## 2.4. Hlubší věty o limitách

(7-1)

**Věta L 2.9** (o limitě monotónní posloupnosti)

Každá monotónní posloupnost má limitu.

Dk: BÚNO $a_n$ je neklesající. ~~lim $a_n$ = A~~

~~A = ...~~ Označme $A = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{a_n\}$.

$A = +\infty$ nechť $K \in \mathbb{R}$

$\sup\{a_n\} = +\infty \Rightarrow a_n$ není shora omezená

$\Rightarrow \exists n_0 \quad a_{n_0} > K$.

$a_n$ je neklesající $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > K$

Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

$A \in \mathbb{R}$ $\quad \sup\{a_n\} = A$, nechť $\varepsilon > 0$.

$A - \varepsilon < A$ .. supremum. Z definice suprema (ii)

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad a_{n_0} > A - \varepsilon$.

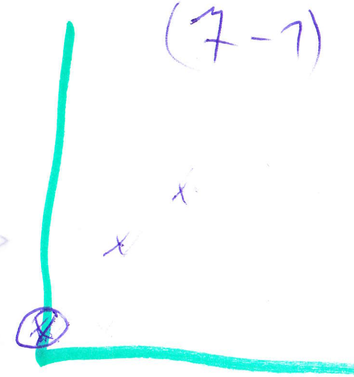
nyní $a_n$ je neklesající $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > A - \varepsilon$.

Dále z (i) vlastnosti suprema

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq A < A + \varepsilon$

Celkem $\forall n \geq n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon$.

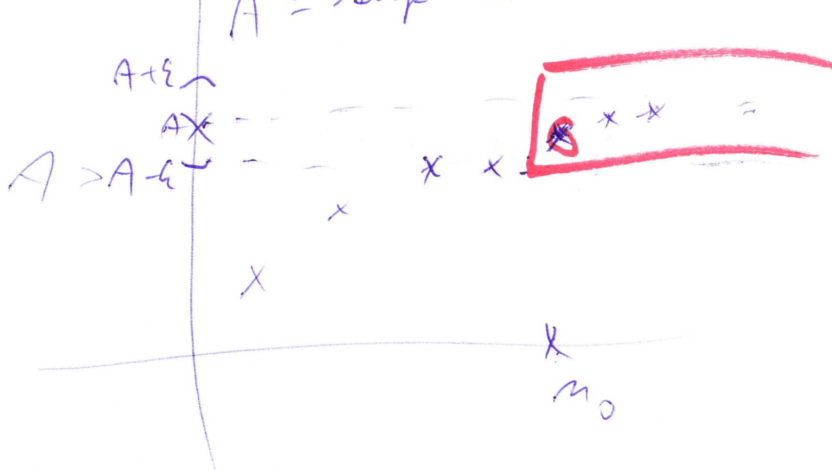
□




$\lim a_n = +\infty$

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad a_n > K$

$A = \sup a_n$.




$A = \sup\{a_n\} \qquad A - \varepsilon < A$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad a_{n_0} > A - \varepsilon$

**Poznámka:**

monotónní posl. $\begin{cases} \text{neklesající} \begin{cases} \text{shora omezená} & \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{shora neomezená} & \lim a_n = +\infty \end{cases} \\ \text{nerostoucí} \begin{cases} \text{zdola omezená}, & \lim a_n \in \mathbb{R} \\ \text{zdola neomezená} & \lim a_n = -\infty \end{cases} \end{cases}$

---

**Příklad:** $a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ | ~~$a_2 = 6 - \frac{5}{10} = 5{,}5$, $a_3 = 6 - \frac{5}{5{,}5} = 5$ a kousek~~

hypotéza $a_n$ klesající a $a_n \geq 5$.

- $a_n \geq 5$ MI ① $n=1$ $\quad a_1 = 10 \geq 5$ ✓ $\quad$ ② $a_n \geq 5 \Rightarrow a_{n+1} \geq 5$ ✓

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \overset{?}{\geq} 5 \iff 1 \geq \frac{5}{a_n} \overset{a_n>0}{\iff} a_n \geq 5 \ ✓$$

- $a_{n+1} \leq a_n$ ~~MI ① $a_2 = 5{,}5 \leq 10 = a_1$ ✓ ②~~ PŘÍMO

$$6 - \frac{5}{a_n} \overset{??}{\leq} a_n \iff 6a_n - 5 \leq a_n^2 \iff 0 \leq a_n^2 - 6a_n + 5 = (a_n-5)(a_n-1)$$

o.k., neboť $a_n \geq 5$

Tedy $a_n$ je nerostoucí posloupnost, zdola omezená.

Podle V2.9. existuje $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$.

Nyní

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \quad / \lim_{n\to\infty}$$

$$\underline{A = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}} \overset{\times}{=} \lim 6 - \frac{\lim 5}{\lim a_n} = 6 - \frac{5}{A} \quad / \cdot A$$

$$A^2 = 6A - 5 \iff (A-5)\cdot(A-1) = 0 \underset{a_n \geq 5}{\Rightarrow} \underline{\underline{A = 5}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 5$$

V 2.9. $a_n$ monotónní $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Poznámka: V předchozím příkladu je použití V 2.9 nutné.

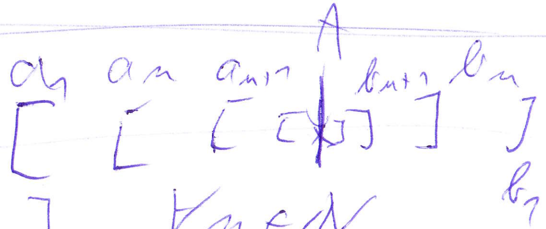
$a_1 = 1$, $a_{n+1} = (-1)\cdot a_n \Rightarrow \lim a_{n+1} = \lim (-1)\cdot a_n$

$A = -A \Rightarrow A = 0$

$a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1 \dots$ $\boxed{a_n = (-1)^{n+1}}$

---

Věta L 2.10 (Cantorův princip vložených intervalů)



Nechť $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost uzavřených intervalů splňující:

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

Pak je množina $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ jednobodová.

Dk: Z (i) vidíme $a_{n+1} \geq a_n$ a $b_{n+1} \leq b_n$.

Navíc $a_n$ je shora omezená $b_1$ a $b_n$ zdola omezená $a_1$.

Podle V 2.9. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

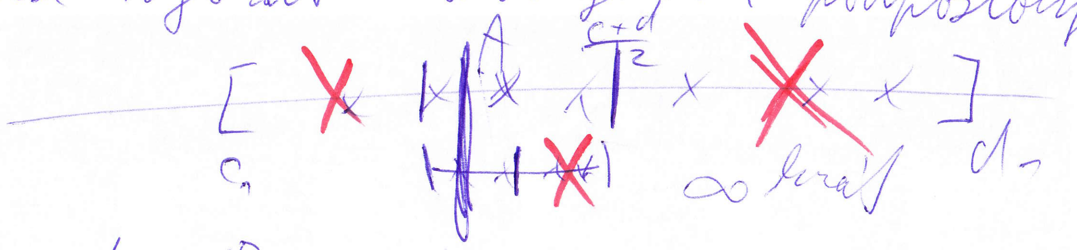
$0 = \lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \overset{V}{=} \lim\limits_{n\to\infty} b_n - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = B - A \Rightarrow A = B$.

Tedy $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{A\}$.

$\square$

Věta T 2.11 (Bolzano – Weierstrass) (7 – 4)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.




Dk: (půlením intervalů)

$\{a_n\}$ je omezená, tedy $\exists\, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_1 \le a_n \le d_1$

Zvolme $a_{n_1} \in [c_1, d_1]$ libovolně.

Rozdělme $[c_1, d_1]$ na $[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]$ a $[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$.

V alespoň jednom tomto intervalu je $\infty$ mnoho $a_n$.

Pokud $\#\{n : a_n \in [c_1, \frac{c_1+d_1}{2}]\} = +\infty$, položme $c_2 = c_1$, $d_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$.

Jinak $\#\{n : a_n \in [\frac{c_1+d_1}{2}, c_1]\} = +\infty$ a položme $c_2 = \frac{c_1+d_1}{2}$, $d_2 = d_1$

Nalezneme $n_2 > n_1$ a $a_{n_2} \in [c_2, d_2]$. Dále pokračujeme indukcí.

Nechť $\#\{n : a_n \in [c_k, d_k]\} = +\infty$ a máme $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$.

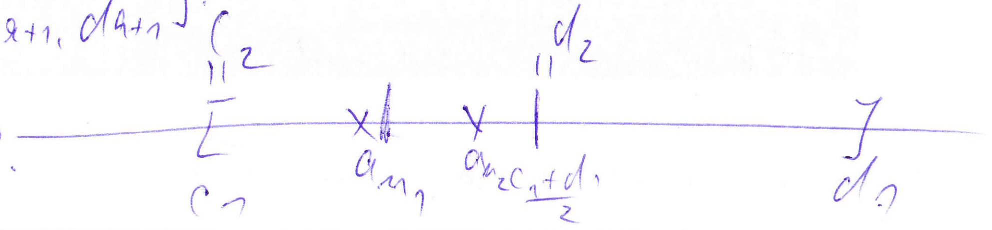
Rozdělme $[c_k, d_k]$ na $[c_k, \frac{c_k+d_k}{2}]$ a $[\frac{c_k+d_k}{2}, d_k]$.

Pokud $\#\{n : a_n \in [c_k, \frac{c_k+d_k}{2}]\} = +\infty$ položme $c_{k+1} = c_k$, $d_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$

Jinak $\#\{n : a_n \in [\frac{c_k+d_k}{2}, d_k]\} = +\infty$ položme $c_{k+1} = \frac{c_k+d_k}{2}$, $d_{k+1} = d_k$

Nalezneme $n_{k+1} > n_k$ a $a_{n_{k+1}} \in [c_{k+1}, d_{k+1}]$

a navíc $\#\{n : a_n \in [c_{k+1}, d_{k+1}]\} = +\infty$.



Nyní máme posloupnost intervalů $[c_k, d_k]$ a $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$

Víme $[c_{k+1}, d_{k+1}] \subset [c_k, d_k]$ a $d_{k+1} - c_{k+1} = \frac{d_k - c_k}{2} = \frac{d_{k-1} - c_{k-1}}{2^2} = \dots = \frac{d_1 - c_1}{2^k}$.

Tedy $\lim_{k\to\infty} d_k - c_k = 0$.

Podle V 2.10. $\exists A \in \mathbb{R} = \bigcap_{k=1}^{\infty} [c_k, d_k]$ a $\lim_{k\to\infty} c_k = A = \lim_{k\to\infty} d_k$.

Nyní $n_k$ je rostoucí posloupnost, tedy $a_{n_k}$ je vybraná podposloupnost z $\{a_k\}$.

Víme $a_{n_k} \in [c_k, d_k]$

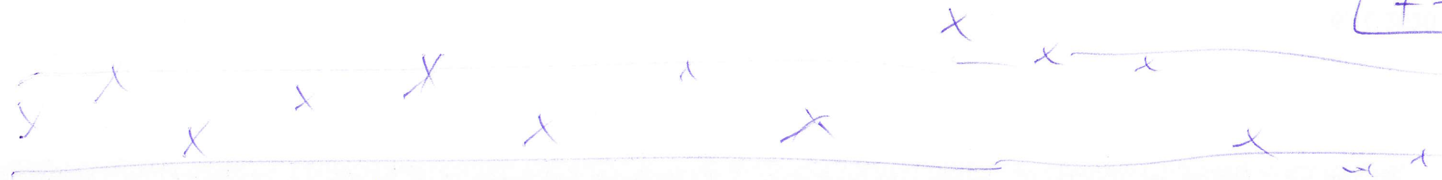
$$\begin{array}{ccccc} c_k & \le & a_{n_k} & \le & d_k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & & A & & A \end{array}$$

věta o dvou strážnících.

Podle věty o dvou strážnících $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A \in \mathbb{R}$

$\square$

$(-1)^n$



**Def.** Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost a označme

$b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$.

(Pak $b_n$ je nerostoucí a $c_n$ je neklesající)

Je-li $\{a_n\}$ shora neomezená, pak klademe $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$

Je-li $\{a_n\}$ zdola neomezená, pak klademe $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Číslo $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ nazýváme limes superior posloupnosti $\{a_n\}$ a značíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ nazýváme limes inferior a značíme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$

Příklad: ~~$\{a_n\} = \{(-1)^n\}$~~ $a_n = (-1)^n$

$$b_n = \sup\{(-1)^k : k \geq n\} = 1 \quad \forall n \Rightarrow$$

$$\limsup_{n\to\infty} (-1)^n = \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

$$c_n = \inf\{(-1)^k : k \geq n\} = \inf\{(-1)^n, (-1)^{n+1}, (-1)^{n+2}, \dots\} = -1$$

$$\liminf_{n\to\infty} (-1)^n = \lim_{n\to\infty} c_n = -1$$