1. cvičení z PSt — 5. a 8.10.2020

Na rozehřátí

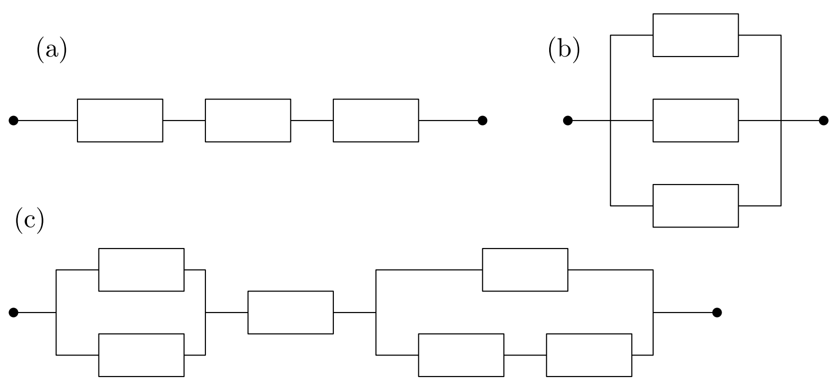
1. Házíme kostkou, při šestce házíme znovu. Jaký je vhodný prostor jevů Ω?

2. Dokažte, že $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3. Chceme spravedlivě rozlosovat mezi dvěma lidmi, ale máme jen cinknutou minci, kde padá orel s pravděpodobností $p \in (0, 1)$. Jak to udělat?

4. Je pravděpodobnější, že při hodu třemi kostkami padne 11 nebo 12?

5. Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností p. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky.



Podmíněná pravděpodobnost

6. Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte!)

7. Král udělí milost dvěma ze tří vězňů (a vybere náhodně). Jednomu z nich dozorce nabídl, že mu řekne jméno jednoho z druhých dvou vězňů, který bude propuštěn. Vězeň ale odmítl: pak bych měl pravděpodobnost propuštění jen 1/2, teď ji mám 2/3. Má pravdu?

8. Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, rozhodneme se náhodně. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

9. Házíme opakovaně dvojicí kostek, dokud nepadne součet 5 nebo 7. Jaká je pravděpodobnost, že součet 5 padne dříve?

Bonusy

10. (Bertrandův paradox) Rovnostrannému trojúhelníku se stranou 1 opíšeme kružnici, na té vybereme náhodnou tětivu. Jaká je pravděpodobnost, že délka tětivy je větší než 1?

11. Na stole leží dvě obálky, o kterých víme, že v každé z nich je nějaký (nenulový, celočíselný) počet stokorun, v obou jiný. Máme dovoleno jednu obálku otevřít a pak se rozhodnout, zda si necháme tu, nebo tu druhou. Pokud chceme získat obálku s vyšším obnosem, můžeme ji získat s pravděpodobností větší než 1/2? (Nápověda na druhé stránce.)

12. Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, atd. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

13. V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, …?

Pro procvičení

14. Hodíme korunou a dvoukorunou, na každé z nich padá panna s pravděpodobností p.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna na koruně?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že na obou padne panna, pokud padla panna aspoň na jedné minci?

Je bez počítání jasné, která pravděpodobnost je větší?

15. Házíme mincí, dokud nepadne orel, na každý hod dostaneme novou minci. (Jaká je pravděpodobnost, že získáme k mincí?) Pak všechny získané mince hodíme najednou, pokud na každé z mincí padne orel, můžeme si je všechny nechat. Jaká je pravděpodobnost, že se to stane?

16. Hodíme dvakrát kostkou. Označíme

- SD jev „součet hozených čísel je 10“,
- PS jev „první hod padla šestka“ a
- NS jev „v některém hodu padla šestka“ (možná v obou).

Spočtěte pravděpodobnosti daných jevů a všechny podmíněné pravděpodobnosti.

17. V krabici se 100 bateriemi jsou čtyři vybité.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že když vybereme náhodně tři z nich do čelovky, tak bude fungovat? (Musí být všechny v pořádku.)

(b) Jaká je pravděpodobnost, že budou aspoň dvě ze tří v pořádku?

(c) Třikrát vytáhneme náhodnou baterii, změříme a (protože je v pořádku) tak ji hodíme zpět. S jakou pravděpodobností se to stane?

Bez počítání: je vyšší pravděpodobnost (a) nebo (c)?

Nápověda k problému s obálkami: Vytáhneme minci a házíme, dokud nepadne panna. Označíme X celkový počet hodů (včetně posledního, tj. $X \geq 1$.) Pokud v naší obálce je k stokorun, tak si obálku necháme, pokud $X < k$. Jaká je pravděpodobnost, že získáme obálku s vyšší částkou?

Řešení příkladu s vězněm. Označme vězně A, B, C. Předpokládejme, že král už rozhodl (náhodně a nevratně), a dozorce nám sdělí částečně (pravdivé) informace o královĕ rozhodnutí. Potom je jasné, že pravděpodobnost, že A bude propuštěn je 2/3 nezávisle na tom, co dozorce řekne. Prozkoumejme však podrobněji úvahu Ačka. Pokud se A dozví, že B bude propuštěn, tak ví, že druhý propuštěný je buď A nebo C, takže jeho pravděpodobnost klesla na 1/2. To je samozřejmě nesmysl, ale kde je chyba v úvaze?

I když to působí divně, tak chyba je v tom, že v dané situaci má A větší šanci, než C. Rozeberme to ještě trochu víc. V zadání bylo řečeno, že dozorce řekne jednoho z vězňů B, C, který bude propouštěn. Pro konkrétnost předpokládejme, že pokud budou propuštěni B i C, tak dozorce vybere náhodně. (Rozmyslete si ale i možnost, kdy v tomto případě řekne vždy B.)

Označme AP je „A bude propuštěn“ a DB jev „dozorce řekne, že B bude propuštěn“. Potom $P(AP) = 2/3$, $P(DB) = 1/2$ (podle věty o rozboru možností: $0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$). Konečně $P(AP \cap DB) = 1/3$. Takže pečlivě spočítaná podmíněná pravděpodobnost je

$$P(AP \mid DB) = \frac{P(AP \cap DB)}{P(DB)} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}\,.$$