= m(\alpha'') + m(\alpha'). \end{aligned}$$

Tím je věta pro všechny případy dokázána.

Ze vzorce (9) vyplývá, že ke každým dvěma vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ existuje právě jedno číslo $x \in \langle 0, 2\pi)$, pro něž platí vzorce (7) a (8). Toto číslo se nazývá *orientovaná odchylka* vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Názorný význam této orientované odchylky vektorů ve



Obr. 24

fyzikálním prostoru si můžeme představit tak, že měříme úhel od vektoru $\mathbf{u}$ k vektoru $\mathbf{v}$ ve směru otáčení, které nám první vektor kladné báze otočí nejkratší cestou do druhého vektoru této báze. Zde jsme opět použili řadu nematematických pojmů, což ovšem při přesném budování matematické disciplíny není možné.

2.6. Vzájemná poloha podprostorů $\mathbf{E}_n$

Vzájemnou polohu podprostorů afinního prostoru jsme již vyšetřili v odstavci 1.4. Všechny výsledky zde obsažené se samozřejmě týkají i euklidovského prostoru. V euklidovském prostoru můžeme navíc měřit vzdálenosti a úhly. Zatím známe jen vzdálenost dvou bodů. V tomto odstavci zavedeme i vzdálenost dvou mimoběžných podprostorů. Dále zavedeme odchylku dvou podprostorů nebo též úhel dvou podprostorů, i když jen pro speciální případy.

Definice 2.6.1. Říkáme, že dva podprostory $\mathbf{E}'_r$ a $\mathbf{E}''_s$ euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ jsou na sebe *kolmé*, jsou-li kolmá jejich zaměření (viz definice 2.1.2). Říkáme, že podprostory $\mathbf{E}'_r$ a $\mathbf{E}''_s$ jsou *totálně kolmé*, jsou-li totálně kolmá jejich zaměření.

Z definice totální kolmosti a kolmosti můžeme snadno dokázat některá tvrzení. Tato tvrzení jsou vesměs zřejmá, a nebudeme je proto ani označovat jako věty. Platí: Jsou-li dva podprostory $\mathbf{E}'_r$ a $\mathbf{E}''_s$ prostoru $\mathbf{E}_n$ na sebe kolmé, je podprostor $\mathbf{E}'_r$ rovnoběžný s každým podprostorem totálně kolmým na podprostor $\mathbf{E}''_s$ a obráceně. Každým bodem $A \in \mathbf{E}_n$ můžeme vést právě jeden podprostor $\mathbf{E}'_r$ totálně kolmý k danému podprostoru $\mathbf{E}''_s$.

Věta 2.6.1. Buď $\mathbf{E}'_k$ podprostor euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$. Buď $A \in \mathbf{E}_n$. Potom existuje právě jeden bod $A' \in \mathbf{E}'_k$ tak, že vektor $A - A'$ je ortogonální ke každému vektoru ze zaměření podprostoru $\mathbf{E}'_k$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{E}'_k = [Q; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k]$. Nechť $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}$ jsou ortonormální vektory, pro něž platí $A \in [Q; \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{k+1}]$ a $[\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}] = [\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}]$. Potom můžeme psát

$$A = Q + a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_{k+1}\mathbf{u}_{k+1}.$$

Každý bod $A' \in \mathbf{E}'_k$ lze psát ve tvaru

$$A' = Q + a'_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a'_k\mathbf{u}_k.$$

Potom je

$$A - A' = (a_1 - a'_1)\mathbf{u}_1 + \ldots + (a_k - a'_k)\mathbf{u}_k + a_{k+1}\mathbf{u}_{k+1}.$$

Protože $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle$ je báze zaměření $\mathbf{V}'_k$ prostoru $\mathbf{E}'_k$, je vektor $A - A'$ ortogonální ke každému vektoru z prostoru $\mathbf{V}'_k$ právě tehdy, je-li $(A - A') \cdot \mathbf{u}_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, k$. Ale

$$(A - A') \cdot \mathbf{u}_i = a_i - a'_i, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Tudíž musí být $a'_i = a_i$ pro $i = 1, \ldots, k$.

Poznámka 1. Pokud bychom ve větě 2.6.1 předpokládali, že $A \notin \mathbf{E}'_k$, bylo by zřejmě $A' \neq A$ a z věty 2.6.1 by vyplývalo, že existuje právě jedna kolmice na podprostor $\mathbf{E}'_k$ procházející bodem A a různoběžná s podprostorem $\mathbf{E}'_k$. Byla by to přímka $\overline{AA'}$.

Věta 2.6.2. Buď $\mathbf{E}'_k$ podprostor euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$. Buď $A \in \mathbf{E}_n$ a nechť $A' \in \mathbf{E}'_k$ je bod sestrojený k bodu A jako ve větě 2.6.1. Potom pro každý bod $X \in \mathbf{E}'_k$ je

$$|AX| \geqq |AA'|$$

a znaménko rovnosti (tj. $|AX| = |AA'|$) platí právě tehdy, je-li $X = A'$.

Důkaz. Tvrzení dostaneme skalárním umocněním rovnosti

$$A - X = (A - A') + (A' - X),$$

připomeneme-li si, že vektory $A - A'$ a $A' - X$ jsou ortogonální.

Definice 2.6.2. Nechť platí předpoklady věty 2.6.1. Číslo $|AA'|$ nazýváme *vzdálenost bodu A od podprostoru $\mathbf{E}'_k$.*

Věta 2.6.2 nám tedy říká, že vzdálenost bodu A od podprostoru $\mathbf{E}'_k$ je minimum ze všech vzdáleností $|AX|$, přičemž bod X probíhá podprostor $\mathbf{E}'_k$. Postup výpočtu vzdálenosti bodu od podprostoru dává důkaz věty 2.6.1. Vzdálenost bodu $A \in \mathbf{E}'_k$ od podprostoru $\mathbf{E}'_k$ je zřejmě rovna nule.

Nyní si ukážeme, že je-li podprostorem, od něhož vzdálenost počítáme, nadrovina daná rovnicí, můžeme vzdálenost bodu od podprostoru spočítat velmi jednoduše. Buď tedy $\mathbf{E}'_{n-1}$ nadrovina v prostoru $\mathbf{E}_n$. Její rovnici můžeme (viz vzorec (6) odstavce 2.3) psát ve tvaru

$$(1) \qquad \boldsymbol{a} \,.\, (X - Q) = 0,$$

přičemž $\boldsymbol{a}$ je nenulový vektor ortogonální na zaměření nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ a $Q \in \mathbf{E}'_{n-1}$. Počítejme vzdálenost bodu $Y \in \mathbf{E}_n$ od nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$. Sestrojíme přímku $p = [Y; \boldsymbol{a}]$. Přímka p je potom kolmá na nadrovinu $\mathbf{E}'_{n-1}$. Počítejme nyní průsečík Y' přímky p s nadrovinou $\mathbf{E}'_{n-1}$. Za tím účelem vyjádříme přímku p parametricky:

$$X = Y + t\boldsymbol{a}$$

Průsečík přímky p a nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ dostaneme řešením rovnice $\boldsymbol{a} \,.\, ((Y + t\boldsymbol{a}) - Q) = 0$, což je $\boldsymbol{a} \,.\, ((Y - Q) + t\boldsymbol{a}) = 0$, $\boldsymbol{a} \,.\, (Y - Q) + t\boldsymbol{a}^2 = 0$. Tudíž $t = -\boldsymbol{a} \,.\, (Y - Q)/\boldsymbol{a}^2$.

Průsečík Y' lze tedy psát ve tvaru

$$Y' = Y + (-\boldsymbol{a} \,.\, (Y - Q)/\boldsymbol{a}^2) \,.\, \boldsymbol{a}.$$

Nyní již můžeme spočítat vzdálenost $|YY'|$. Máme

$$|YY'| = \|Y' - Y\| = |\boldsymbol{a} \,.\, (Y - Q)/\boldsymbol{a}^2| \, \|\boldsymbol{a}\|,$$

a tedy $|YY'| = |\boldsymbol{a} \,.\, (Y - Q)|/\|\boldsymbol{a}\|$. Výsledek shrneme ve větu.

Věta 2.6.3. Mějme v prostoru $\mathbf{E}_n$ nadrovinu $\mathbf{E}'_{n-1}$ danou rovnicí (1). Buď $Y \in \mathbf{E}_n$. Potom vzdálenost bodu Y od nadroviny $\mathbf{E}'_{n-1}$ je číslo $d = |\boldsymbol{a} \,.\, (Y - Q)|/\|\boldsymbol{a}\|$.

Větu 2.6.3 můžeme snadno přeformulovat, máme-li nadrovinu $\mathbf{E}'_{n-1}$ dánu rovnicí v dané kartézské soustavě souřadnic. Zvolíme-li kartézskou soustavu souřadnic repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n \rangle$, je pro $X = [x_1, \ldots, x_n]$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\boldsymbol{a} \,.\, (X - Q) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1}$$

$(a_{n+1} = \boldsymbol{a} \,.\, (P - Q))$. Je-li $Y = [y_1, \ldots, y_n]$, je podle věty 2.6.3

$$d = |a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n + a_{n+1}|/\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Teď přejdeme od vyšetřování vzdálenosti bodu od podprostoru k vyšetřování vzdálenosti dvou podprostorů. Vzdálenost dvou podprostorů budeme zřejmě chtít zavést opět tak, aby byla rovna minimu ze vzdáleností dvou bodů, přičemž první bod volíme v prvním podprostoru a druhý bod v druhém podprostoru. V případě různoběžných podprostorů je problém jednoduchý – tato vzdálenost by byla vždy rovna nule. Komu by vyšetření vzdálenosti dvou obecných podprostorů připadalo příliš obtížné, udělá nejlépe, když se nejdříve v následujícím odstavci seznámí s nejkratší příčkou dvou mimoběžek v trojrozměrném prostoru a teprve potom se vrátí k obecným prostorům.

Věta 2.6.4. Buďte $\mathbf{E}'_r$, $\mathbf{E}''_s$ dva podprostory euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$, které nemají společný bod. Potom existují body $A' \in \mathbf{E}'_r$ a $A'' \in \mathbf{E}''_s$ tak, že přímka $p = \overleftrightarrow{A'A''}$ je kolmá na oba podprostory. Je-li $X \in \mathbf{E}'_r$, $Y \in \mathbf{E}''_s$, je $|A'A''| \leqq |XY|$.

Důkaz. Buď $\mathbf{E}'_r = [B'; \mathbf{V}'_r]$, $\mathbf{E}''_s = [B''; \mathbf{V}''_s]$. Označme $\mathbf{W}_k = (\mathbf{V}'_r \vee \mathbf{V}''_s)^\perp$. Nyní sestrojíme podprostor $\mathbf{E}'''_t = [B'; \mathbf{V}'_r \vee \mathbf{W}_k]$ a přesvědčíme se, že podprostory $\mathbf{E}''_s$ a $\mathbf{E}'''_t$ jsou různoběžné. Přímo ze zavedení vektorového podprostoru totálně kolmého na daný vektorový podprostor vyplývá, že $\mathbf{W}_k \vee (\mathbf{V}'_r \vee \mathbf{V}''_s) = \mathbf{V}_n$ ($\mathbf{V}_n$ je zaměření prostoru $\mathbf{E}_n$), tzn. že každý vektor z $\mathbf{V}_n$, a tedy i vektor $B' - B''$, můžeme psát ve tvaru $B' - B'' = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}''$, kde $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}_k$, $\boldsymbol{v}' \in \mathbf{V}'_r$, $\boldsymbol{v}'' \in \mathbf{V}''_s$. Odtud již vyplývá podle věty 1.4.1, že podprostory $\mathbf{E}''_s$ a $\mathbf{E}'''_t$ jsou různoběžné. Buď nyní $A'' \in \mathbf{E}''_s \cap \mathbf{E}'''_t$. Podle důsledku věty 1.6.1 existuje bod $A' \in \mathbf{E}'_r$ tak, že přímka $\overleftrightarrow{A''A'}$ je kolmá na podprostor $\mathbf{E}'_r$. Zřejmě A', $A'' \in \mathbf{E}'''_t$, a tudíž $A' - A'' \in \mathbf{V}'_r \vee \mathbf{W}_k$. Protože vektor $A' - A''$ je ortogonální ke každému vektoru z $\mathbf{V}'_r$, musí zřejmě být $A' - A'' \in \mathbf{W}_k$. Tudíž vektor $A' - A''$ je ortogonální i ke každému vektoru z $\mathbf{V}''_s$. Zbývá dokázat, že pro $X \in \mathbf{E}'_r$, $Y \in \mathbf{E}''_s$ je $|XY| \geqq |A'A''|$. To je však jednoduché. Je $X - Y = (X - A') + (A' - A'') + (A'' - Y)$. Vektory $X - A'$, $A'' - Y$ jsou ortogonální k vektoru $A' - A''$, a tedy i vektor $\boldsymbol{u} = (X - A') + (A'' - Y)$ je k tomuto vektoru ortogonální. Tudíž je

$$\|X - Y\|^2 = \|A' - A''\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

Odtud již plyne dokazovaná nerovnost.

Vidíme, že znaménko rovnosti ve vztahu $|A'A''| \leqq |XY|$ platí právě tehdy, je-li $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, tj. je-li $(X - A') + (A'' - Y) = \boldsymbol{o}$, tj. je-li $X - Y = A' - A''$.

Ponecháme-li označení použité v předešlé větě, definujeme *vzdálenost podprostorů* $\mathbf{E}'_r$, $\mathbf{E}'_s$ jako číslo $|A'A''|$.

Nyní zavedeme odchylky, nebo také úhly dvou podprostorů. Připomeňme, že odchylkou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{V}_n$ nazýváme číslo $x \in \langle 0, \pi \rangle$, pro něž

$$\cos x = \frac{\boldsymbol{u} \,.\, \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\| \,.\, \|\boldsymbol{v}\|}.$$

Někdy se říká úhel dvou vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, i když úhel, tak jak jsme ho definovali, je něco jiného. Nyní ještě vyšetříme odchylku přímky a podprostoru a odchylku dvou nadrovin. U následující věty si všimněme její analogie s větou 2.6.1.

Věta 2.6.5. Buďte $\mathbf{V}'_1$, $\mathbf{V}''_k$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. Nechť $\mathbf{V}'_1 = [\{\boldsymbol{a}\}]$. Potom existuje právě jeden vektor $\boldsymbol{a}' \in \mathbf{V}''_k$ tak, že vektor $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}'$ je ortogonální ke každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbf{V}''_k$. Pro tento vektor $\boldsymbol{a}'$ platí $\boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{a}' \geqq 0$.

Důkaz. I důkaz této věty je analogický k důkazu věty 2.6.1. Je-li $\boldsymbol{a} \in \mathbf{V}''_k$, zřejmě musí být $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$. Nechť tedy $\boldsymbol{a} \notin \mathbf{V}''_k$ a nechť $\mathbf{V}''_k = [\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}]$. Potom vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{a}$ jsou lineárně nezávislé. Nechť vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{k+1}$ vznikly z těchto vektorů ortogonalizačním procesem. Potom je $\mathbf{V}''_k = [\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_k\}]$ a $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1}$. Každý vektor $\boldsymbol{a}' \in \mathbf{V}''_k$ můžeme psát ve tvaru $\boldsymbol{a}' = a'_1\boldsymbol{u}_1 + \dots + a'_k\boldsymbol{u}_k$. Potom $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}' = (a_1 - a'_1)\boldsymbol{u}_1 + \dots + (a_k - a'_k)\boldsymbol{u}_k + a_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1}$. K tomu, aby bylo $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}') \cdot \boldsymbol{u}_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, je tedy nutné a stačí, aby $a'_i = a_i$, $i = 1, \dots, k$. Tím je první tvrzení dokázáno. Druhé tvrzení plyne z toho, že $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' = a_1^2 + \dots + a_k^2$.

Definice 2.6.3. Buďte $\mathbf{V}'_1$, $\mathbf{V}''_k$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. Nechť $\mathbf{V}'_1 = [\{\boldsymbol{a}\}]$. *Odchylkou podprostorů* $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_k$ nazýváme číslo $\pi/2$, jsou-li vektorové prostory $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_k$ na sebe kolmé, popřípadě odchylku vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$, nejsou-li vektorové prostory $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_k$ na sebe kolmé. Přitom $\boldsymbol{a}'$ je vektor sestrojený k vektoru $\boldsymbol{a}$ podle věty 2.6.5.

Věta 2.6.6. Buďte $\mathbf{V}'_1$, $\mathbf{V}''_1$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. Nechť $\mathbf{V}'_1 = [\{\boldsymbol{a}\}]$, $\mathbf{V}''_1 = [\{\boldsymbol{b}\}]$. Potom odchylka podprostorů $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_1$ je číslo x, pro něž

$$\cos x = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}|}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{b}\|}. \tag{2}$$

Důkaz. Sestrojíme k vektoru $\boldsymbol{a}$ vektor $\boldsymbol{a}' \in \mathbf{V}''_1$ jako ve větě 2.6.5. Je $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{o}$ právě tehdy, je-li $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, v tomto případě tedy tvrzení platí. Je-li $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{o}$, je $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{a}'$. Dosadíme-li odtud za $\boldsymbol{b}$ do vztahu (2) a využijeme přitom vlastnosti $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}' \geqq 0$, dostaneme snadno tvrzení.

Důsledkem právě dokázané věty je, že odchylka vektorových prostorů $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_1$ je stejná jako odchylka vektorových prostorů $\mathbf{V}''_1$ a $\mathbf{V}'_1$.

Věta 2.6.7. Buďte $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_{n-1}$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. Buď $\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}''^{\perp}_{n-1}$. Označme x, resp. y odchylku podprostoru $\mathbf{V}'_1$ od podprostoru $\mathbf{V}''_{n-1}$, resp. $\mathbf{W}_1$. Potom platí

$$x + y = \pi/2.$$

Důkaz. Buď $\mathbf{V}'_1 = [\{\boldsymbol{a}\}]$. Sestrojme vektor $\boldsymbol{a}' \in \mathbf{V}''_{n-1}$ podle věty 2.6.5. Můžeme předpokládat, že vektor $\boldsymbol{a}$ je zvolen tak, aby $\|\boldsymbol{a}\| = 1$. Zvolme nyní jednotkový vektor $\boldsymbol{u} \in \mathbf{V}''_{n-1}$ tak, aby $\boldsymbol{a}' \in [\{\boldsymbol{u}\}]$. Dále buď $\boldsymbol{v}$ jednotkový vektor z $\mathbf{W}_1$. Potom vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ jsou ortonormální a je $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{u} + a_2\boldsymbol{v}$. Zřejmě $1 = \|\boldsymbol{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$. Nyní máme (jak se snadno přesvědčíme)

$$\cos x = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}|}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{u}\|}, \qquad \cos y = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}|}{\|\boldsymbol{a}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Z právě dokázané věty dostáváme jako důsledek následující větu.

Věta 2.6.8. Buďte $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_{n-1}$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. Označme $\mathbf{W}'_{n-1}$, resp. $\mathbf{W}''_1$ podprostor totálně kolmý k prostoru $\mathbf{V}'_1$, resp. $\mathbf{V}''_{n-1}$. Potom odchylka podprostorů $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_{n-1}$ je rovna odchylce podprostorů $\mathbf{W}''_1$ a $\mathbf{W}'_{n-1}$.

Důkaz. Označme po řadě x, y, z odchylku podprostorů $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{V}''_{n-1}$, $\mathbf{W}'_{n-1}$ a $\mathbf{W}''_1$, $\mathbf{V}'_1$ a $\mathbf{W}''_1$. Nyní podle předcházející věty máme $x = \pi/2 - z = y$.

Definice 2.6.4. Buďte $\mathbf{V}'_{n-1}$, $\mathbf{V}''_k$ podprostory prostoru $\mathbf{V}_n$. *Odchylkou* těchto podprostorů nazýváme odchylku podprostorů $\mathbf{V}'^{\perp}_{n-1}$ a $\mathbf{V}''^{\perp}_k$.

Musíme si uvědomit, že odchylku jednorozměrného podprostoru a $(n-1)$-rozměrného podprostoru máme definovanou dvakrát, jednou definicí 2.6.3 a jednou definicí 2.6.4. Věta 2.6.8 nám však ukazuje, že odchylky definované podle obou těchto definic jsou stejné. Tudíž definice 2.6.4 je oprávněná.

Odchylku libovolných dvou podprostorů nebudeme definovat, její zavedení by bylo obtížné.

Definice 2.6.5. Buď $\mathbf{E}'_r$, resp. $\mathbf{E}''_s$ podprostor euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$ se zaměřením $\mathbf{V}'_r$, resp. $\mathbf{V}''_s$. Je-li definována odchylka podprostorů $\mathbf{V}'_r$ a $\mathbf{V}''_s$ (tj. je-li jedno z čísel r, s rovno buď 1, nebo $n - 1$), nazýváme *odchylkou podprostorů* $\mathbf{E}'_r$ a $\mathbf{E}''_s$ odchylku jejich zaměření.

Cvičení

Ve všech cvičeních předpokládáme, že v prostoru $\mathbf{E}_n$ je dána kartézská soustava souřadnic, v níž jsou úlohy zadány a v níž též vyjadřujeme výsledek.

1. V prostoru $\mathbf{E}_n$ určete vzdálenost d podprostorů $\mathbf{A}'_r$, $\mathbf{A}''_s$. V prostoru $\mathbf{A}'_r$, resp. $\mathbf{A}''_s$ najděte bod P, resp. Q tak, aby směr $P - Q$ byl kolmý na zaměření obou podprostorů. Úlohu řešte pro následující zadání:

a) $n = 3$, $\mathbf{A}'_0 = \{A\}$, $A = [1, 3, -5]$, $\mathbf{A}''_2 : x - 2y + 2z - 3 = 0$;
b) $n = 3$, $\mathbf{A}'_0 = \{A\}$, $A = [5, 2, 3]$, $\mathbf{A}''_1 = [B; \boldsymbol{u}]$, $B = [1, -3, 1]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, -1)$;
c) $n = 3$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \boldsymbol{u}]$, $A = [-2, -3, 2]$, $\boldsymbol{u} = (4, 2, -1)$, $\mathbf{A}''_1 = [B; \boldsymbol{v}]$, $B = [1, 6, 2]$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, -1)$;
d) $n = 3$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \boldsymbol{u}]$, $A = [1, 3, 1]$, $\boldsymbol{u} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{A}''_1 : x - 2y - 1 = 0$, $3x - 4y + z - 7 = 0$;
e) $n = 3$, $\mathbf{A}'_2 : x + y + \sqrt{2}z - 1 = 0$, $\mathbf{A}''_2 = [A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, $A = [-2, -1, 0]$, $\boldsymbol{u} = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1, -\sqrt{2})$;
f) $n = 3$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \boldsymbol{u}]$, $A = [2, 13, 7]$, $\boldsymbol{u} = (-3, -1, 4)$, $\mathbf{A}''_2$: $2x + 6y + 3z - 5 = 0$;
g) $n = 4$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \boldsymbol{u}]$, $A = [0, 3, -2, -5]$, $\boldsymbol{u} = (-2, 0, -1, 2)$, $\mathbf{A}''_2 = [B; \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$, $B = [-2, -4, 0, 4]$, $\boldsymbol{v} = (-1, -1, -2, 2)$, $\boldsymbol{w} = (1, 2, 1, 0)$;
h) $n = 4$, $\mathbf{A}'_2 = [A; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, $A = [4, 2, 0, 0]$, $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1, -1)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, -1, -1)$, $\mathbf{A}''_2 = [B; \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}']$, $B = [5, 2, 4, -2]$, $\boldsymbol{u}' = (2, 1, 1, -1)$, $\boldsymbol{v}' = (0, 3, 5, 1)$;
i) $n = 4$, $\mathbf{A}'_0 = \{A\}$, $A = [2, 1, -1, 3]$, $\mathbf{A}''_3 : 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 - 3 = 0$;
j) $n = 4$, $\mathbf{A}'_0 = \{A\}$, $A = [2, 2, -3, 1]$, $\mathbf{A}''_2 = [B; \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$, $B = [0, 6, 6, 6]$, $\boldsymbol{u} = (3, 1, 1, -5)$, $\boldsymbol{v} = (1, 3, 2, -2)$.

2. V prostoru $\mathbf{E}_n$ určete odchylku α podprostorů $\mathbf{A}'_r$, $\mathbf{A}''_s$. Úlohu řešte pro následující zadání:

a) $n = 3$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \mathbf{u}]$, $A = [1, 3, 1]$, $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{A}''_1 : x - y + z - 2 = 0$, $3x - y - z + 1 = 0$;
b) $n = 3$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \mathbf{u}]$, $A = [0, 0, 0]$, $\mathbf{u} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{A}''_2 : 2x + y - 3z + 2 = 0$;
c) $n = 3$, $\mathbf{A}'_2 = [A; \mathbf{u}, \mathbf{v}]$, $A = [1, 0, 0]$, $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1, 1)$, $\mathbf{A}''_2 : x - 2y + 1 = 0$;
d) $n = 4$, $\mathbf{A}'_1 = [A; \mathbf{u}]$, $A = [0, 1, -1, 0]$, $\mathbf{u} = (1, 1, -1, 0)$, $\mathbf{A}''_2 = [A; \mathbf{v}, \mathbf{w}]$, $\mathbf{v} = (1, 2, -3, 2)$, $\mathbf{w} = (5, 0, -1, 2)$.

3. V prostoru $\mathbf{E}_3$ jsou dány přímky $p = [A; \mathbf{u}]$, $q = [B; \mathbf{v}]$, $A = [1, 3, -1]$, $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $B = [1, 1, 0]$, $\mathbf{v} = (3, -2, 1)$. Určete rovinu ϱ tak, aby bylo $p \subset \varrho$ a aby přímka q a rovina ϱ měly odchylku α, přičemž $\cos \alpha = \sqrt{27/77}$.

2.7. Prostory $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$

Tento odstavec je věnován formulaci některých výsledků o $\mathbf{E}_n$ pro $n = 2$ a 3 a prohloubení úvah, které v $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$ mají vztah k výuce na střední škole. Prostorů $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$ si podrobněji všímáme zejména proto, že jsou důležité pro popis fyzikálního prostoru. Celá řada výsledků má jednoduchou formu, pokud jde o dvourozměrný euklidovský prostor $\mathbf{E}_2$.

Budiž tedy v $\mathbf{E}_2$ dána nějaká kartézská soustava souřadnic $\langle O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$. Přímkám $o_1 : X = O + t\mathbf{v}_1$; $o_2 : X = O + t\mathbf{v}_2$ říkáme souřadnicové osy. Každá přímka v $\mathbf{E}_2$ je nadrovinou v $\mathbf{E}_2$, a tedy můžeme napsat její rovnici ve tvaru

$$ax + by + c = 0. \tag{1}$$

Naopak, každá rovnice (1), v níž $a^2 + b^2 \neq 0$, je rovnicí (jediné) přímky. Dvě rovnice

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

pro něž $a^2 + b^2 \neq 0 \neq a_1^2 + b_1^2$, jsou rovnicemi téže přímky, právě když hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \end{pmatrix}$$

je rovna 1, tj. existuje reálné číslo k takové, že

$$a = ka_1, \quad b = kb_1, \quad c = kc_1.$$

Víme, že vektor kolmý na přímku p s rovnicí (1) je tvaru $k(a, b)$, kde k je libovolné reálné číslo. Proto vektor přímky p je tvaru $k(b, -a)$. Z toho vidíme, že přímky p a p_1 o rovnicích (2) jsou rovnoběžné, právě když

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ a_1, & b_1 \end{vmatrix} = 0,$$

tj. existuje reálné číslo k, pro které

$$a = ka_1, \quad b = kb_1.$$

Přímka p je určena dvěma svými různými body. Nechť jsou to např. body $[x_1, y_1]$; $[x_2, y_2]$. Potom parametrická rovnice přímky p je např.

$$X = [x_1, y_1] + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Pro každý bod $[x, y]$ přímky p existuje číslo t_1 takové, že

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t_1(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t_1(y_2 - y_1), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} x - x_1 &= t_1(x_2 - x_1), \\ y - y_1 &= t_1(y_2 - y_1). \end{aligned}$$

Je-li $x_2 - x_1 \neq 0$, je

$$t_1 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

a rovnice přímky p je

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Je-li $y_2 - y_1 \neq 0$, je možno rovnici přímky p psát ve tvaru

$$x - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}(y - y_1).$$

Dále si všimněme údajů, které nám poskytuje rovnice (1) o poloze přímky p vzhledem k soustavě souřadnic. Počátek soustavy souřadnic, tj. bod O, leží na p, právě když $c = 0$. Je-li $a = 0$, je p rovnoběžná s osou o_1, je-li $b = 0$, je p rovnoběžná s osou o_2. Je-li $a \neq 0$, je bod $\left[-\frac{c}{a}, 0\right]$ průsečíkem osy o_1 s p, je-li $b \neq 0$, je bod

$\left[0, -\frac{c}{b}\right]$ průsečík přímky p s osou o_2. Je-li $a \neq 0 \neq b \neq 0 \neq c$, můžeme rovnici přímky p psát ve tvaru

$$\frac{x}{-\frac{c}{a}} + \frac{y}{-\frac{c}{b}} = 1$$

(tzv. úsekový tvar rovnice přímky).

Vzdálenost d bodu $[x_0, y_0]$ od přímky p s rovnicí (1) je dána vzorcem

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Speciálně vzdálenost počátku soustavy souřadnic od p je

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Jsou-li $A = [x_1, y_1]$, $B = [x_2, y_2]$, $C = [x_3, y_3]$ body v $\mathbf{E}_2$, pak jsou kolineární, právě když

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Podmínku (3) můžeme vyjádřit ještě jinak. Snadno zjistíme, že

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix},$$

a podmínka (3) přejde v rovnici

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pokud body A, B, C neleží v přímce, pak

$$D = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2, & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Podle definice 2.4.1. je

$$\tfrac{1}{2}|D| = P(A, B, C)$$

obsah trojúhelníku. Ukážeme nyní, že obsah trojúhelníku, takto definovaný, je to číslo, které jsme nazvali obsahem trojúhelníku již na základní škole. Pojmy,

které k tomu potřebujeme, totiž velikost strany trojúhelníku a velikost výšky, jsou definovány stejně, jak tomu bylo na základní škole. Číslo $P(A, B, C)$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Zvolme tedy bod A za počátek a přímka AB nechť je osou o_1. Potom

$$A = [0, 0], \quad B = [x_2, 0], \quad C = [x_3, y_3].$$

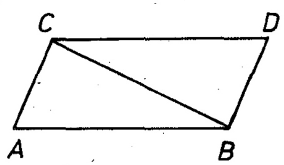
Máme

$$P(A, B, C) = \tfrac{1}{2}|D| = \left\|\begin{matrix} 0, & 0, & 1 \\ x_2, & 0, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{matrix}\right\| = \tfrac{1}{2}|x_2 \cdot y_3| = \tfrac{1}{2}|x_2| \cdot |y_3|.$$

Ale $|x_2|$ je $|AB|$ a $|y_3|$ je vzdálenost bodu C od osy o_1, tj. velikost výšky v_C spuštěné z bodu C v trojúhelníku ABC. Odtud

$$(4) \qquad P(A, B, C) = \tfrac{1}{2}|AB| \cdot v_C.$$

Poznámka. Nyní se již můžeme přesvědčit, že úvaha o geometrickém významu vnějšího součinu v $\mathbf{E}_2$ z odstavce 2.2 může být již plně potvrzena. Doplníme-li $\triangle ABC$ (obr. 25) na rovnoběžník $ABCD$ (připomeňme, že $D = A + (B - A) + (C - A)$), pak rovnoběžník $ABCD$ je sjednocením trojúhelníků ABC a BCD, které mají za svůj průnik úsečku BC (dokažte tento fakt a odvoďte při tom tvrzení, že úhlopříčky — v našem případě úsečky BC a AD — se protínají ve svých středech). Při tom $|AB| = |CD|$ a velikosti výšek v trojúhelníku ABC spuštěné z bodu C a v $\triangle BCD$ z bodu B jsou stejné. Tedy trojúhelníky ABC a BCD mají (podle (4)) stejný obsah. Součet těchto obsahů můžeme považovat za obsah rovnoběžníku $ABCD$. Uvědomte si, že tato definice obsahu rovnoběžníku $ABCD$ je umožněna skutečností, že dostanete tatáž čísla, i když vyjdete například z trojúhelníku ABD a doplníte ho na rovnoběžník $ABCD$ (pozor na označení vrcholů). Proto je obsah rovnoběžníku $ABCD$ roven $|[B - A, C - A]|$.



Obr. 25

Nechť je dán opět $\triangle ABC$ a nechť α je odchylka vektorů $B - A$, $C - A$, β odchylka $C - B$, $A - B$, γ odchylka $A - C$, $B - C$. Je $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ a čísla α, β, γ nazýváme (jako na základní škole) vnitřní úhly trojúhelníku. Dále položíme $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a tato čísla nazveme délky stran v $\triangle ABC$. Na střední škole jsme poznali, že čísla $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ splňují určité vzorce, kterým se říká trigonometrické. Odvodíme nejdůležitější z nich.

Kosinová věta

Platí

$$\frac{(B-A).(C-A)}{c.b} = \cos\alpha.$$

Tedy

(5) $$(B-A).(C-A) = cb\cos\alpha.$$

Dále

$$a^2 = (C-B).(C-B) = ((A-B)+(C-A)).((A-B)+(C-A)) =$$
$$= (A-B).(A-B) + 2(A-B).(C-A) + (C-A).(C-A) =$$
$$= c^2 - 2(B-A).(C-A) + b^2.$$

Proto

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Cyklickou záměnou dostaneme další dva vzorce.

Věta o průmětech

Je

$$B - A = (C-A) + (B-C).$$

Proto

$$c^2 = (B-A).(B-A) = (B-A).((C-A)+(B-C)) =$$
$$= (B-A).(C-A) + (B-A).(B-C) = cb\cos\alpha + ca\cos\beta \text{ (podle (5))}.$$

Odtud

(6) $$c = b\cos\alpha + a\cos\beta$$

a opět cyklickou záměnou dostaneme další dva vztahy.

Důsledek. Alespoň dva z úhlů α, β, γ jsou menší než $\frac{\pi}{2}$. Tvrzení plyne z (6), odkud vidíme, že alespoň jedno z čísel $\cos\alpha$, $\cos\beta$ je kladné.

Sinová věta

Podle (8) v odstavci 2.5. $c.a.\sin\beta = |[A-B, C-B]|$, $c.b.\sin\alpha = |[B-A, C-A]|$.

Při tom

$C - A = (B-A) + (C-B)$ a proto (podle věty 2.2.2) $[B-A, C-A] = [B-A, B-A] + [B-A, C-B] = [B-A, C-B] = -[A-B, C-B]$.

Odtud

$$c.a.\sin\beta = c.b.\sin\alpha,$$

což můžeme psát jako

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Podobně

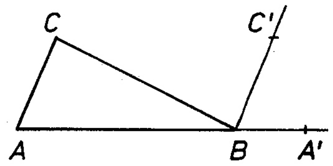
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

což dává

(7) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Součet úhlů v trojúhelníku

Skutečnost, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je π, se obvykle na střední škole dokazuje tím, že (viz obr. 26) bodem B vedeme rovnoběžku BC' k přímce AC. Tak jsme dostali tři přímky AB, BC, BC' jdoucí bodem B. Je-li BA' polopřímka opačná k polopřímce BA, potom vidíme, že $\sphericalangle A'BC' = \alpha$, $\sphericalangle C'BC = \gamma$, $\sphericalangle ABC = \beta$ a $\pi = \alpha + \beta + \gamma$.



Obr. 26

Při odvození kosinové věty, věty o průmětech a sinové věty jsme vzorec $\pi = \alpha + \beta + \gamma$ nepoužili. Ukážeme naopak, že z těchto vět a vzorce pro $\cos(\alpha + \beta)$ se dá zjistit, že $\pi = \alpha + \beta + \gamma$.

Platí

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Z věty o průmětech je

$$\cos\beta = \frac{a - b\cos\gamma}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b - a\cos\gamma}{c}.$$

Ze sinové věty

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma, \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}\sin\gamma.$$

Proto
$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{(a - b\cos\gamma)(b - a\cos\gamma)}{c^2} - \frac{ab}{c^2}(1-\cos^2\gamma) =$$
$$= \frac{1}{c^2}(-b^2 - a^2 + 2ab\cos\gamma)\cos\gamma = -\cos\gamma = \cos(\pi-\gamma).$$

Zvolme označení tak (viz důsledek věty o průmětech), že $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$. Potom $0 < \alpha + \beta < \pi$, $0 < \pi - \gamma < \pi$, a protože funkce cos je injektivní v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, je $\alpha + \beta = \pi - \gamma$. Proto $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Heronův vzorec

Ukážeme nyní, jak lze vypočítat obsah trojúhelníku z délek jeho stran. Položme $\boldsymbol{u} = B - A$, $\boldsymbol{v} = C - A$. Potom podle definice 2.4.1 a po snadné úpravě dostaneme

$$P(A, B, C) = \tfrac{1}{2}|[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]| = \tfrac{1}{2}\sqrt{\|\boldsymbol{u}\|^2 . \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})^2}. \tag{8}$$

Položme $\boldsymbol{w} = C - B$. Je $\boldsymbol{w} = C - B = (C - A) + (A - B) = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$. Odtud $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}$. Je $(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{w})^2 = (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})^2 = (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u})^2$, a proto
$$\|\boldsymbol{w}\|^4 = \|\boldsymbol{v}\|^4 + \|\boldsymbol{u}\|^4 + 4(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})^2 - 4\|\boldsymbol{v}\|^2.(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) - 4\|\boldsymbol{u}\|^2.(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) + 2\|\boldsymbol{u}\|^2.\|\boldsymbol{v}\|^2.$$
Podobně
$$\|\boldsymbol{u}\|^4 = \|\boldsymbol{v}\|^4 + \|\boldsymbol{w}\|^4 + 4(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v})^2 - 4\|\boldsymbol{v}\|^2.(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}) - 4\|\boldsymbol{w}\|^2.(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{v}) + 2\|\boldsymbol{w}\|^2.\|\boldsymbol{v}\|^2,$$
$$\|\boldsymbol{v}\|^4 = \|\boldsymbol{u}\|^4 + \|\boldsymbol{w}\|^4 + 4(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{w})^2 + 4\|\boldsymbol{u}\|^2.(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{u}) + 4\|\boldsymbol{w}\|^2.(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{u}) + 2\|\boldsymbol{u}\|^2.\|\boldsymbol{w}\|^2.$$

Sečtením posledních tří rovnic dostaneme
$$\begin{aligned}0 = {} & \|\boldsymbol{u}\|^4 + \|\boldsymbol{v}\|^4 + \|\boldsymbol{w}\|^4 - 4\|\boldsymbol{u}\|^4 - 4\|\boldsymbol{v}\|^4 - 4\|\boldsymbol{w}\|^4 + \\ & + 4(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v})^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|^2.\|\boldsymbol{v}\|^2 + \\ & + 4(\boldsymbol{v}.\boldsymbol{w})^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2.\|\boldsymbol{w}\|^2 + \\ & + 4(\boldsymbol{w}.\boldsymbol{u})^2 + 2\|\boldsymbol{w}\|^2.\|\boldsymbol{u}\|^2,\end{aligned}$$
kde jsme užili vztahy $-4\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{uv}) + 4\|\boldsymbol{u}\|^2(\boldsymbol{uw}) = -4\|\boldsymbol{u}\|^2.\|\boldsymbol{u}\|^2 = 4\|\boldsymbol{u}\|^4$ apod. Pomocí (8) plyne
$$0 = 3(a^4 + b^4 + c^4) - 6a^2b^2 - 6a^2c^2 - 6b^2c^2 + 3.4.4.P(A, B, C)^2.$$
Odtud
$$P(A, B, C)^2 = \frac{1}{16}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2) = s(s-a)(s-b)(s-c),$$
kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Vzorec
$$P(A, B, C) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{9}$$
se nazývá Heronův.

Závěrem vyšetřování roviny napišme ještě vzorce pro transformaci kartézské soustavy souřadnic. Mějme tedy dvě kartézské soustavy souřadnic s repéry $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ a $\langle P'; \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2\rangle$. Nechť
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'_1 &= a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{12}\boldsymbol{u}_2,\\ \boldsymbol{u}'_2 &= a_{21}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2.\end{aligned} \tag{10}$$

Protože $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, existuje právě jedno číslo $t \in \langle 0, 2\pi)$ takové, že $a_{11} = \cos t$ a $a_{12} = \sin t$. Z první rovnice (10) vidíme, že $\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{u}'_1 = a_{11}\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{u}_1 = a_{11}$, a tedy t je rovno orientované odchylce vektorů $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}'_1$, když rovinu orientujeme tím, že bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ prohlásíme za kladnou.
$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0,$$
tj.
$$a_{21}\cos t = -a_{22}\sin t.$$
Existuje proto číslo c takové, že
$$a_{21} = -c\sin t,$$
$$a_{22} = c\cos t.$$
Protože
$$a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1,$$
je $|c| = 1$.

a) Nechť jsou báze $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$; $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ souhlasné. Potom
$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22}\end{vmatrix} > 0,$$
a tedy
$$0 < \begin{vmatrix} \cos t, & \sin t \\ -c\sin t, & c\cos t\end{vmatrix} = c(\cos^2 t + \sin^2 t) = c.$$
Je proto $c = 1$ a (10) má tvar:
$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}'_1 &= \boldsymbol{u}_1\cos t + \boldsymbol{u}_2\sin t,\\ \boldsymbol{u}'_2 &= -\boldsymbol{u}_1\sin t + \boldsymbol{u}_2\cos t.\end{aligned} \tag{11}$$
Chceme-li vyjádřit vektory $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ jako lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{u}'_1$, $\boldsymbol{u}'_2$, pak to provedeme výpočtem inverzní matice nebo přímo následujícím způsobem.

Vynásobíme první, resp. druhou rovnici ve vztazích (11) číslem $\cos t$, resp. $-\sin t$ a obě rovnice sečteme. Dostaneme

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}'_1 \cos t - \boldsymbol{u}'_2 \sin t$$

a podobně

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}'_1 \sin t + \boldsymbol{u}'_2 \cos t.$$

Tedy úhrnně přechod od báze $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ k bázi $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ je popsán soustavou

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{u}'_1 \cos t - \boldsymbol{u}'_2 \sin t, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}'_1 \sin t + \boldsymbol{u}'_2 \cos t. \end{aligned} \tag{12}$$

b) Jsou-li báze $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ nesouhlasné, je

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12} \\ a_{21}, a_{22} \end{vmatrix} < 0$$

a dostaneme $c = -1$. Je potom

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}'_1 &= \boldsymbol{u}_1 \cos t + \boldsymbol{u}_2 \sin t, \\ \boldsymbol{u}'_2 &= \boldsymbol{u}_1 \sin t - \boldsymbol{u}_2 \cos t \end{aligned} \tag{11'}$$

a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{u}'_1 \cos t + \boldsymbol{u}'_2 \sin t, \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{u}'_1 \sin t - \boldsymbol{u}'_2 \cos t. \end{aligned} \tag{12'}$$

Nyní odvodíme lineární transformaci soustavy souřadnic dané repérem $\langle P; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$ na soustavu souřadnic danou repérem $\langle P'; \boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2\rangle$. Vyšetříme oba případy shora uvedené jako a) a b) současně. Pro případ a) bude platit, pokud se výrazy liší, horní znaménko, pro případ b) znaménko dolní.

Nechť

$$P - P' = b_1\boldsymbol{u}'_1 + b_2\boldsymbol{u}'_2.$$

Budiž

$$X = P + x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = P' + x'_1\boldsymbol{u}'_1 + x'_2\boldsymbol{u}'_2.$$

Potom

$$\begin{aligned} x'_1\boldsymbol{u}'_1 + x'_2\boldsymbol{u}'_2 &= P - P' + x_1\boldsymbol{u}_1 + x_2\boldsymbol{u}_2 = \\ &= b_1\boldsymbol{u}'_1 + b_2\boldsymbol{u}'_2 + x_1(\boldsymbol{u}'_1 \cos t \mp \boldsymbol{u}'_2 \sin t) + x_2(\boldsymbol{u}'_1 \sin t \pm \boldsymbol{u}'_2 \cos t) = \\ &= (b_1 + x_1 \cos t + x_2 \sin t)\,\boldsymbol{u}'_1 + (b_2 \mp x_1 \sin t \pm x_2 \cos t)\,\boldsymbol{u}'_2. \end{aligned}$$

Odtud srovnáním koeficientů u vektorů $\boldsymbol{u}'_1, \boldsymbol{u}'_2$ dostaneme transformační vzorce

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos t + x_2 \sin t + b_1, \\ x'_2 &= \mp x_1 \sin t \pm x_2 \cos t + b_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Přejděme nyní k popisu některých vlastností trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$. Opět budeme předpokládat, že je dána kartézská soustava souřadnic

s repérem $\langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\rangle$. Přímky o_i: $X = P + t\mathbf{e}_i$ se nazývají souřadnicové osy, o_1 se často nazývá osa x, podobně o_2 osa y a o_3 osa z. Roviny

$$\varrho_{ij}\colon\ X = P + t_i\mathbf{e}_i + t_j\mathbf{e}_j, \qquad i \neq j$$

jsou souřadnicové roviny.

Nyní každá rovnice

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{14}$$

kde

$$a^2 + b^2 + c^2 > 0,$$

je rovnice roviny.

Dvě takové rovnice

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

jsou rovnicemi jedné a téže roviny, právě když matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c, & d \\ a_1, & b_1, & c_1, & d_1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

má hodnost 1. Protože mezi čísly a, b, c a čísly a_1, b_1, c_1 je vždy alespoň jedno nenulové, vidíme, že rovnice (15) jsou rovnicemi jedné a téže roviny, právě když existuje nenulové číslo k tak, že $a = ka_1$, $b = kb_1$, $c = kc_1$, $d = kd_1$.

Vektor o souřadnicích (a, b, c) je kolmý k rovině (14). Tedy dvě roviny o rovnicích (15) jsou rovnoběžné, právě když matice

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a_1, & b_1, & c_1 \end{pmatrix}$$

má hodnost 1.

Máme-li dvě roviny (15), kde předešlá matice má hodnost 2, jde o dvě různoběžné roviny. Tyto roviny se protínají v přímce, a body této průsečnice jsou právě ty body o souřadnicích $[x', y', z']$, kde (x', y', z') je řešením systému (15).

Vzdálenost bodu $[x_0, y_0, z_0]$ od roviny (14) je

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Tři body $A = [x_1, y_1, z_1]$, $B = [x_2, y_2, z_2]$, $C = [x_3, y_3, z_3]$ leží v jedné přímce (jsou kolineární), právě když matice

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \end{pmatrix}$$

má hodnost nejvýše 1.

Máme-li další bod $D = [x_4, y_4, z_4]$, pak body A, B, C, D leží v jedné rovině, právě když matice

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1, & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1, & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1, & y_4 - y_1, & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

má hodnost nejvýše 2, tj. její determinant je roven 0, což můžeme též psát tak, že

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

V prostoru $\mathbf{E}_3$ provedeme výpočet vzdálenosti bodu od přímky a výpočet vzdálenosti dvou mimoběžek. Všechna tato vyšetřování již byla v obecném případě provedena v odstavci 2.6.

Mějme tedy přímku $p = [A; \boldsymbol{u}]$ v prostoru $\mathbf{E}_3$ a bod $B \in \mathbf{E}_3$. Hledáme bod $X \in p$ tak, aby vektor $B - X$ byl ortogonální k vektoru $\boldsymbol{u}$. Je tedy pro jisté t

(17) $$X = A + t\boldsymbol{u}$$

a

(18) $$(B - X) . \boldsymbol{u} = 0.$$

Dosadíme-li z (17) do (18), je

$$(B - A - t\boldsymbol{u}) . \boldsymbol{u} = 0$$

a odtud

$$t = \frac{(B - A) . \boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}^2}.$$

Dosadíme do (17) a vypočteme vzdálenost $|BX|$.

Všimněte si, že (18) je rovnice roviny jdoucí bodem B, kolmé k přímce dané rovnicí (17).

Nechť $p = [A; \boldsymbol{u}]$, $q = [B; \boldsymbol{v}]$ jsou dvě mimoběžky. Hledáme jejich příčku, která je k oběma přímkám kolmá. Hledáme tedy bod $R \in p$ a bod $S \in q$ tak, aby vektor $R - S$ byl kolmý k oběma vektorům $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$. Musí být pro vhodné r a s

$$R = A + r\boldsymbol{u},$$
$$S = B + s\boldsymbol{v}.$$

Tudíž

$$R - S = (A - B) + r\boldsymbol{u} - s\boldsymbol{v}.$$

Protože

$$(R - S)\,\boldsymbol{u} = (R - S)\,\boldsymbol{v} = 0,$$

je

(19) $$\begin{aligned} r\boldsymbol{u}^2 - s\boldsymbol{u} . \boldsymbol{v} &= -(A - B)\,\boldsymbol{u}, \\ r\boldsymbol{u} . \boldsymbol{v} - s\boldsymbol{v}^2 &= -(A - B)\,\boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

Je to soustava dvou rovnic o dvou neznámých r, s s determinantem

$$-\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}^2, & \boldsymbol{u} . \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{u} . \boldsymbol{v}, & \boldsymbol{v}^2 \end{vmatrix} = -\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\| \neq 0,$$

neboť $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ jsou nezávislé vektory (p a q jsou mimoběžky). Soustava (19) má proto jediné řešení r_0, s_0 a hledaná příčka je určena body $A + r_0\boldsymbol{u}$, $B + s_0\boldsymbol{v}$.

Úloha je speciálním případem úlohy: veďte příčku mimoběžek daným směrem. Tímto směrem je v našem případě $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Tento přístup dobře odpovídá syntetickému řešení úlohy. Přímkou p proložíme rovinu ϱ rovnoběžnou s přímkou q, přímkou q proložíme rovinu σ kolmou na ϱ a bod R je průsečíkem přímky p s průsečnicí rovin ϱ a σ. Hledaná příčka je kolmice v R na rovinu ϱ.

To, co pro $\mathbf{E}_2$ znamená trigonometrie, tj. geometrie trojúhelníku, tím je v $\mathbf{E}_3$ geometrie trojhranu. Její základy uvedeme v následujícím výkladu. Protože jde o látku, která nebyla obsažena v odstavcích věnovaných $\mathbf{E}_n$, zformulujeme naše poznatky opět patřičným způsobem do číslovaných definic a tvrzení.

Definice 2.7.1. Nechť p je přímka v $\mathbf{E}_3$, A, B dva body v $\mathbf{E}_3$ takové, že p, A, B neleží v jedné rovině. Sjednocení polorovin $\overrightarrow{pA} \cup \overrightarrow{pB}$ se nazývá *dvojstěn*, přímka p jeho hrana. Takový dvojstěn budeme značit $\mathbf{D}(p; A, B)$.

Poznámka: Čtenář se lehce přesvědčí, že $\mathbf{D}(p; A, B)$ je hranice klínu (definice 1.10.1).

Definice 2.7.2. Nechť $\mathbf{D}(p; A, B)$ je dvojstěn. Nechť C_1 je pata kolmice spuštěné v polorovině $\overrightarrow{pA}$ z A na p, podobně C_2 je pata kolmice spuštěné v polorovině $\overrightarrow{pB}$ z B na p. Potom odchylka vektorů $A - C_1$ a $B - C_2$ se nazývá odchylka dvojstěnu $\mathbf{D}(p; A, B)$ a budeme ji značit $\delta(\mathbf{D}(p; A, B))$.

Zřejmá je následující věta.

Věta 2.7.1. $\delta(\mathbf{D}(p; A, B)$ nezávisí na bližší volbě bodů A a B v polorovinách bodů tvořících dvojstěn.

Nechť je dán dvojstěn $\mathbf{D}(p; A, B)$ a body A, B jsou zvoleny tak, že vektory $A - C_1$, $B - C_2$ jsou jednotkové; označme je po řadě $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$. Nechť dále $\boldsymbol{p}$ je jednotkový vektor ležící v přímce p. Mějme vektory $\boldsymbol{v}_1$ a $\boldsymbol{v}_2$, pro něž platí $\boldsymbol{v}_1 . \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}_1 . \boldsymbol{a} = 0, \|\boldsymbol{v}_1\| = 1$, podobně $\boldsymbol{v}_2 . \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}_2 . \boldsymbol{b} = 0, \|\boldsymbol{v}_2\| = 1$. Potom zřejmě

$\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ jsou ortonormální báze v zaměření $\mathbf{V}_3$ prostoru $\mathbf{E}_3$. Zvolme navíc vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ tak, že tyto dvě báze jsou souhlasné. Potom odchylka vektorů

$$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 = \delta(\mathbf{D}(p; A, B)). \tag{20}$$

Toto tvrzení dokážeme takto. Napišme vzorce pro transformaci převádějící bázi $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ na bázi $\langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1 \rangle$. Protože jde o ortonormální báze, dostáváme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}, \\ \boldsymbol{a} &= \quad a\boldsymbol{b} + b\boldsymbol{v}_2, \\ \boldsymbol{v}_1 &= \quad c\boldsymbol{b} + d\boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

Báze $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}_2 \rangle$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1 \rangle$ jsou souhlasné ortonormální báze v doplňku k vektorovému podprostoru $[\{\boldsymbol{p}\}] = \{k\boldsymbol{p} : k \in \mathbf{R}\}$, a tedy podle (11) $a = d$. Je potom

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \,.\, \boldsymbol{b} &= a, \\ \boldsymbol{v}_1 \,.\, \boldsymbol{v}_2 &= d. \end{aligned} \tag{21}$$

Ze vztahů (21) plyne ihned (20).

Přejděme nyní k definici trojhranu.

Definice 2.7.3. Nechť $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ je báze v zaměření $\mathbf{V}_3$ prostoru $\mathbf{E}_3$. Nechť A, B, C, D jsou body v $\mathbf{E}_3$ a $\boldsymbol{u}_1 = B - A$, $\boldsymbol{u}_2 = C - A$, $\boldsymbol{u}_3 = D - A$. Potom sjednocení úhlů $\sphericalangle BAC \cup \sphericalangle CAD \cup \sphericalangle DAB$ nazveme *trojhran* a označíme $\mathbf{T}(A, B, C, D) = \mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Bod A nazveme vrchol trojhranu, polopřímky AB, AC, AD jeho hranami, úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle DAB$ jeho stěnami.

Vidíme, že pro $k_1, k_2, k_3 > 0$ platí $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3) = \mathbf{T}(A; k_1\boldsymbol{u}_1, k_2\boldsymbol{u}_2, k_3\boldsymbol{u}_3)$.

Definice 2.7.4. Pro trojhran $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ odchylky vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2; \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3; \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1$ označíme $\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2$ a nazveme je stěnové odchylky, odchylky dvojstěnů $\mathbf{D}(AB; C, D)$; $\mathbf{D}(AC; B, D)$; $\mathbf{D}(AD; B, C)$ označíme $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ a nazveme je hranové odchylky.

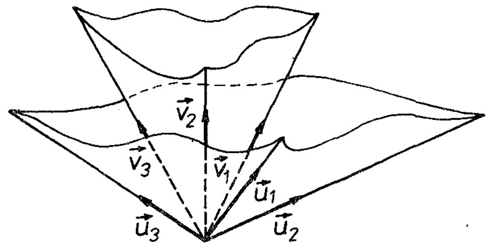
Dokážeme nejprve následující pomocné tvrzení.

Věta 2.7.2. Nechť $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ jsou tři nezávislé vektory ve $\mathbf{V}_3$. Potom existuje právě jedna trojice vektorů $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$, pro něž platí:

1. $\|\boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_2\| = \|\boldsymbol{v}_3\| = 1$,
2. $\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_1 > 0$, $\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_2 = 0$, $\boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_3 = 0$,
   $\boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_1 = 0$, $\boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_2 > 0$, $\boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_3 = 0$,
   $\boldsymbol{u}_3 . \boldsymbol{v}_1 = 0$, $\boldsymbol{u}_3 . \boldsymbol{v}_2 = 0$, $\boldsymbol{u}_3 . \boldsymbol{v}_3 > 0$.

Tyto vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ jsou nezávislé a báze $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ je souhlasná s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Zaměníme-li $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ za vektory $k_1\boldsymbol{u}_1, k_2\boldsymbol{u}_2, k_3\boldsymbol{u}_3$, kde k_1, k_2, k_3 jsou kladná čísla, dostaneme tytéž vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ (obr. 27).

Důkaz. Protože $\boldsymbol{v}_1$ musí být kolmé k $\boldsymbol{u}_2$ a $\boldsymbol{u}_3$ a protože $\|\boldsymbol{v}_1\| = 1$, je $\boldsymbol{v}_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3\|}$ nebo $\boldsymbol{v}_1 = -\dfrac{\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3}{\|\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3\|}$ (při určité, ale přitom libovolné orien-



Obr. 27

taci $\mathbf{V}_3$). Podmínce $\boldsymbol{v}_1 . \boldsymbol{u}_1 > 0$ vyhovuje právě jeden z těchto vektorů. Podobně pro $\boldsymbol{v}_2$ a $\boldsymbol{v}_3$.

Nechť tedy $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ splňují 1 a 2 z naší věty.

Nechť $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$ je nějaká ortonormální báze ve $\mathbf{V}_3$ a nechť

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{3} x_{ij}\boldsymbol{w}_j \qquad \text{pro } i = 1, 2, 3,$$

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{3} y_{ij}\boldsymbol{w}_j \qquad \text{pro } i = 1, 2, 3.$$

Tedy

$$\begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12}, & x_{13} \\ x_{21}, & x_{22}, & x_{23} \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{33} \end{vmatrix}$$

je determinant přechodu od báze $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$ k bázi $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Podobně

$$\begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & y_{13} \\ y_{21}, & y_{22}, & y_{23} \\ y_{31}, & y_{32}, & y_{33} \end{vmatrix}$$

je determinant přechodu od báze $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$ k bázi $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, pokud dokážeme, že tento determinant je různý od 0.

Ale

$$\begin{vmatrix} x_{11}, & x_{12}, & x_{13} \\ x_{21}, & x_{22}, & x_{23} \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{33} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & y_{13} \\ y_{21}, & y_{22}, & y_{23} \\ y_{31}, & y_{32}, & y_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{u}_1 . \boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{u}_2 . \boldsymbol{v}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 . \boldsymbol{v}_1, & \boldsymbol{u}_3 . \boldsymbol{v}_2, & \boldsymbol{u}_3 . \boldsymbol{v}_3 \end{vmatrix}$$

a podle 1 a 2 je tento součin kladný. Oba dva činitelé jsou od 0 různí a mají totéž znaménko. Tím je tvrzení o $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ dokázáno. Tvrzení pro $k_1\boldsymbol{u}_1, k_2\boldsymbol{u}_2, k_3\boldsymbol{u}_3$ je zřejmé.

Věta 2.7.3. Nechť $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ mají týž význam jako v předchozí větě. Potom $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, $\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ jsou báze souhlasné s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$.

Důkaz. Dokážeme nejprve, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3$ tvoří bázi souhlasnou s $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Položme $\boldsymbol{v}_3 = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3$. Protože $\|\boldsymbol{v}_3\|^2 = a_3 \,.\, \boldsymbol{u}_3 \,.\, \boldsymbol{v}_3$, je $a_3 > 0$, a tedy determinant

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ a_1, & a_2, & a_3 \end{vmatrix} = a_3 > 0.$$

Ale tento výsledek zaručuje, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3 = a_1\boldsymbol{u}_1 + a_2\boldsymbol{u}_2 + a_3\boldsymbol{u}_3$ jsou lineárně nezávislé a tvoří bázi souhlasnou s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Zbytek tvrzení vyplyne změnou označení ze skutečnosti, že báze $\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle$ a $\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$ jsou souhlasné s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$.

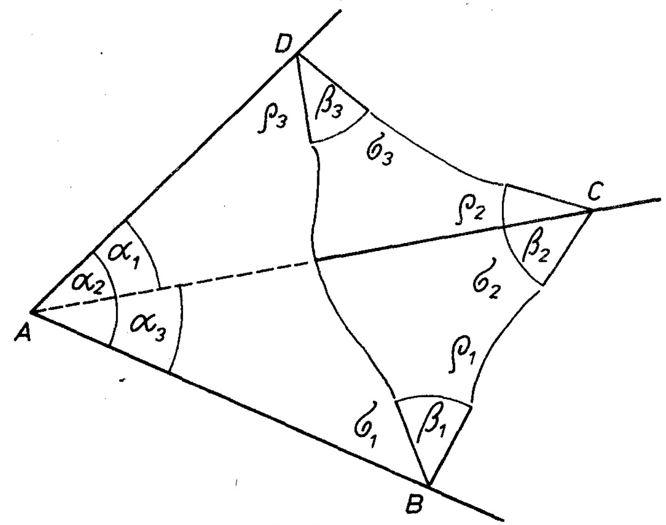
Definice 2.7.5. Je-li $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ trojhran, a $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ jsou vektory z věty 2.7.2, potom trojhran $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ nazýváme trojhran polární k trojhranu $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$.

Snadno se zjistí, že polární trojhran k $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ je původní trojhran. Označíme-li jako dříve stěnové odchylky trojhranu $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ a podobně hranové odchylky $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, potom u polárního trojhranu značíme stěnové odchylky $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ a hranové odchylky $\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3$ (obr. 28).

Platí tato důležitá věta:

Věta 2.7.4. Nechť $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ je trojhran a $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ trojhran k němu polární. Potom

$$\beta_1 = \pi - \alpha'_1, \ \beta_2 = \pi - \alpha'_2, \ \beta_3 = \pi - \alpha'_3,$$
$$\alpha_1 = \pi - \beta'_1, \ \alpha_2 = \pi - \beta'_2, \ \alpha_3 = \pi - \beta'_3.$$



Obr. 28

Důkaz. Předpokládejme, že $\|\boldsymbol{u}_1\| = \|\boldsymbol{u}_2\| = \|\boldsymbol{u}_3\| = 1$. Nechť $\mathbf{e}_2$ je jednotkový vektor kolmý k přímce $[A; \boldsymbol{u}_1]$ takový, že existuje bod C' v polorovině $\overline{ABC}$, pro nějž $\mathbf{e}_2 = C' - B$. Podobně je definován bod D' v polorovině $\overline{ABD}$ a vektor $\mathbf{e}_3 = D' - B$. Podle definice hranové odchylky v $\mathbf{T}(A, B, C, D)$ je β_1 rovno odchylce vektorů $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$, tedy $\cos\beta_1 = \mathbf{e}_2 \,.\, \mathbf{e}_3$. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ tvoří bázi, a protože existují čísla c, d, e a f tak, že čísla d, f jsou kladná a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 &= c\boldsymbol{u}_1 + d\mathbf{e}_2, \\ \boldsymbol{u}_3 &= e\boldsymbol{u}_1 \qquad\quad + f\mathbf{e}_3, \end{aligned} \tag{22}$$

je báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ souhlasná s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Z první rovnice v (22) též plyne, že báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ je souhlasná s $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$, a podle věty 2.7.3 je proto souhlasná s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Vidíme, že báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ je souhlasná s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$. Podobně se dokáže, že báze $\langle \boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$ je souhlasná s bází $\langle \boldsymbol{u}_1, \mathbf{e}_3, -\boldsymbol{v}_2 \rangle$. Podle vztahu (20), provedeme-li příslušná přeznačení, je $\mathbf{e}_2 \,.\, \mathbf{e}_3 = -\boldsymbol{v}_2 \,.\, \boldsymbol{v}_3$. Protože $\boldsymbol{v}_2 \,.\, \boldsymbol{v}_3 = \cos\alpha'_1$, máme $\cos\beta_1 = -\cos\alpha'_1$ a odtud $\beta_1 = \pi - \alpha'_1$. Cyklickou záměnou a ze skutečnosti, že trojhran $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ je polární k trojhranu $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$, dostaneme ostatní vztahy.

Nyní již můžeme odvodit vztahy pro stěnové a hranové odchylky v trojhranu $\mathbf{T}(A; \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$. Tento trojhran bude libovolný, ale pevně zvolený. Kvůli jednoduchosti výpočtů budeme předpokládat $\|\boldsymbol{u}_1\| = \|\boldsymbol{u}_2\| = \|\boldsymbol{u}_3\| = 1$. Nechť dále $\langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$ je ortonormální báze ve $\mathbf{V}_3$, souhlasná s $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$. Prostor $\mathbf{V}_3$ orientujeme tím, že $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ považujeme za kladnou bázi. Z definice $\boldsymbol{v}_3$ víme, že $\boldsymbol{v}_3$ je kolmý vektor k $\boldsymbol{u}_1$ a $\boldsymbol{u}_2$, a tedy podle věty 2.7.3 je $k \,.\, \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2$, kde $k > 0$. Ze vztahu (8) odstavce 2.5 plyne, že $k = \sin\alpha_3$. Proto

$$\begin{aligned} &\sin\alpha_3 \,.\, \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2; \qquad \sin\alpha_2 \,.\, \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1; \\ &\sin\alpha_1 \,.\, \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3 \end{aligned} \tag{23}$$

(druhý a třetí vztah jsme dostali cyklickou záměnou). Odtud

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_3 \,.\, \boldsymbol{u}_3 \,.\, \sin\alpha_3 = (\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \,.\, \boldsymbol{u}_3; \qquad \boldsymbol{v}_2 \,.\, \boldsymbol{u}_2 \,.\, \sin\alpha_2 = (\boldsymbol{u}_3 \times \boldsymbol{u}_1) \,.\, \boldsymbol{u}_2; \\ &\boldsymbol{v}_1 \,.\, \boldsymbol{u}_1 \,.\, \sin\alpha_1 = (\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{u}_3) \,.\, \boldsymbol{u}_1. \end{aligned}$$

Je-li

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}_1 = x_1\boldsymbol{w}_1 + x_2\boldsymbol{w}_2 + x_3\boldsymbol{w}_3; \qquad \boldsymbol{u}_2 = y_1\boldsymbol{w}_1 + y_2\boldsymbol{w}_2 + y_3\boldsymbol{w}_3; \\ &\boldsymbol{u}_3 = z_1\boldsymbol{w}_1 + z_2\boldsymbol{w}_2 + z_3\boldsymbol{w}_3, \end{aligned}$$

je

$$(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \,.\, \boldsymbol{u}_3 = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] = \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix}.$$

Protože

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] = [\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1] = [\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2] \qquad \text{(viz věta 2.2.2),}$$

je

$$(24) \qquad \mathbf{v}_1 \,.\, \mathbf{u}_1 \,.\, \sin\alpha_1 = \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{u}_2 \,.\, \sin\alpha_2 = \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{u}_3 \,.\, \sin\alpha_3 \,.$$

Přepíšeme-li (24) pro polární trojhran $\mathbf{T}(A; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, je

$$\mathbf{u}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 \,.\, \sin\alpha_1' = \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{u}_2 \,.\, \sin\alpha_2' = \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{u}_3 \,.\, \sin\alpha_3' \,.$$

Použijeme-li větu 2.7.4, dostaneme

$$(25) \qquad \mathbf{u}_1 \,.\, \mathbf{v}_1 \,.\, \sin\beta_1 = \mathbf{v}_2 \,.\, \mathbf{u}_2 \,.\, \sin\beta_2 = \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{u}_3 \,.\, \sin\beta_3 \,.$$

Z (24) a (25) vyplývá

$$(26) \qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\alpha_3}{\sin\beta_3}\,,$$

což je sinová věta pro $\mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

Odvodíme nyní tzv. první kosinovou větu pro $\mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Podle věty 2.2.8

$$(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \,.\, (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \,.\, \mathbf{u}_3, & \mathbf{u}_1 \,.\, \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{u}_3, & \mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{u}_1 \end{vmatrix}.$$

Ze vztahu (23) je

$$(27) \qquad \begin{aligned} (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2) \,.\, (\mathbf{u}_3 \times \mathbf{u}_1) &= \sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \mathbf{v}_3 \,.\, \mathbf{v}_2 = \\ &= -\sin\alpha_3 \,.\, \sin\alpha_2 \,.\, \cos\beta_1 \,. \end{aligned}$$

Dále

$$(28) \qquad (\mathbf{u}_1 \,.\, \mathbf{u}_3) \,.\, (\mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{u}_1) - (\mathbf{u}_2 \,.\, \mathbf{u}_3) \,.\, \|\mathbf{u}_1\|^2 = \cos\alpha_2 \,.\, \cos\alpha_3 - \cos\alpha_1 \,.$$

Spojením (27) a (28) získáváme vztah

$$(29) \qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2 \,.\, \cos\alpha_3 + \sin\alpha_2 \,.\, \sin\alpha_3 \,.\, \cos\beta_1 \,,$$

což je první kosinová věta pro trojhran $\mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

Přepíšeme-li (29) pro $\mathbf{T}(A; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ a použijeme-li větu 2.7.4, dostaneme

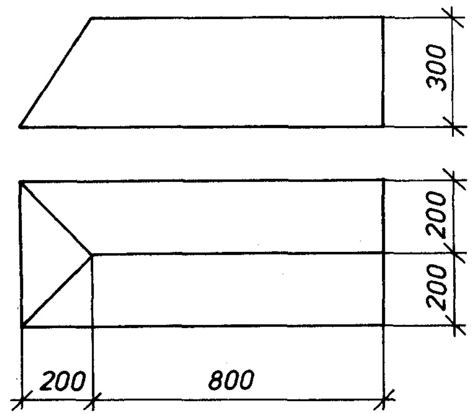
$$(30) \qquad \cos\beta_1 = -\cos\beta_2 \,.\, \cos\beta_3 + \sin\beta_2 \,.\, \sin\beta_3 \,.\, \cos\alpha_1$$

(2. věta kosinová pro $\mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$).

Poznámka. Je-li dán trojhran $\mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ a je-li $\mathbf{K}$ kulová plocha o středu v bodě A, je průnik $\mathbf{K} \cap \mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ obvodem sférického trojúhelníku a vztahy (26), (29), (30) jsou východiskem k odvození příslušných vzorců ze sférické trigonometrie (viz odstavec 3.5).

Cvičení

1. Nechť $ABCD$ je čtyřstěn takový, že $|AC| = |AD|$ a přímky DB a CB jsou kolmé k přímce AB. Ukažte, že odchylka vektorů $C - A$ a $D - A$ je menší než odchylka vektorů $C - B$ a $D - B$.



Obr. 29

2. Nechť $\langle A; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$ je repér kartézské soustavy souřadnic v $\mathbf{E}_3$. Najděte polární trojhran k trojhranu $\mathbf{T}(A; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$, kde
   a) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2$, $\mathbf{u}_2 = 3\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3$,
   b) $\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3$, $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3$.
3. Nechť $\mathbf{T}(A, B, C, D)$ je trojhran a $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jeho stěnové odchylky. Ukažte, že $0 < \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 2\pi$.
4. Dokažte, že v trojhranu platí $|\alpha_2 - \alpha_3| < \alpha_1 < \alpha_2 + \alpha_3$.
5. Je třeba postavit střechu s půdorysem a nárysem zadaným na obr. 29. Vypočtěte odchylky dvojstěnů, které jsou tvořeny stěnami střechy a odchylky hran střechy, pokud vycházejí z nějakého společného vrcholu.

KAPITOLA 3

MNOŽINY BODŮ DEFINOVANÉ POMOCÍ VZDÁLENOSTI

V této kapitole budeme hodně mluvit o vzdálenosti bodů v euklidovské rovině a v euklidovském prostoru a protože vzdálenost dvou bodů se vyjádří poměrně jednoduše v souřadnicích vzhledem ke kartézské soustavě souřadnic, budeme vždy volit jen takové soustavy souřadnic.

3.1. Množiny bodů v euklidovské rovině definované pomocí vzdálenosti

Začneme množinami v euklidovské rovině. Nechť je v euklidovské rovině zvolena kartézská soustava souřadnic, v níž má bod A souřadnice $[a, b]$, bod C souřadnice $[c, d]$. Pak se vzdálenost bodů A, C rovná

$$|AC| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}.$$

Má-li přímka rovnici $px + qy + s = 0$ (alespoň jedno z čísel p, q je různé od nuly), je vzdálenost bodu A od této přímky dána výrazem

$$\frac{|pa + qb + s|}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

a) Kružnice k se středem v bodě $A = [a, b]$ a s poloměrem $r > 0$ je množina všech bodů roviny, které mají od bodu A vzdálenost rovnou číslu r. Budeme stručně mluvit o kružnici $k(A, r)$. Bod $X = [x, y]$ je proto bodem kružnice $k(A, r)$ právě tehdy, je-li

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r.$$

Vzhledem k tomu, že jde o rovnost nezáporných čísel, je tato rovnice ekvivalentní s rovnicí

(1) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Říkáme, že rovnice (1) je rovnicí kružnice o středu $A = [a, b]$ a poloměru r. Můžeme ji upravit na tvar

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Obráceně však nemusí být každá rovnice tohoto tvaru rovnicí kružnice. Můžeme ji totiž psát ve tvaru

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2 + n^2 - 4p}{4}$$

a je-li výraz v čitateli zlomku na pravé straně záporný, neexistují reálná čísla x, y tak, aby vyhovovala této rovnici. Je-li $m^2 + n^2 - 4p = 0$, splňují uvedenou rovnici pouze souřadnice bodu $\left[-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right]$. Je-li $m^2 + n^2 - 4p > 0$, můžeme zvolit právě jedno kladné číslo r tak, aby $4r^2 = m^2 + n^2 - 4p$, a okamžitě vidíme, že výše uvedená rovnice je rovnicí kružnice o středu $\left[-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right]$ a poloměru r.

Pro každý bod $X = [x, y]$ se výraz $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2$ nazývá *mocnost* bodu X ke kružnici $k(A, r)$. Je to rozdíl druhé mocniny vzdálenosti bodu X od středu kružnice a druhé mocniny poloměru kružnice. Body roviny, které mají od středu kružnice vzdálenost větší, než je její poloměr (body vnější oblasti kružnice), mají k ní mocnost kladnou; body, které mají od středu kružnice vzdálenost menší, než je poloměr kružnice (body vnitřní oblasti kružnice), mají k ní mocnost zápornou. Bod leží na kružnici právě tehdy, má-li vzhledem k ní mocnost nulovou.

Hledejme analyticky (tj. pomocí souřadnic) společné body kružnice o rovnici (1) a přímky o rovnici $px + qy + s = 0$. Víme, že alespoň jeden z koeficientů p, q je různý od nuly. Nechť je například $p \neq 0$. Rovnice (1) je pak ekvivalentní s rovnicí

$$(px - pa)^2 + (py - pb)^2 = p^2r^2,$$

kterou jsme dostali z rovnice (1) vynásobením nenulovým číslem p^2. Je-li bod $X = [x, y]$ společným bodem přímky a kružnice, musí pro jeho souřadnici y platit

$$(-qy - s - pa)^2 + (py - pb)^2 = p^2r^2,$$

tedy

$$(p^2 + q^2)y^2 + 2(qs + pqa - p^2b)y + 2psa + p^2a^2 + \\ + p^2b^2 - p^2r^2 + s^2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice pro y, protože $p^2 + q^2 \neq 0$. Pro diskriminant D této kvadratické rovnice platí

$$\tfrac{1}{4}D = p^2[(p^2 + q^2)r^2 - (pa + qb + s)^2],$$

a je tudíž

$$D > 0 \Leftrightarrow \frac{|pa + qb + s|}{\sqrt{p^2 + q^2}} < r.$$

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{|pa + qb + s|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = r.$$

Jinými slovy, $D \geqq 0$ právě tehdy, když je vzdálenost středu $A = [a, b]$ dané kružnice od přímky $px + qy + s = 0$ menší nebo nejvýše rovna poloměru r kružnice. Je-li tato vzdálenost větší než r, je $D < 0$ a přímka nemá s kružnicí žádné společné body. V případě $D > 0$ má výše odvozená kvadratická rovnice pro y dva různé reálné kořeny; ke každému z nich vypočteme z rovnice přímky příslušnou hodnotu x. Dostaneme tak souřadnice dvou různých bodů a zkouškou dosazením se přesvědčíme, že jsou oba společnými body přímky a kružnice. Je-li $D = 0$, dostaneme právě jeden společný bod přímky a kružnice. Přímka je tečnou kružnice, společný bod bodem dotyku přímky a kružnice.

Příklad. Určete společné body kružnice $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$ a přímky $3x + 2y + d = 0$.

Řešení. Rovnici kružnice vynásobíme čtyřmi, dostaneme $(2x + 6)^2 + (2y - 10)^2 = 64$. Pro souřadnici x společného bodu přímky a kružnice musí platit

$$(2x + 6)^2 + (-d - 3x - 10)^2 = 64,$$

po úpravě

$$13x^2 + (84 + 6d)\,x + d^2 + 20d + 72 = 0.$$

To je pro x kvadratická rovnice, pro její diskriminant D platí

$$\tfrac{1}{4}D = (42 + 3d)^2 - 13(d^2 + 20d + 72) = -4(d^2 + 2d - 207).$$

Je-li $d^2 + 2d - 207 > 0$, nemá rovnice pro x reálné řešení, přímka a kružnice nemají společné body. Je-li $d^2 + 2d - 207 < 0$, tzn. když je d z intervalu $(-4\sqrt{13} - 1, 4\sqrt{13} - 1)$, má rovnice pro x dva různé reálné kořeny

$$x_1 = \frac{-42 - 3d + 2\sqrt{207 - 2d - d^2}}{13},$$

$$x_2 = \frac{-42 - 3d - 2\sqrt{207 - 2d - d^2}}{13}.$$

K nim najdeme z rovnice $3x + 2y + d = 0$ hodnoty

$$y_1 = \frac{63 - 2d - 3\sqrt{207 - 2d - d^2}}{13},$$

$$y_2 = \frac{63 - 2d + 3\sqrt{207 - 2d - d^2}}{13}.$$

Můžeme se ještě zkouškou přesvědčit, že body $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$ jsou společnými body dané kružnice a dané přímky. V případě $d^2 + 2d - 207 = 0$ oba tyto body splývají, přímka je tečnou kružnice, obdržený bod bodem dotyku přímky a kružnice.

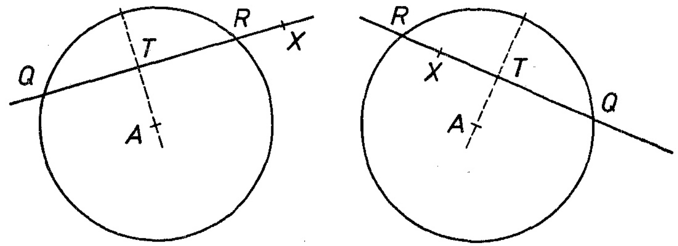
Vraťme se k obecnému případu hledání průsečíků přímky a kružnice. Pro souřadnice y společných bodů přímky a kružnice jsme dostali kvadratickou

rovnici. Uvažujme jen případ, kdy je její diskriminant D kladný, a kdy tedy existují dva průsečíky přímky s kružnicí. Hledáme-li souřadnice středu obou průsečíků, můžeme postupovat tak, že vypočteme obě souřadnice obou průsečíků a první souřadnici středu dostaneme jako aritmetický průměr prvních souřadnic průsečíků, analogicky pro druhou souřadnici. Můžeme však postupovat jednodušeji. Z vlastnosti kořenů kvadratické rovnice plyne, že se druhá souřadnice středu obou průsečíků rovná zlomku

$$\frac{p^2b - pqa - qs}{p^2 + q^2}.$$

Z rovnice přímky pak vypočteme první souřadnici hledaného středu. Snadno se přesvědčíte, že tento střed splývá s patou kolmice vedené středem kružnice k dané přímce $px + qy + s = 0$.

Veďme bodem X z vnější oblasti kružnice $k(A, r)$ přímku, která protíná kružnici v bodech R, Q (obr. 30a) a nechť je T pata kolmice vedené středem A na přímku QR. Pak je $|TR| = |TQ|$ a $|XR|\,|XQ| = (|XT| - |TR|)(|XT| + |TQ|) = |XT|^2 - |TR|^2 = |XA|^2 - |AT|^2 - (|AR|^2 - |AT|^2) = |XA|^2 - r^2$, což je mocnost bodu X ke kružnici $k(A, r)$. Obdobně platí pro bod X z vnitřní oblasti kružnice (obr. 30b) a tětivu RQ, která bod X obsahuje: $|XR|\,|XQ| = (|TR| - |XT|)(|TQ| + |XT|) = |TR|^2 - |XT|^2 = r^2 - |AT|^2 - (|XA|^2 - |AT|^2) = r^2 - |XA|^2$. Je tedy v tomto případě součin $|XR|\,|XQ|$ roven absolutní hodnotě záporné mocnosti bodu X ke kružnici $k(A, r)$.



Obr. 30a, b

Počítejme teď analyticky průsečíky dvou kružnic, kružnice o rovnici (1) a kružnice se středem $C = [c, d]$ a s poloměrem t, která má tudíž rovnici $(x - c)^2 + (y - d)^2 - t^2 = 0$. Souřadnice $[x, y]$ bodu X vyhovují oběma těmto rovnicím právě tehdy, když splňují rovnici (1) a zároveň rovnici

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 - t^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2.$$

Tato rovnice je splněna pro ty body $X = [x, y]$, které mají k oběma kružnicím stejnou mocnost. Rovnici můžeme upravit na tvar

$$2(a - c)x + 2(b - d)y + c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + r^2 - t^2 = 0.$$

Jsou-li středy obou kružnic různé, jde o rovnici přímky, tzv. *chordály* obou kružnic, tj. množiny všech bodů, které mají k oběma nesoustředným kružnicím stejnou mocnost. Protože $(a - c, b - d)$ je vektor kolmý na naši chordálu a zároveň je to vektor tvořený středy uvažovaných kružnic, můžeme vyslovit tvrzení: Chordála dvou nesoustředných kružnic je vždy kolmá na spojnici jejich středů.

Pro dvě různé soustředné kružnice neexistuje bod, který by měl k oběma stejnou mocnost. Proto se také nedefinuje chordála dvou soustředných kružnic. Otázka společných bodů dvou soustředných kružnic je zřejmá – buď nemají žádný společný bod, nebo obě kružnice splývají.

V případě nesoustředných kružnic musí společné body obou kružnic ležet na jejich chordále a společné body chordály a jedné kružnice jsou i body druhé kružnice. Jsou to totiž body, které mají k oběma kružnicím nulovou mocnost. Tím je úloha nalezení společných bodů dvou kružnic převedena na předcházející případ nalezení společných bodů přímky a kružnice.

Nechť jsou k_1, k_2, k_3 tři navzájem různé kružnice v rovině a nechť je přímka p chordálou kružnic k_1 a k_2 a přímka q chordálou kružnic k_2, k_3. Jsou-li přímky p, q různoběžné, má jejich průsečík stejnou mocnost ke kružnicím k_1 a k_2 a rovněž stejnou mocnost ke kružnicím k_2, k_3, a tedy i stejnou mocnost ke kružnicím k_1 a k_3. Proto jsou kružnice k_1 a k_3 nesoustředné a jejich chordála r prochází průsečíkem přímek p, q. Společný bod přímek p, q, r se nazývá chordální střed kružnic k_1, k_2, k_3. Je to jediný bod roviny, který má ke všem třem kružnicím stejnou mocnost. Jsou-li přímky p, q rovnoběžné a různé, jsou buď kružnice k_1 a k_3 soustředné, nebo je jejich chordála také rovnoběžná s přímkami p, q. V opačném případě by totiž průsečíkem přímek p, r musela procházet podle předešlého i přímka q. Jsou-li přímky p, q totožné, splývá s nimi i přímka r, protože každý bod přímky p má stejnou mocnost ke kružnicím k_1, k_2 i k_3.

b) Množina všech bodů $X = [x, y]$, které mají od dané přímky $px + qy + s = 0$ (alespoň jedno z čísel p, q je různé od nuly) vzdálenost rovnou danému kladnému číslu r, je analyticky dána rovnicí

$$\frac{|px + qy + s|}{\sqrt{p^2 + q^2}} = r,$$

tj. $px + qy + s = r\sqrt{p^2 + q^2}$ nebo $px + qy + s = -r\sqrt{p^2 + q^2}$. Je tedy uvažovanou množinou množina všech bodů dvou rovnoběžek rovnoběžných s danou přímkou $px + qy + s = 0$.

c) Hledejme množinu všech bodů $X = [x, y]$ euklidovské roviny, jejichž poměr vzdáleností od dvou daných různých bodů A, B se rovná danému kladnému

číslu k, tj. $|XA| : |XB| = k$. Pro každý takový bod X musí být $X \neq B$ a $|XA|^2 = k^2|XB|^2$. Obráceně, je-li $|XA|^2 = k^2|XB|^2$, je $X \neq B$ (v opačném případě by bylo $X = B$ a $X = A$, avšak body A, B jsou podle předpokladu různé) a z $|XA|^2 = k^2|XB|^2$ plyne $|XA| : |XB| = k$. Zvolme soustavu souřadnic tak, že osa x splývá s přímkou AB. Potom $A = [a, 0]$, $B = [b, 0]$, $a \neq b$ a bod $X = [x, y]$ splňuje rovnici $|XA|^2 = k^2|XB|^2$ právě tehdy, je-li

$$(x - a)^2 + y^2 = k^2[(x - b)^2 + y^2],$$

po úpravě

$$(1 - k^2)(x^2 + y^2) - 2(a - k^2b)x + a^2 - k^2b^2 = 0.$$

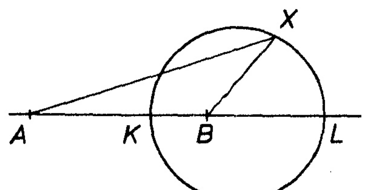
Musíme rozlišit dva případy. Je-li $k = 1$, má poslední rovnice tvar $2(b - a)x = b^2 - a^2$, a protože je $b \neq a$, je ekvivalentní s rovnicí $x = (a + b)/2$. To je rovnice osy úsečky AB, což jsme mohli ihned vyčíst ze vztahu $|XA| = k|XB| = |XB|$. Je-li $k \neq 1$, je $1 - k^2 \neq 0$ a výše odvozenou rovnici můžeme přepsat na tvar

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a - k^2b}{1 - k^2}x + \frac{a^2 - k^2b^2}{1 - k^2} = 0$$

nebo další úpravou na tvar

$$\left(x - \frac{a - k^2b}{1 - k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{(1 - k^2)^2}(a - b)^2.$$

To je rovnice kružnice se středem v bodě $\left[\frac{a - k^2b}{1 - k^2}, 0\right]$ a s poloměrem $r = \frac{k|a - b|}{|1 - k^2|}$, která se nazývá *Apolloniova kružnice* – podle matematika Apollonia z Pergy, který žil kolem roku 200 před naším letopočtem. Apolloniovu kružnici jednoznačně určují kladné číslo k a body A, B, od kterých mají všechny její body poměr vzdáleností, rovnající se tomuto číslu k. Její střed leží na spojnici AB a její průsečíky se spojnicí AB jsou body K, L, jejichž dělicí poměr vzhledem k bodům A, B je k a $(-k)$. Při naší volbě soustavy souřadnic je spojnice AB osou x a body K, L mají souřadnice $\left[\frac{a - kb}{1 - k}, 0\right]$, $\left[\frac{a + kb}{1 + k}, 0\right]$, jak se můžeme snadno přesvědčit výpočtem společných bodů obdržené Apolloniovy kružnice a přímky AB. Apolloniova kružnice je pak kružnicí nad průměrem KL (obr. 31).

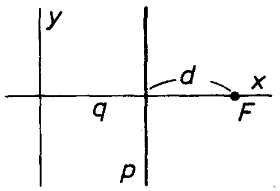


Obr. 31

d) Vyšetřme nyní, co je množinou všech bodů v euklidovské rovině, jejichž poměr vzdáleností od daného bodu F a dané přímky p se rovná danému kladnému číslu k. Hledáme tedy množinu všech bodů X, pro které $|Xp| \neq 0$ a

$$\frac{|XF|}{|Xp|} = k,$$

kde jsme $|Xp|$ označili vzdálenost bodu X od přímky p. Pro každý takový bod pak platí $|XF| = k|Xp|$. Leží-li bod F na přímce p, splňuje tuto rovnici i bod F, jinak jsou rovnice $|XF| = k|Xp|$ a $|XF|/|Xp| = k$ ekvivalentní. Abychom v prvním případě nemuseli bod F vylučovat, budeme raději vyšetřovat množinu všech bodů X, pro které je $|XF| = k|Xp|$, tj. $|XF|^2 = k^2|Xp|^2$. Soustavu souřadnic zvolíme tak, aby osa x procházela bodem F a byla kolmá na přímku p (obr. 32). Označme ještě d vzdálenost bodu F od přímky p. Je pak $F = [e, 0]$, přímka p má rovnici $x = c$ a při vhodné volbě orientace na ose x je $e = c + d$.



Obr. 32

Bod $X = [x, y]$ je právě tehdy bodem vyšetřované množiny, platí-li

$$(x - e)^2 + y^2 = k^2(x - c)^2,$$

po úpravě

$$x^2(1 - k^2) - 2(e - k^2c)x + e^2 - k^2c^2 + y^2 = 0. \tag{2}$$

Rozlišíme nejdříve dva případy, podle toho, zda bod F leží na přímce p, nebo nikoli:

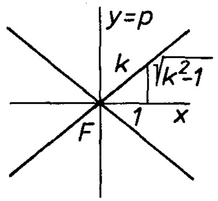
d_1) $F \in p$, tj. $d = 0$. Zvolíme-li ještě počátek soustavy souřadnic v bodě F, je $e = c = 0$, odvozená rovnice (2) pak zní

$$x^2(1 - k^2) + y^2 = 0.$$

Je-li $k < 1$, splňují tuto rovnici pouze souřadnice počátku, tj. bodu F; je-li $k = 1$, je rovnice ekvivalentní s rovnicí $y = 0$, hledaná množina se skládá ze všech bodů přímky kolmé k přímce p a procházející bodem F. Je-li $k > 1$, splňují výše odvozenou rovnici právě všechny body přímek (obr. 33)

$$y = x\sqrt{k^2 - 1} \quad \text{a} \quad y = -x\sqrt{k^2 - 1}.$$

d_2) Nechť bod F neleží na přímce p, jinými slovy nechť je $d \neq 0$. Rovnice (2) není zřejmě rovnice kružnice, je však ihned vidět, že zkoumaná množina je souměrná podle osy x. Splňují-li totiž rovnici (2) souřadnice bodu $X = [x, y]$, splňují ji i souřadnice bodu $X' = [x, -y]$, bodu souměrně sdruženého k bodu X podle osy x. Proto je osa x osou uvažované množiny.



Obr. 33

Měli bychom si ještě uvědomit, že jsme soustavu souřadnic zvolili tak, aby kolmice q vedená bodem F k přímce p byla osou x, a že jsme osu x orientovali, ale že máme ještě možnost zvolit počátek soustavy souřadnic v libovolném bodě přímky q. Každé volbě počátku odpovídá jistá dvojice hodnot c, e ($e = c + d$) a také obráceně, každé takové dvojici odpovídá jedna volba počátku.

Zvolíme-li například $e = 0$, $c = -d$, jinými slovy zvolíme-li počátek P soustavy souřadnic v bodě F, má rovnice (2) tvar

$$x^2 + y^2 = k^2(x + d)^2. \tag{3}$$

Vyšetřovaná množina se nazývá *kuželosečka*, protože ji můžeme dostat jako řez kuželové plochy rovinou. Bod F se nazývá *ohnisko* kuželosečky a přímka p její *řídicí přímka*. Rovnice (3) se nazývá *ohnisková rovnice kuželosečky*.

Jak bychom například museli volit počátek P, aby v rovnici (2) vymizel absolutní člen? Museli bychom e a c volit tak, aby platilo $e^2 = k^2c^2$. Má tedy platit $e = kc$ nebo $e = -kc$ a vždy samozřejmě $e = c + d$. Protože je $d \neq 0$, nemůže platit $e = kc$ a $e = c + d$ v případě $k = 1$. Avšak vždy lze zvolit c tak, aby platilo $e = c + d = -kc$. Stačí položit $c = -d/(1 + k)$, e se pak rovná $c + d = kd/(1 + k)$ a rovnice (2) má pak tvar

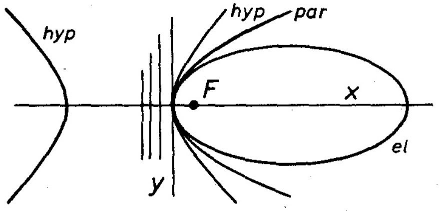
$$y^2 = 2kdx + (k^2 - 1)x^2. \tag{4}$$

To je tzv. *vrcholová rovnice kuželosečky*, protože počátek zvolené soustavy souřadnic je bodem kuželosečky a zároveň bodem osy kuželosečky. Bod kuželosečky, který leží na její ose, se nazývá *vrchol kuželosečky*.

Rozlišíme nyní tři případy:

$d_{2,1}$) $k = 1$, kuželosečka se nazývá *parabola*. Je to množina všech bodů euklidovské roviny, které mají od pevného bodu F a pevné přímky p ($F \notin p$) stejnou vzdálenost (obr. 34). Pro každý bod $X = [x, y]$ zkoumané paraboly je při poslední volbě soustavy souřadnic $x \geqq 0$.

$d_{2,2}$) $k > 1$, kuželosečka se nazývá *hyperbola*. Je to množina všech bodů euklidovské roviny, které mají od pevného bodu F a pevné přímky p ($F \notin p$) poměr vzdáleností roven danému číslu k, většímu než 1 (obr. 34). Při naší volbě soustavy souřadnic má hyperbola rovnici (4), odkud je vidět, že pro každý její bod $X = [x, y]$ je $2kdx + (k^2 - 1)x^2 \geqq 0$, tedy $x \geqq 0$ nebo $x \leqq -2kd/(k^2 - 1)$. Množina všech bodů hyperboly se takto rozdělí na dvě disjunktní části, tzv. *větve hyperboly*.



Obr. 34

$d_{2,3}$) $k < 1$, kuželosečka se nazývá *elipsa*, je množinou všech bodů euklidovské roviny, které mají od pevného bodu F a pevné přímky p, která bodem F neprochází, poměr vzdáleností roven danému kladnému číslu k, menšímu než 1 (obr. 34). Pro každý bod $X = [x, y]$ zkoumané elipsy je při zvolené soustavě souřadnic $0 \leqq x \leqq 2kd/(1 - k^2)$.

Názvy parabola, hyperbola a elipsa zavedl již zmíněný Apollonius z Pergy ve svých osmi knihách o kuželosečkách.

Vraťme se nyní k rovnici (2) a zkoumejme, zda bychom nemohli zase jinou vhodnou volbou počátku P soustavy souřadnic dosáhnout toho, že by v rovnici (2) sice nevymizel absolutní člen, ale koeficient u x. Museli bychom zvolit bod P na přímce q tak, aby platilo $e = c + d$ a $e = k^2c$, tedy $c + d = k^2c$. V případě paraboly $k = 1$ vidíme ihned, že to nejde, protože je $d \neq 0$. Je-li však $k \neq 1$, můžeme zvolit $c = d/(k^2 - 1)$, pak $e = k^2d/(k^2 - 1)$ a rovnice (2) bude mít tvar

$$(5) \qquad x^2(1 - k^2) + y^2 = \frac{k^2d^2}{1 - k^2}.$$

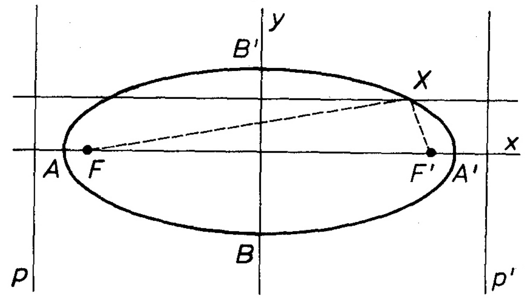
Vidíme, že jde o kuželosečku středově souměrnou podle zvoleného počátku: s každým bodem $X = [x, y]$, který splňuje rovnici (5), vyhovuje této rovnici i bod $X' = [-x, -y]$, který je s bodem X souměrně sdružený podle počátku. Jsou tedy elipsa a hyperbola středově souměrné, říkáme jim kuželosečky středové. O parabole se dá ukázat, že není středově souměrná podle žádného bodu. Rovnice (5) je tzv. ***středovou rovnicí*** elipsy ($k < 1$) nebo hyperboly ($k > 1$). Vidíme,

že středová kuželosečka o rovnici (5) je také osově souměrná podle osy y. Tato vlastnost plyne konečně také ze středové souměrnosti podle počátku a osové souměrnosti podle osy x.

Dál budeme zvlášť pojednávat o elipse a zvlášť o hyperbole. Víme, že pro $k < 1$ je rovnicí (5) dána elipsa. Položíme-li $a = kd/(1 - k^2)$, $b = kd/\sqrt{1 - k^2}$, můžeme rovnici (5) psát ve tvaru

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

který je uveden již ve většině učebnic pro střední školy. V této rovnici je $0 < b < a$, protože $b/a = \sqrt{1 - k^2}$. Dále $d = b^2/\sqrt{a^2 - b^2}$, $c = -a^2/\sqrt{a^2 - b^2}$, $e = -\sqrt{a^2 - b^2}$. Je tedy elipsa o rovnici (6) množinou všech bodů, které mají od bodu $F = [-\sqrt{a^2 - b^2}; 0]$ a od přímky p o rovnici $x = -a^2/\sqrt{a^2 - b^2}$ poměr vzdáleností roven číslu $k = \sqrt{1 - b^2/a^2} < 1$. Ze souměrnosti elipsy podle osy y plyne, že je také množinou všech bodů, které mají tentýž poměr vzdáleností od bodu $F' = [\sqrt{a^2 - b^2}, 0]$ a od přímky p' o rovnici $x = a^2/\sqrt{a^2 - b^2}$. Vidíme, že elipsa má kromě F a p další dvojici ohniska a řídicí přímky (obr. 35). Elipsa má čtyři vrcholy, v našem případě to jsou body $A = [-a, 0]$, $A' = [a, 0]$, $B = [0, -b]$ a $B' = [0, b]$. Bod X je právě tehdy bodem elipsy, je-li $|XF| = k|Xp| \Leftrightarrow |XF'| = k|Xp'|$. Je-li bod X bodem elipsy, leží v pásu ohraničeném přímkami p, p' a platí $|XF| + |XF'| = k(|Xp| + |Xp'|) = k\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = 2a$, kde $\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ je vzdálenost přímek p, p' neboli šířka pásu. Přitom je $|FF'| = 2\sqrt{a^2 - b^2} < 2a$.



Obr. 35

Nechť obráceně pro bod $X = [x, y]$ platí $|XF| + |XF'| = 2a$. Pak $|XF| = 2a - |XF'|$. Umocněním na druhou dostaneme

$$(x + \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2 =$$
$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2} + (x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2,$$

po úpravě

$$a\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2} = a^2 - x\sqrt{a^2-b^2}$$

a dalším umocněním dostaneme rovnici (6). Vidíme, že elipsa je také množinou všech bodů v rovině, které mají od dvou pevných bodů F, F' součet vzdáleností roven pevnému číslu $2a > |FF'|$.

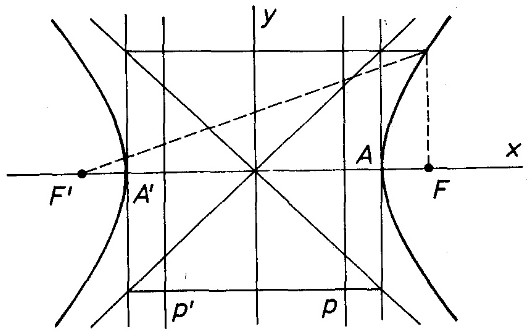
Ke každé elipse lze vždy zvolit soustavu souřadnic tak, že bod $X = [x, y]$ je právě tehdy bodem této elipsy, splňují-li jeho souřadnice rovnici (6), v níž $0 < b < a$. Je-li $0 < b = a$, je rovnicí (6) dána kružnice se středem v počátku o poloměru a. Budeme proto kružnici považovat za zvláštní případ elipsy, při kterém obě ohniska F, F' splývají se středem kružnice. Pro kružnici však není definována řídicí přímka.

Je-li v rovnici (6) $0 < a < b$, je to také rovnice elipsy se středem v počátku, která má ale ohniska na ose y, jsou to body $[0, \sqrt{b^2-a^2}]$, $[0, -\sqrt{b^2-a^2}]$.

Je-li $k > 1$, je rovnicí (5) dána hyperbola. Položíme-li $a = \dfrac{kd}{k^2-1}$, $b = \dfrac{kd}{\sqrt{k^2-1}}$, můžeme rovnici (5) psát ve tvaru

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Přitom $k = \sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$, $d = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $c = \dfrac{1}{k^2-1}d = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a $e = \dfrac{k^2}{k^2-1}d = \sqrt{a^2+b^2}$. Je proto hyperbola o rovnici (7) množinou všech bodů, které mají od bodu $F = [\sqrt{a^2+b^2}, 0]$ a od přímky $x = a^2/\sqrt{a^2+b^2}$ poměr vzdáleností rovný číslu $k = \sqrt{1+b^2/a^2} > 1$. Ze souměrnosti zvolené hyperboly podle osy y plyne, že je také množinou všech bodů, které mají tentýž poměr vzdáleností od bodu $F' = [-\sqrt{a^2+b^2}, 0]$ a od přímky p': $x = -a^2/\sqrt{a^2+b^2}$. Stejně jako elipsa má tudíž i hyperbola další dvojici ohniska a řídicí přímky (obr. 36), avšak pouze dva vrcholy. Při zvolené soustavě souřadnic jsou to body $A = [a, 0]$, $A' = [-a, 0]$, které leží na tzv. hlavní ose hyperboly, v našem případě je to osa x. Druhá osa hyperboly (osa y) hyperbolu neprotíná, nazývá se vedlejší osa hyperboly.



Obr. 36

Bod X je právě tehdy bodem hyperboly, je-li $|XF| = k|Xp|$ nebo také právě tehdy, je-li $|XF'| = k|Xp'|$. Pro každý bod hyperboly tudíž platí $|XF| - |XF'| = k(|Xp| - |Xp'|)$. Z rovnice (7) plyne, že pro každý bod $X = [x, y]$ uvažované hyperboly je $|x| \geqq a > a^2/\sqrt{a^2+b^2}$. Proto každý její bod leží vně pásu ohraničeného přímkami p, p', a tedy $\big||XF| - |XF'|\big| = k\big||Xp| - |Xp'|\big| = k\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2a$, neboť vzdálenost přímek p, p' je rovna $\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Nechť obráceně platí pro bod $X = [x, y]$ rovnost $\big||XF| - |XF'|\big| = 2a$, tedy $|XF| = 2a + |XF'|$ nebo $|XF| = -2a + |XF'|$. Umocněním dostaneme

$$\begin{aligned}(x-\sqrt{a^2+b^2})^2 + y^2 &= \\ &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2} + (x+\sqrt{a^2+b^2})^2 + y^2,\end{aligned}$$

přičemž platí buď znaménko +, nebo znaménko −. Úpravou dostaneme

$$\mp a\sqrt{(x+\sqrt{a^2+b^2})^2+y^2} = a^2 + x\sqrt{a^2+b^2}.$$

Opětným umocněním pak dostaneme vztah (7). Hyperbola je tudíž také množinou všech bodů, které mají absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od dvou pevných bodů F, F' rovnou danému číslu $2a < |FF'|$.

Můžeme si udělat přehled obdržených výsledků:
Množinou všech bodů X euklidovské roviny, pro které se rovná danému kladnému číslu

vzdálenost bodu X od daného bodu	– je kružnice
vzdálenost bodu X od dané přímky	– jsou dvě rovnoběžky
poměr vzdáleností bodu X od dvou daných různých bodů	– je kružnice nebo přímka
poměr vzdáleností bodu X od daného bodu a dané přímky, která jím neprochází	– je parabola, hyperbola nebo elipsa, která není kružnicí
součet vzdáleností bodu X od dvou daných různých bodů	– je elipsa, která není kružnicí
absolutní hodnota rozdílu vzdáleností bodu X od dvou různých daných bodů	– je hyperbola

V posledních dvou případech musí však být vzdálenost daných dvou bodů menší, resp. větší než dané kladné číslo.

Cvičení

1. Určete společné body kružnice $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$ a přímky $y = x$.
2. Určete společné body kružnic $x^2 - 2x + y^2 + 6y = 6$ a $x^2 + y^2 + 4y - 6 = 0$.
3. Určete rovnici kružnice, která je množinou všech bodů roviny, jež mají od bodu $[3, 7]$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $[0, 1]$.
4. Určete rovnici paraboly, která má bod $F = [3, 2]$ za své ohnisko a přímku $x + y + 1 = 0$ za svou řídicí přímku.
5. Najděte množinu všech bodů euklidovské roviny, jejichž součet vzdáleností od dvou různoběžek dané roviny se rovná danému kladnému číslu.
6. V předcházejícím cvičení nahraďte součet absolutní hodnotou rozdílu.
7. Vypočtěte, kdy prochází chordála dvou nesoustředných kružnic středem úsečky tvořené středy těchto kružnic.

3.2. Užití transformace souřadnic při studiu kuželoseček

Nechť je v euklidovské rovině zvolena kartézská soustava souřadnic. Položme si otázku: Co je množinou všech bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice splňují rovnici

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \tag{1}$$

ve které je alespoň jeden z koeficientů a, b, c různý od nuly?

Na tuto otázku nedovedeme hned odpovědět. Zkusíme, zda by nám nepomohla nová volba soustavy souřadnic. Nechť ji dostaneme z původní otočením o úhel α, viz vzorce (13) v odst. 2.7. Souřadnice bodu X v nové soustavě souřadnic označíme x', y'. Víme, že mezi x, y, x', y' platí vztahy

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,\\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Souřadnice x, y bodu X splňují rovnici (1) právě tehdy, splňují-li jeho souřadnice x', y' rovnici

$$a'(x')^2 + 2b'x'y' + c'(y')^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0, \tag{3}$$

kterou dostaneme z rovnice (1), dosadíme-li do ní za x, y výrazy z rovnic (2). Proto je například

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\alpha + 2b\cos\alpha\sin\alpha + c\sin^2\alpha\\ b' &= b(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (c - a)\cos\alpha\sin\alpha\\ c' &= a\sin^2\alpha - 2b\cos\alpha\sin\alpha + c\cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Koeficienty a, b, c můžeme obráceně vyjádřit pomocí a', b', c' úplně stejnými rovnicemi, jen je třeba místo $\sin\alpha$ psát $-\sin\alpha$. Z toho pak plyne, že je opět alespoň jeden z koeficientů a', b', c' různý od nuly. V rovnici (3) je u $x'y'$ koeficient

$$2b' = 2b\cos 2\alpha + (c - a)\sin 2\alpha.$$

Odtud je ihned vidět, že je možné vždy zvolit α tak, aby $b' = 0$. Je-li $b = 0$, stačí vzít $\alpha = 0$, v opačném případě zvolíme například α tak, aby

$$\sin 2\alpha = \frac{2b}{\sqrt{4b^2 + (a - c)^2}}, \qquad \cos 2\alpha = \frac{a - c}{\sqrt{4b^2 + (a - c)^2}}.$$

Vždy pak bude $b' = 0$, a tedy aspoň jeden z koeficientů a', c' různý od nuly. Můžeme tudíž předpokládat, že jsme soustavu souřadnic již zvolili tak, že je v rovnici (1) $b = 0$. Hledáme tedy množinu všech bodů X, jejichž souřadnice splňují rovnici

$$ax^2 + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0, \qquad (a, c) \neq (0, 0). \tag{4}$$

Rozlišíme tyto jednotlivé případy:

1. $ac > 0$. Můžeme předpokládat, že je $a > 0$ i $c > 0$. V opačném případě bychom rovnici (4) vynásobili číslem -1. Dále ji upravíme na tvar

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = \frac{d^2}{a} + \frac{e^2}{c} - f. \tag{5}$$

Je-li $h = \dfrac{d^2}{a} + \dfrac{e^2}{c} - f > 0$, je to rovnice elipsy. Položíme-li totiž $a' = \sqrt{\dfrac{h}{a}}$, $b' = \sqrt{\dfrac{h}{c}}$, můžeme rovnici (5) psát ve tvaru

$$\frac{\left(x + \frac{d}{a}\right)^2}{(a')^2} + \frac{\left(y + \frac{e}{c}\right)^2}{(b')^2} = 1.$$

To je zřejmě rovnice elipsy se středem v bodě $\left[-\dfrac{d}{a}, -\dfrac{e}{c}\right]$. Je-li $h = 0$, splňují rovnici (5) pouze souřadnice bodu $\left[-\dfrac{d}{a}, -\dfrac{e}{c}\right]$, zatímco v případě $h < 0$ nesplňují rovnici (5) souřadnice žádného bodu. Položíme-li totiž $a' = \sqrt{-\dfrac{h}{a}}$, $b' = \sqrt{-\dfrac{h}{c}}$, $x' = x + \dfrac{d}{a}$, $y' = y + \dfrac{e}{c}$, můžeme ji psát ve tvaru

$$\frac{(x')^2}{(a')^2} + \frac{(y')^2}{(b')^2} = -1.$$

2. $ac < 0$. Rovnici (4) opět upravíme na tvar (5). Je-li výraz h na pravé straně nenulový, má buď stejné znaménko jako číslo a, nebo stejné znaménko jako číslo c, neboť tato čísla mají znaménka opačná. Nechť má h stejné znaménko

jako číslo a, v opačném případě bychom zaměnili osy x, y. Rovnici (5) pak můžeme psát ve tvaru

$$\frac{(x')^2}{(a')^2} - \frac{(y')^2}{(b')^2} = 1,$$

kde jsme položili $a' = \sqrt{\frac{h}{a}}$, $b' = \sqrt{-\frac{h}{c}}$, $x' = x + \frac{d}{a}$, $y' = y + \frac{e}{c}$. Vidíme, že jde o hyperbolu se středem v bodě $\left[-\frac{d}{a}, -\frac{e}{c}\right]$. Je-li $h = 0$, můžeme rovnici (5) psát ve tvaru

$$(y')^2 = k^2(x')^2,$$

kde jsme zvolili $k = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ a x', y' stejně jako v případě $h \neq 0$. Této rovnici vyhovují právě souřadnice bodů přímek $y' = kx'$, $y' = -kx'$, tj. přímek $y = k\left(x + \frac{e}{c}\right) - \frac{d}{a}$ a $y = -k\left(x + \frac{e}{c}\right) - \frac{d}{a}$, které jsou různoběžné.

3. $ac = 0$. Protože nemůže být $a = c = 0$, můžeme předpokládat, že $a = 0$, $c \neq 0$, jinak bychom opět zaměnili osy x, y. Rovnici (4) můžeme přepsat na tvar

$$c\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 + 2dx + f - \frac{e^2}{c} = 0,$$

a je-li $d \neq 0$, upravíme ji ještě na tvar

$$\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = 2\left(-\frac{d}{c}\right)\left(x + \frac{fc - e^2}{2cd}\right).$$

To je rovnice paraboly s vrcholem v bodě $\left[\frac{e^2 - fc}{2cd}, -\frac{e}{c}\right]$ a osou rovnoběžnou s osou x. Posuneme-li soustavu souřadnic tak, že vrchol paraboly je novým počátkem, má uvažovaná parabola v nových souřadnicích x', y' rovnici $(y')^2 = 2px'$, kde $p = -\frac{d}{c}$. Vhodnou orientací osy x' dosáhneme ještě toho, že $p > 0$.

Je-li $a = d = 0$, je $c \neq 0$ a rovnici (4) můžeme upravit na tvar

$$c\left(y + \frac{e}{c}\right)^2 = \frac{e^2}{c} - f. \tag{6}$$

Pro $g = \frac{e^2 - fc}{c^2} > 0$ je to rovnice dvou různých rovnoběžek o rovnicích $y = -\frac{e}{c} + \sqrt{g}$ a $y = -\frac{e}{c} - \sqrt{g}$. V případě $g = 0$ je rovnice (6) rovnicí přímky $y = -\frac{e}{c}$ a pro $g < 0$ nevyhovují rovnici (6) souřadnice žádného bodu.

Shrňme teď předcházející výsledky. Ukázali jsme, že ke každé rovnici (1) lze zvolit novou soustavu souřadnic tak, že původní souřadnice bodu splňují rovnici (1) právě tehdy, když jeho nové souřadnice splňují rovnici $F = 0$, přičemž $F = 0$ má jeden z dále uvedených tvarů, u kterého je vždy uvedeno označení množiny všech bodů, jež rovnici splňují:

1.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$		množina prázdná (imaginární elipsa)
2.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$		elipsa, která může být i kružnicí
3.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$		hyperbola
4.	$y^2 - 2px = 0$	$(p > 0)$	parabola
5.	$y^2 - k^2x^2 = 0$	$(k > 0)$	dvě různoběžky
6.	$y^2 + k^2x^2 = 0$	$(k > 0)$	bod
7.	$y^2 - r^2 = 0$	$(r > 0)$	dvě různé rovnoběžky
8.	$y^2 = 0$		přímka
9.	$y^2 + r^2 = 0$	$(r > 0)$	množina prázdná

Pojem kuželosečky se někdy chápe v širším slova smyslu, rozumíme jím každou z uvedených devíti množin. V případě 1 a 9 mluvíme o kuželosečce formálně reálné, protože je sice dána rovnicí s reálnými koeficienty, ale nemá žádné reálné body. Kuželosečky 5 až 9 jsou tzv. kuželosečky *singulární*, ostatní jsou *regulární* kuželosečky.

Cvičení

1. Rovnicí $xy = 1$ je dána hyperbola. Najděte její ohniska a řídicí přímky.
2. Vhodným otočením soustavy souřadnic ukažte, že rovnicí $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 10 = 0$ je dána parabola.
3. Otočením soustavy souřadnic zjistěte, jaká kuželosečka je dána rovnicí $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x = 0$.

3.3. Rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích

Předpokládejme, že jsme v euklidovské rovině zvolili kartézskou soustavu souřadnic repérem $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$. Každý jednotkový, a tedy nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ ze zaměření naší roviny určuje spolu s počátkem P přímku. Každý bod X této přímky se dá právě jedním způsobem napsat ve tvaru $X = P + \varrho\boldsymbol{u}$ (hodnota ϱ je bodem X a vektorem $\boldsymbol{u}$ určena jednoznačně). Protože vektor $\boldsymbol{u}$ je jednotkový, je $|\varrho| = |XP|$. Z téhož důvodu existuje číslo φ tak, že $\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Hodnota φ je určena až na celý násobek 2π jednoznačně, udává orientovanou odchylku vektorů $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{u}$. Bod X má pak vzhledem k zvolené kartézské soustavě souřadnic souřadnice

(1) $$x = \varrho \cos \varphi, \qquad y = \varrho \sin \varphi.$$

Každý bod X uvažované roviny leží na některé přímce procházející počátkem P, ke každé přímce existuje jednotkový vektor z jejího zaměření a ke každému jednotkovému vektoru $\boldsymbol{u}$ existuje číslo φ tak, že $\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Jestliže tato tvrzení shrneme, vidíme, že ke každému bodu $X = [x, y]$ existují čísla ϱ a φ tak, že platí rovnice (1). Víme však, že bodem X nejsou hodnoty ϱ a φ určeny jednoznačně. Za prvé víme, že φ a $\varphi + 2k\pi$ určují pro každé celé číslo k tentýž jednotkový vektor $\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi) = (\cos(\varphi + 2k\pi), \sin(\varphi + 2k\pi))$. Dále určují hodnoty φ a $\varphi + \pi$ opačné jednotkové vektory $\boldsymbol{u} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a $-\boldsymbol{u} = (\cos(\varphi + \pi), \sin(\varphi + \pi))$ a pro každé číslo ϱ je $P + \varrho\boldsymbol{u} = P + (-\varrho)(-\boldsymbol{u})$. Proto určují hodnoty ϱ, φ stejný bod jako hodnoty $-\varrho$, $\varphi + \pi$. A konečně je $P + 0 . \boldsymbol{u} = P$ pro každý vektor $\boldsymbol{u}$, tedy pro hodnotu $\varrho = 0$ a libovolné φ jsou rovnicemi (1) dány vždy souřadnice počátku P.

Můžeme tedy shrnout: Každá uspořádaná dvojice reálných čísel ϱ, φ určuje při zvolené kartézské soustavě souřadnic jednoznačně bod $X = [\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi]$ a každý bod X dostaneme pro některou dvojici ϱ, φ. Dvojice ϱ_1, φ_1 a ϱ_2, φ_2 určují stejný bod X právě tehdy, když nastává některá z těchto tří situací:

1. $\varrho_1 = \varrho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, k celé.
2. $\varrho_1 = -\varrho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + (2k + 1)\pi$, k celé.
3. $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$.

I když přiřazení, které každé dvojici ϱ, φ přiřadí bod $X = [\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi]$ není vzájemně jednoznačné, nazývají se čísla ϱ, φ *polární souřadnice* bodu X.

Mějme bod X o polárních souřadnicích ϱ, φ a hledejme, jaký vztah musí platit mezi ϱ a φ, aby tento bod ležel na regulární kuželosečce o ohniskové rovnici $x^2 + y^2 = k^2(x + d)^2$. Víme, že bod X má ve výchozí kartézské soustavě souřadnic souřadnice $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$ a leží tedy na naší kuželosečce právě tehdy, platí-li

$$\varrho^2 = k^2(\varrho\cos\varphi + d)^2,$$

tzn. právě tehdy, když je

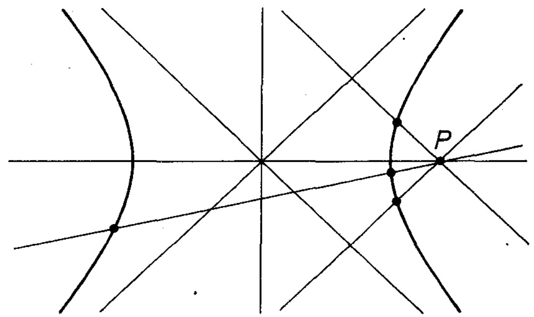
$$\varrho = k(\varrho\cos\varphi + d) \qquad \text{nebo} \qquad -\varrho = k(\varrho\cos\varphi + d).$$

Nahradíme-li v první rovnici hodnoty ϱ, φ hodnotami $-\varrho$, $\varphi + \pi$, což jsou polární souřadnice téhož bodu, dostaneme druhou rovnici. Stačí se tedy omezit na první rovnici. Pro $k\cos\varphi = 1$ není splněna pro žádné ϱ, protože $kd \neq 0$, jinak je splněna pro

(2) $$\varrho = \frac{p}{1 - k\cos\varphi},$$

(položili jsme $p = kd$). To je rovnice kuželosečky v polárních souřadnicích, přičemž počátek kartézské soustavy souřadnic je zvolen v ohnisku kuželosečky a osa x je zvolena kolmo na její řídicí přímku.

V případě elipsy protíná každá přímka procházející počátkem (tj. ohniskem elipsy) elipsu ve dvou bodech. Má-li jeden z nich polární souřadnice $\varrho = p/(1 - k\cos\varphi)$, φ, má druhý polární souřadnice $\varrho = p/(1 - k\cos(\varphi + \pi))$, $\varphi + \pi$. Má tedy též polární souřadnice $\varrho = -p/(1 + k\cos\varphi)$, φ. V případě hyperboly ($k > 1$) a $\cos\varphi = 1/k$ protíná odpovídající přímka hyperbolu jen v bodě o polárních souřadnicích $-p/(1 + k\cos\varphi)$, φ. Takové přímky jsou dvě, jsou to přímky tzv. *asymptotických směrů hyperboly* (obr. 37). Jde-li o parabolu, existuje jen jedna přímka procházející jejím ohniskem, která ji protíná jen v jednom bodě. Je to osa paraboly.



Obr. 37

Poznámka. Kdo se s polárními souřadnicemi již setkal, asi se diví, že připouštíme i ϱ záporné. Zpravidla se požaduje, aby ϱ bylo nezáporné. Mohli jsme totiž uvažovat místo přímek procházejících počátkem pouze polopřímky vycházející z počátku. Každý bod roviny leží na některé takové polopřímce, a pokud je to bod různý od počátku P, je tato polopřímka určena jednoznačně. Proto existují ke každému bodu $X = [x, y]$ hodnoty ϱ a φ tak, že platí (1) a je $\varrho \geqq 0$. Hodnota $\varrho = |XP|$ je pak určena jednoznačně a pokud je $X \neq P$ ($\varrho > 0$), je hodnota φ určena až na celý násobek 2π. Při takto zavedených polárních souřadnicích odpadá ztotožnění těch dvojic ϱ_1, φ_1 a ϱ_2, φ_2, pro které je $\varrho_1 = -\varrho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + (2k + 1)\pi$, viz situace 2. Právě popsaný postup má však i některé nedostatky. Například z rovnice pro kuželosečky $\varrho^2 = k^2(\varrho\cos\varphi + d)^2$ plyne v případě $|k\cos\varphi| \neq 1$ buď $\varrho = \dfrac{kd}{1 - \cos\varphi}$, nebo $\varrho = \dfrac{-kd}{1 + \cos\varphi}$.

Teď musíme uvažovat obě rovnice a v obou rovnicích smíme vzít jen ty hodnoty φ, pro které vyjde ϱ nezáporné. Místo jedné rovnice (2) tak máme pro kuželosečku rovnice dvě. Proto se pak většinou mlčky připouští i ϱ záporné, což jsme učinili hned na začátku odstavce.

Cvičení

1. Napište v polárních souřadnicích rovnici paraboly, která je množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od počátku zvolené kartézské soustavy souřadnic je rovna vzdálenosti od přímky $x + 5 = 0$.
2. Jaký vztah musí platit mezi polárními souřadnicemi bodu, který leží na křivce o rovnici $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$?
3. Jakou rovnici splňují souřadnice x, y bodu X, jestliže jeho polární souřadnice splňují vztah $\varrho = \cos 2\varphi$?

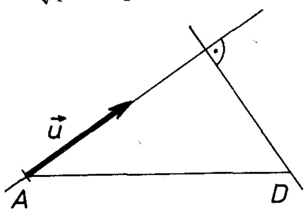
3.4. Množiny bodů v prostoru definované pomocí vzdálenosti

V trojrozměrném euklidovském prostoru je zvolena kartézská soustava souřadnic. Má-li bod A souřadnice $[a, b, c]$ a bod D souřadnice $[d, e, f]$, je vzdálenost $|AD|$ bodů A, D dána výrazem

$$\sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}.$$

Každá rovina je dána rovnicí tvaru $px + qy + rz + s = 0$, v které je alespoň jeden z koeficientů p, q, r různý od nuly. Vzdálenost bodu A od této roviny se rovná

$$\frac{|pa + qb + rc + s|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$



Obr. 38

Je-li přímka dána bodem $D = [d, e, f]$ a nenulovým vektorem $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, rovná se vzdálenost bodu A od této přímky číslu

$$\sqrt{|AD|^2 - \frac{[(A-D)\,\boldsymbol{u}]^2}{\boldsymbol{uu}}} \qquad \text{(obr. 38).}$$

Tyto tři vzorce budeme dále potřebovat.

a) *Sféra* nebo též *plocha kulová* se středem v bodě A o poloměru $r > 0$ je množina všech bodů v trojrozměrném euklidovském prostoru, které mají od

bodu A vzdálenost r. Budeme stručně mluvit o sféře $\varkappa(A, r)$. Bod $X = [x, y, z]$ je právě tehdy bodem sféry $\varkappa(A, r)$, kde $A = [a, b, c]$, $r > 0$, jestliže platí

$$(1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Říkáme, že (1) je rovnicí sféry se středem v bodě A o poloměru r.

b) Bod $X = [x, y, z]$ má od roviny $px + qy + rz + s = 0$, $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ právě tehdy vzdálenost $v > 0$, je-li

$$\frac{|px + qy + rz + s|}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = v,$$

tedy právě tehdy, je-li $px + qy + rz + s = v\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ nebo $px + qy + rz + s = -v\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$. Jde tudíž o množinu všech bodů dvou různých rovnoběžných rovin.

c) Víme, že množinou všech bodů prostoru, které mají od dané přímky vzdálenost rovnou danému kladnému číslu r, je *rotační plocha válcová*. Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, aby osa z splývala s danou přímkou, patří bod X do uvažované množiny právě tehdy, platí-li

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

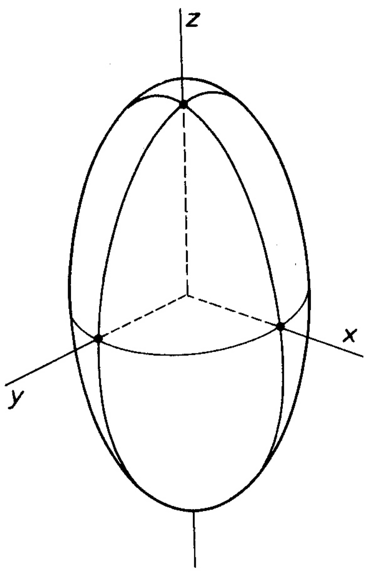
Vidíme, že s každým bodem $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ naší rotační plochy je bodem této plochy také bod $X = [x_0, y_0, z]$, kde z je libovolné. To plyne ze skutečnosti, že se v rovnici (2) vůbec nevyskytuje z. Neznamená to však, že rovnice (2) je v prostoru rovnicí kružnice. Je to rovnice rotační plochy válcové o poloměru r s osou v ose z. Teprve rovnice (2) spolu s rovnicí $z = 0$ charakterizují kružnici, a to kružnici, která je řezem uvažované válcové plochy s rovinou $z = 0$.

d) Nechť je v rovině os x a z dána elipsa o rovnicích $y = 0$ (elipsa leží v rovině os x, z) a

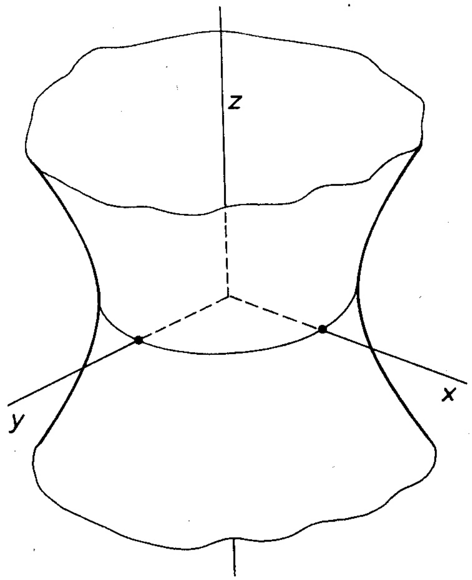
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Je to elipsa se středem v počátku, osami elipsy jsou osa x a osa z soustavy souřadnic. Otáčením této elipsy kolem osy z opisují její body plochu, která se nazývá *rotační elipsoid.* Kdy leží bod $X = [x, y, z]$ na tomto elipsoidu? Veďme bodem X kružnici, jejíž střed leží na ose z a jejíž rovina je kolmá k ose z (je-li X bodem osy z, redukuje se kružnice na bod X). Tato kružnice má poloměr $\sqrt{x^2 + y^2}$ a protne rovinu $y = 0$ v bodech $[\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z]$, $[-\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z]$. Bod X je právě tehdy bodem našeho elipsoidu, leží-li tyto dva body na výchozí elipse. To nastává právě tehdy, je-li

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$



Obr. 39



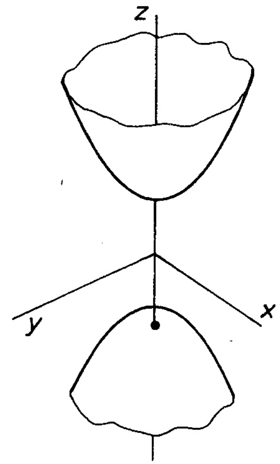
Obr. 40

To je tudíž rovnice rotačního elipsoidu s osou v ose z a středem v počátku soustavy souřadnic.

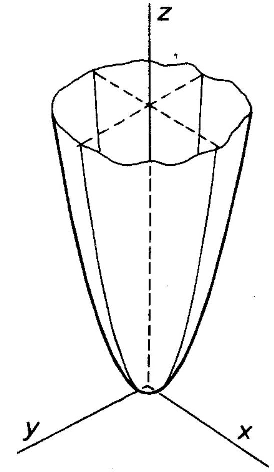
Zvolíme-li místo elipsy jinou křivku, dostaneme samozřejmě jinou rotační plochu. Uveďme několik příkladů. Otáčíme-li kolem osy z křivku C, ležící v rovině $y = 0$, dostaneme plochu F:

C		F	
elipsa	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$	rotační elipsoid (obr. 39)	$\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$
hyperbola (osou rotace je vedlejší osa hyperboly)	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$	rotační jednodílný hyperboloid (obr. 40)	$\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$
hyperbola (osou rotace je hlavní osa hyperboly)	$\dfrac{z^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$	rotační dvoudílný hyperboloid (obr. 41)	$\dfrac{z^2}{b^2} - \dfrac{x^2 + y^2}{a^2} = 1$
parabola	$2pz = x^2$	rotační paraboloid (obr. 42)	$2pz = x^2 + y^2$

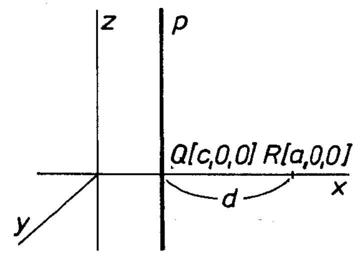
dvojice různoběžných přímek	$z^2 = k^2x^2 \quad (k > 0)$	rotační kuželová plocha	$z^2 = k^2(x^2 + y^2)$
dvojice rovnoběžných přímek	$x^2 = r^2 \quad (r > 0)$	rotační plocha válcová	$x^2 + y^2 = r^2$



Obr. 41



Obr. 42



Obr. 43

e) Hledejme množinu všech bodů X v prostoru, pro které se poměr vzdáleností od pevného bodu R a pevné přímky p rovná danému kladnému číslu k, přičemž přímka p bodem R neprochází. Vzdálenost bodu R od přímky p označíme $d > 0$. Označme dále Q patu kolmice vedené bodem R k přímce p. Soustavu souřadnic zvolíme tak, aby přímka QR byla osou x a osa z byla rovnoběžná s přímkou p. Pak je $R = [a, 0, 0]$, $Q = [c, 0, 0]$, přímka p je dána rovnicemi $x = c$, $y = 0$. Orientaci osy x zvolíme tak, aby $a = c + d$ (obr. 43). Bod $X = [x, y, z]$ je bodem hledané množiny právě tehdy, když platí

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = k^2[(x - c)^2 + y^2],$$

tj.

$$(1 - k^2)(x^2 + y^2) - 2(a - k^2c)\,x + z^2 + a^2 - k^2c^2 = 0.$$

Rozlišíme nyní dva případy:

1. $k = 1$. Poslední rovnice pak zní $-2dx + z^2 + (a + c)d = 0$. Zvolíme-li počátek soustavy souřadnic ve středu úsečky RQ, je $a + c = 0$. Hledaná množina je dána rovnicí $z^2 = 2dx$. Vidíme, že s každým bodem $[x_0, y_0, z_0]$ ji splňují souřadnice všech bodů přímky $x = x_0$, $z = z_0$, která je rovnoběžná s osou y. Průnikem hledané množiny a roviny $y = 0$ je parabola o rovnicích $y = 0$, $z^2 = 2dx$. Množinou všech bodů euklidovského prostoru, které mají od bodu R a od přímky p stejnou vzdálenost, je tedy válcová plocha, jejíž površky protínají parabolu $z^2 = 2dx$, $y = 0$ (ta je tzv. řídicí křivkou této válcové plochy) a jsou kolmé na rovinu $y = 0$.

2. $k \neq 1$. Pak je výhodné zvolit počátek soustavy souřadnic tak, aby $a - k^2c = 0$, což spolu s podmínkou $a - c = d$ dává $c = d/(k^2 - 1)$, $a = k^2d/(k^2 - 1)$. Rovnice hledané množiny je pak

$$\frac{(1 - k^2)^2}{k^2d^2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - k^2}{k^2d^2}z^2 = 1.$$

Pro $k < 1$ je to rovnice rotačního elipsoidu, v případě $k > 1$ jde o jednodílný rotační hyperboloid.

f) Nechť jsou v prostoru dány dvě mimoběžné přímky. Co je množinou všech bodů, které mají od obou přímek stejné vzdálenosti? Zvolme soustavu souřadnic tak, aby nejkratší příčka obou mimoběžek byla osou z, jedna mimoběžka aby ležela v rovině $z = a$, druhá v rovině $z = -a$ ($a \neq 0$). Osy x, y zvolíme tak, aby jedna mimoběžka byla dána rovnicemi $z = a$, $y = bx$, druhá rovnicemi $z = -a$, $x = by$, $b^2 \neq 1$. Bod $X = [x, y, z]$ je právě tehdy bodem zkoumané množiny, platí-li

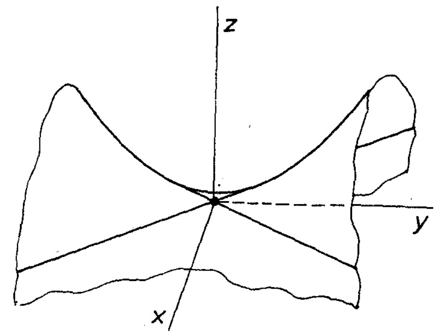
$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 - \frac{(x + by)^2}{1 + b^2} =$$

$$= x^2 + y^2 + (z + a)^2 - \frac{(bx + y)^2}{1 + b^2},$$

tedy

$$4az = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}(y^2 - x^2).$$

Je to rovnice plochy, která se nazývá hyperbolický paraboloid (obr. 44). V našem případě je protnut rovinami $z = \text{konst.} \neq 0$ v hyperbolách, pouze rovina $z = 0$ protne daný paraboloid v přímkách $y = x$, $z = 0$ a $y = -x$, $z = 0$. Roviny $x = \text{konst.}$ i roviny $y = \text{konst.}$ protnou náš paraboloid v parabolách. Každá rovina o rovnici $x + y = p$ protne uvažovaný paraboloid v přímce o rovnicích $x + y = p$, $4az = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}p(y - x)$ a stejně tak každá rovina $y - x = q$ v přímce $y - x = q$, $4az = \frac{1 - b^2}{1 + b^2}q(y + x)$. Pro každou dvojici p, q jsou to přímky různé. Každým



Obr. 44

bodem hyperbolického paraboloidu procházejí tedy dvě různé přímky, které patří celé tomuto paraboloidu. Je to plocha velmi důležitá ve stavebnictví, používá se při konstrukci střech, různých hal apod.

Cvičení

1. Určete množinu všech bodů v trojrozměrném euklidovském prostoru, pro které se poměr vzdáleností od dvou různých daných bodů prostoru rovná danému kladnému číslu k.
2. Určete množinu všech bodů v trojrozměrném euklidovském prostoru, pro které se poměr vzdáleností od daného bodu a dané roviny rovná danému kladnému číslu k.
3. Najděte množinu všech bodů v trojrozměrném euklidovském prostoru, které mají od daného bodu třikrát větší vzdálenost než od dané přímky, která daným bodem prochází.

3.5. Základní vzorce sférické trigonometrie

Naše následující úvahy se týkají trojrozměrného euklidovského prostoru. Ukážeme, jak je možno vzorce pro trojhran, dokázané v odstavci 2.7, použít na popis sférických trojúhelníků. Uveďme nejprve několik základních poznatků o vzájemné poloze roviny ϱ a kulové plochy $\varkappa(A, r)$. Všechny tyto poznatky jsou čtenáři dobře známy a jejich ověření je možno ponechat jako cvičení.

Věta 3.5.1. Platí:

1. $\varkappa(A, r) \cap \varrho = \emptyset$, právě když vzdálenost bodu A od roviny ϱ je větší než r.

2. $\varkappa(A, r) \cap \varrho$ obsahuje jediný bod, právě když vzdálenost bodu A od roviny ϱ je r. Označíme-li $\varkappa(A, r) \cap \varrho = \{T\}$, je přímka AT kolmá k rovině ϱ.

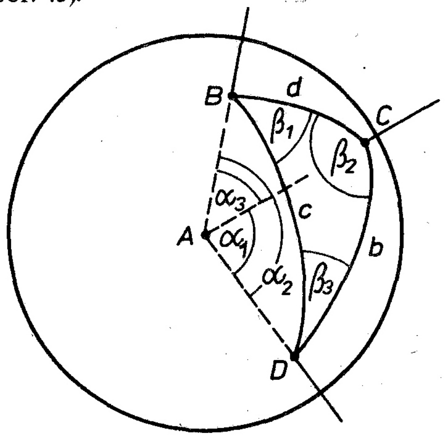
3. Je-li vzdálenost bodu A od roviny ϱ menší než r, je $\varkappa(A,r) \cap \varrho$ kružnice. Střed T této kružnice je roven A nebo, pokud $A \neq T$, přímka AT je kolmá k rovině ϱ.

Definice 3.5.1. Nastane-li ve větě 3.5.1 případ 3 spolu s rovností $A = T$, pak kružnice $\varkappa(A,r) \cap \varrho$ se nazývá hlavní kružnice kulové plochy $\varkappa(A,r)$. Rovina ϱ se v tomto případě nazývá *průměrová* rovina $\varkappa(A,r)$.

Definice 3.5.2. Přímka procházející středem A kulové plochy $\varkappa(A,r)$ protíná $\varkappa(A,r)$ ve dvou bodech. Tyto body nazýváme (průměrově) *protilehlé* body.

Věta 3.5.2. Každými dvěma různými body kulové plochy $\varkappa(A,r)$, které nejsou protilehlé, prochází jediná hlavní kružnice.

Jsou-li B, C, D body kulové plochy $\varkappa(A,r)$, které neleží v jedné průměrové rovině, je jimi určen trojhran $\mathbf{T}(A,B,C,D)$. V souhlase s odstavcem 2.7 jeho stěnové odchylky značíme α_1, α_2, α_3, hranové odchylky β_1, β_2, β_3. Stěny trojhranu $\mathbf{T}(A,B,C,D)$ protínají plochu $\varkappa(A,r)$ v obloucích hlavních kružnic spojujících postupně body B a C, C a D, D a B. Přitom jde o oblouky příslušné k dutým úhlům $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle DAB$. Označme je $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DB}$. Jejich délky jsou rovny číslům $\alpha_1 r$, $\alpha_2 r$, $\alpha_3 r$ (α_i, $i = 1, 2, 3$, měřeno v radiánech). Položíme $b = \alpha_1 r$, $c = \alpha_2 r$, $d = \alpha_3 r$. Sjednocení $\widehat{BC} \cup \widehat{CD} \cup \widehat{DB}$ nazveme *sférický trojúhelník* s vrcholy B, C, D a stranami $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DB}$. Čísla β_1, β_2, β_3 nazýváme jeho (vnitřními) úhly (obr. 45).



Obr. 45

Věta 3.5.3. Nechť je dán na kulové ploše $\varkappa(A,r)$ sférický trojúhelník s vrcholy B, C, D, stranami o délce b, c, d a úhly β_1, β_2, β_3. Potom platí:

1. $$\frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin\beta_2} = \frac{\sin\frac{d}{r}}{\sin\beta_3};$$

2. $$\cos\frac{b}{r} = \cos\frac{c}{r}\,.\,\cos\frac{d}{r} + \sin\frac{c}{r}\,.\,\sin\frac{d}{r}\,.\,\cos\beta_1;$$

3. $$\cos\beta_1 = -\cos\beta_2\,.\,\cos\beta_3 + \sin\beta_2\,.\,\sin\beta_3\,.\,\cos\frac{b}{r}.$$

Důkaz plyne z (26), (29) a (30) v odstavci 2.7.

Věta 3.5.4. Úhly sférického trojúhelníku splňují nerovnost

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \pi.$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{T}(A,B',C',D')$ je trojhran polární k trojhranu $\mathbf{T}(A,B,C,D)$. Nechť α'_1, α'_2, α'_3 jsou jeho stěnové odchylky. Potom $\alpha'_1 = \pi - \beta_1$, $\alpha'_2 = \pi - \beta_2$, $\alpha'_3 = \pi - \beta_3$. Protože $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 < 2\pi$ (viz cvičení 3. v odstavci 2.7), je $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > \pi$.

Definice 3.5.2. Nechť sférický trojúhelník má úhly β_1, β_2, β_3. Potom číslo $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$ se nazývá jeho *exces*.

Cvičení

1. Nechť sférický trojúhelník má úhly β_1, β_2, β_3. Dokažte, že $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 < \pi$.
2. Jak se změní tvar sinové a kosinových vět, je-li jeden z úhlů sférického trojúhelníku pravý?
3. Dokažte, že ve sférickém trojúhelníku na kulové ploše o poloměru 1 platí:
   a) $\sin\alpha_1\,.\,\cos\beta_2 = \cos\alpha_2\,.\,\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2\,.\,\cos\alpha_3\,.\,\cos\beta_1$
   b) $\cos\alpha_3\,.\,\cos\beta_1 = \sin\alpha_3\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha_2 - \sin\beta_1\,.\,\mathrm{cotg}\,\beta_2$. (V a) dosaďte do kosinové věty pro $\cos\alpha_2$ za $\cos\alpha_1$ výraz z kosinové věty pro $\cos\alpha_1$. b) dokažte pomocí a) a sinové věty.)
4. Najděte ostatní prvky sférického trojúhelníku na kulové ploše o poloměru 1, je-li:
   a) $\alpha_3 = 76°35'$, $\beta_1 = 34°15'$, $\beta_2 = 42°15'$;
   b) $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$, $\alpha_3 = 45°$;
   c) $\alpha_1 = 62°42'$, $\beta_1 = 50°12'$, $\beta_2 = 58°8'$,
   (použijte sinovou i obě kosinové věty).
5. Předpokládejme, že chyby při geodetických měřeních jsou menší než 1 ‰. Poznáte proměřováním trojúhelníku na zeměkouli, jehož délky stran jsou 500 km, 400 km, 300 km, že nežijeme na (euklidovské) rovině?

VÝSLEDKY CVIČENÍ

Kapitola 1

1.1. Základní vlastnosti afinního prostoru

1. Ne; vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
2. Ne; vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
3. Ano.
4. Ne; vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
5. Ne; vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
6. Ne; vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
7. Ano.
8. Ne; vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
9. Ano, pro k liché. Ne, pro k sudé – vlastnost 1 je splněna, vlastnost 2 není splněna.
10. Ano, pro $k = 1$. Ne, pro $k \neq 1$ – vlastnost 1 není splněna, vlastnost 2 je splněna jen pro liché k.
11. Ano.
12. Ne; vlastnost 1 není splněna, vlastnost 2 je splněna.
13. Ano.
14. Ne; vlastnost 1 není splněna, vlastnost 2 je splněna.

1.2. Lineární soustava souřadnic

1. a) ano, b) ne, c) ano, d) ne, e) ano.
2. a) ano, b) ne, c) ne, d) ano.
3. a) ano, b) ano, c) ne.
4. a) ne, b) ano, c) ne, d) ano.

1.3. Podprostory afinního prostoru

1. Triviální řešení: všechny jednobodové podmnožiny, celá množina $\mathbf{R}^2$, je-li $k = 1$ – každý podprostor prvně jmenovaného afinního prostoru (první dva afinní prostory jsou totožné). Netriviální řešení: $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;\ x_2 = a\}$ – pro $a > 0$ jsou tyto množiny podprostory všech tří afinních prostorů, pro

$a \leqq 0$ jen prvních dvou, $\{(x_1, x_2) \in R^2;\ x_1 = a\}$ – tyto množiny jsou podprostory prvních dvou afinních prostorů (pro každé liché k).
2. Množina $\mathbf{B}$ je podprostor, právě když $k = 1$. Množina $\mathbf{C}$ je podprostor. Množina $\mathbf{D}$ není podprostor.

1.4. Vzájemná poloha podprostorů afinního prostoru

1. A_1 ne, A_2 ne, A_3 ano, A_4 ne, A_5 ano.
2. A_1 ano, A_2 ne, A_3 ne, A_4 ano, A_5 ano, A_6 ne.
3. a) mimoběžky; b) rovnoběžky různé; c) různoběžky, $P = [1, 1, 0]$; d) totožné; e) různoběžky, $P = [2, 2, 5]$; f) mimoběžky.
4. a) rovnoběžné neincidentní; b) různoběžné, $P = [-2, 0, 0]$; c) různoběžné, $P = [2, -1, 4]$; d) incidentní.
5. a) různoběžné, průsečnice $[P; \mathbf{w}]$, $P = [3, 4, -1]$, $\mathbf{w} = (1, 3, 2)$; b) incidentní; c) různoběžné, průsečnice $[P; \mathbf{w}]$, $P = [1, -1, 3]$, $\mathbf{w} = (1, 1, 3)$; d) rovnoběžné neincidentní.
6. a) $P = [1, 3, -1]$, $Q = [2, 1, 2]$; b) $P = [1, 3, -1]$, $Q = [5, -1, 5]$.
7. a) $P = [1, 1, 0]$, $Q = [1, 2, -1]$; b) $P = [3, 5, 7]$, $Q = [1, 5, 5]$.
8. a) Roviny jsou různoběžné s průnikem $\{P\}$, kde $P = [3, 2, -1, 0]$. b) Roviny jsou mimoběžné. Jejich zaměření mají průnik $[\{(2, 0, 0, 3)\}]$. c) Roviny jsou různoběžné – průnikem je přímka určená bodem $P = [1, 0, 0, 0]$ a vektorem $\mathbf{s} = (0, 1, 1, 3)$.
9. a) Podprostory jsou incidentní. b) Podprostory mají za průnik přímku určenou bodem $P = [3, 1, 0, -1]$ a vektorem $\mathbf{s} = (-1, -3, 1, 1)$.

1.5. Vyjádření podprostoru rovnicemi

1. Viz 1.4.
2. Viz 1.4.
3. $\varrho: x + 5y - z + 3 = 0$.
4. Průsečík $P = [-1, -1, 3]$.
5. Průsečnice je určena např. bodem $P = [7, 0, -12]$ a vektorem $\mathbf{w} = (5, 1, -7)$.
6. $\sigma: 2x + 2y - 3z + 7 = 0$.
7. Např. $p: 3x - y - 3 = 0,\ z + 1 = 0$.
8. $\varrho: 4x - 81y + 17z - 85 = 0$.

1.7. Dělicí poměr, střed dvojice bodů

1. $(B, C; A) = 1 - 1/d$, $(C, A; B) = 1/(1 - d)$, $(C, B; A) = d/(d - 1)$.
3. Nadrovinu rovnoběžnou s nadrovinou A'_{n-1}.
4. Rovinu rovnoběžnou s oběma mimoběžkami.
5. Právě jedna.

1.11. Konvexní množiny

1. Množina $\mathbf{M}$ je otevřená polorovina sjednocená s uzavřenou úsečkou ze své hraniční přímky.
2. Viz cvičení 1.

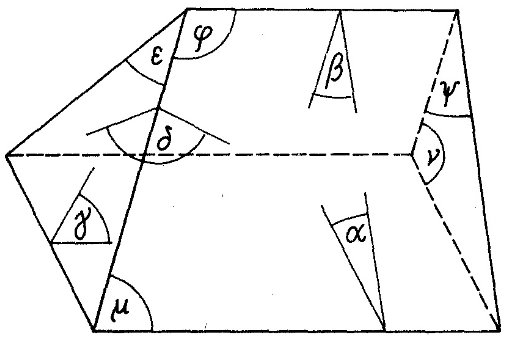
1.12. Transformace lineární soustavy souřadnic

1. V $\mathscr{L}'$: $A = [-1/2, 5/2]$, $B = [-3/2, -3/2]$, $C = [1/2, 5/2]$, p: $5x' - 3y' + 6 = 0$, q: $3x' - 3y' + 11 = 0$. V $\mathscr{L}$: $D = [-1, 2]$, $E = [2, 1]$, $F = [1, -2]$, r: $9x + 3y - 11 = 0$, s: $5x + 3y - 7 = 0$.

Kapitola 2

2.6. Vzájemná poloha podprostorů $\mathbf{E}_n$

1. a) $d = 6$, $P = A$, $Q = [3, -1, -1]$; b) $d = \sqrt{21}$, $P = A$, $Q = [3, 1, -1]$; c) $d = \sqrt{33}$, $P = [2, -1, 1]$, $Q = [1, 3, 5]$; d) $d = 3$, např. $P = A$, $Q = [3, 1, 2]$; e) $d = 2$, např. $P = [-1, 0, \sqrt{2}]$, $Q = A$; f) $d = 14$, např. $P = A$, $Q = [-2, 1, 1]$; g) $d = 9$, $P = [-2, 3, -3, -3]$, $Q = [0, -1, 3, 2]$; h) $d = 7$, např. $P = [3, 0, -1, 1]$, $Q = [2, -1, 0, -1]$; i) $d = 2$, $P = A$, $Q = [6/5, -3/5, -1/5, 13/5]$; j) $d = 6$, $P = A$, $Q = [3, -1, 2, 2]$.
2. Míry úhlů jsou udány v radiánech.
   a) $\cos\alpha = \sqrt{2}/3$, $\alpha \doteq 1{,}08$; b) $\cos\alpha = 5\sqrt{3/77}$, $\alpha \doteq 0{,}16$; c) $\cos\alpha = 11/(5\,.\sqrt{6})$, $\alpha \doteq 0{,}455$; d) $\cos\alpha = 4/\sqrt{22}$, $\alpha \doteq 0{,}55$.
3. Dvě řešení: $\varrho_1: x - 3y + z + 9 = 0$, $\varrho_2: 3x - y - z - 1 = 0$.



Obr. 46

2.7. Prostory $\mathbf{E}_2$ a $\mathbf{E}_3$

2. a) $\mathbf{T}\left(A; \mathbf{w}_2, \dfrac{2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2}{\sqrt{5}}, \dfrac{-2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + 6\mathbf{w}_3}{\sqrt{41}}\right)$,
   b) $\mathbf{T}\left(A; \dfrac{1}{3}(\mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3), \mathbf{w}_2\right)$.
5. $\alpha = 56°19'$, $\beta = 67°22'$, $\gamma = \alpha$, $\delta = 107°55'$, $\varepsilon = 58°2'$, $\varphi = 119°1'$, $\psi = 67°22'$, $\mu = 60°59'$, $\nu = 56°19'$ (obr. 46).

Kapitola 3

3.1. Množiny bodů v euklidovské rovině definované pomocí vzdálenosti

1. $[1, 1]$, $[-3, -3]$.
2. $[1, 1]$, $[-3, -3]$.
3. $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$.
4. $x^2 + y^2 - 2xy - 14x - 10y + 25 = 0$.
5. Hranice pravoúhelníku.
6. Osm polopřímek.
7. Mají-li kružnice stejné poloměry.

3.2. Užití transformace souřadnic při studiu kuželoseček

1. $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, $x + y - \sqrt{2} = 0$ a $[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$, $x + y + \sqrt{2} = 0$.
3. Elipsa.

3.3. Rovnice kuželoseček v polárních souřadnicích

1. $\varrho = 5/(1 - \cos\varphi)$ nebo $\varrho = -5/(1 + \cos\varphi)$.
2. $\varrho = 1 + \cos\varphi$ nebo $\varrho = -1 + \cos\varphi$.
3. $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$.

3.4. Množiny bodů v prostoru definované pomocí vzdálenosti

1. Sféra nebo rovina.
2. Rotační elipsoid, paraboloid, dvoudílný hyperboloid, rotační kuželová plocha, přímka nebo prázdná množina.
3. Rotační kuželová plocha s osou v dané přímce a s vrcholem v daném bodě.

3.5. Základní vzorce sférické trigonometrie

1. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti v polárním trojúhelníku dostaneme $\pi - \beta_1 + \pi - \beta_2 > \pi - \beta_3$.

4. a) $\beta_3 = 121°36'$, $\alpha_1 = 40°$, $\alpha_2 = 50°10'$;

b) $\beta_1 = 33°11'20''$, $\beta_2 = 108°32'20''$, $\beta_3 = 50°43'44''$;

c) $\alpha_2 = 79°13'$, $\alpha_3 = 119°4'$, $\beta_3 = 130°55'$ nebo $\alpha_2^* = 180° - \alpha_2 = 100°47'$, $\alpha_3^* = 152°15'$, $\beta_3^* = 156°15'$.

LITERATURA

[1] Aleksandrov, P. S.: Kurs analitičeskoj geometrii i linejnoj algebry. Moskva, Nauka 1979.
[2] Bican, L.: Lineární algebra. Praha, SNTL 1979.
[3] Blažek, J. a kol.: Algebra a teoretická aritmetika I. Praha, SPN 1983.
[4] Bydžovský, B.: Úvod do analytické geometrie. Praha, JČMF 1946.
[5] Cuberbiller, O. N.: Zadači i upražněnija po analitičeskoj geometrii. Moskva, FM 1961.
[6] Čech, E.: Základy analytické geometrie I. Praha, Přírodovědné nakladatelství 1951.
[7] Kraemer, E.: Analytická geometrie lineárních útvarů. Praha, NČSAV 1956.
[8] Modenov, P. S. – Parchomenko, A. S.: Sbornik zadač po analitičeskoj geometrii. Moskva, Nauka 1976.
[9] Peschl, E.: Analytická geometrie a lineární algebra. Praha, SNTL 1971.
[10] Vančura, Z.: Analytická metoda v geometrii. I, II, III. Praha, SNTL 1957.

REJSTŘÍK

Doc. RNDr. Milan Sekanina, CSc.
RNDr. Leo Boček, CSc.
RNDr. Milan Kočandrle, CSc.
RNDr. Jaroslav Šedivý, CSc.

GEOMETRIE I

Obálku navrhl Karel Mrázek. Obrázky narýsovala PhDr. Alena Šarounová. Vydalo Státní pedagogické nakladatelství, n. p., v Praze roku 1986 jako svou publikaci č. 56-03-21/1. Edice Učebnice pro vysoké školy. Odpovědná redaktorka RNDr. Ilona Mahlerová. Výtvarný redaktor Václav Hanuš. Technická redaktorka Jiřina Perglová. Ze sazby monofoto písmem Times vytiskl ofsetem Tisk, knižní výroba, n. p., Brno, závod 1. Formát papíru 70 × 100 cm. Počet stran 200. AA 13,91 (13,34 AA textu, 0,57 AA grafiky) – VA 14,67. Náklad 3500 výtisků. Tematická skupina a podskupina 03/2. 1. vydání. Cena vázaného výtisku Kčs 19,00.
104/21,852

14-462-86 Kčs [redacted]