Co je to výrok?

Výrok je gramaticky správně sestavená věta u níž je možné zkoumat, zdali je pravdivá nebo ne, čili téměř každá oznamovací věta mající smysluplný význam.

V matematice jednoduché výroky typicky vyjadřují:

- Zdali jsou nějaké objekty shodné, neboli rovnost: $x = 2$, „Sudá a lichá čísla dohromady *tvoří* množinu přirozených čísel.“, „T.G.M. *byl* první český prezident.“.
- Zdali má nějaký objekt nějakou vlastnost, často zdali patří do množiny objektů dané vlastnosti: $x \in \mathbb{R}$, „Zobrazení f je prosté.“, „Petr je plavec.“.
- Další podobné skutečnosti, např. „Každé dvě přímky se protínají.“

Jednoduché výroky lze skládat do složitějších, např. „Je-li x sudé, potom je x^2 také sudé.“

Platnost výroků

Platnost výroku závisí na kontextu, tedy na dohodnutém (málokdy zcela deklarovaném) systému objektů a jejich pojmenování.

Například „Každé číslo lze vydělit dvěma." je výrok pravdivý na $\mathbb{R}$, ale nepravdivý na $\mathbb{N}$. Výrok: „Součet úhlů v trojúhelníku je π." platí v eukleidovské geometrii, ale neplatí v eliptické geometrii.

Pravdivost věty „Kančí kýta je nejlepší se šípkovou omáčkou." záleží na gustu mluvčího. V obecné rovině nelze určit pravdivost a v tomto kontextu ji nelze považovat za výrok.

Pravdivost výroků značíme obvykle pomocí hodnot: $1/0$, Pravda/Nepravda, P/N, True/False, T/F apod.

Definice, axiomy, tvrzení, ...

Systémy byvají vymezeny *definicemi* a *axiomy*.

Definice vymezují *názvosloví*, např.: „*Sudá čísla* jsou ta přirozená čísla, která lze bezezbytku dělit dvěma.“, „Zobrazení f nazveme *vzájemně jednoznačné* neboli *bijekcí* právě když je prosté a na.“

Axiomy určují *výchozí předpoklady* ze kterých odvozujeme další výroky, např. „Pro všechna a platí: $a + 0 = a$.“ je jeden z axiomů vymezujících reálná čísla, nebo „Každé dva body určují přímku.“ je jeden z axiomů eukleidovské geometrie.

Důležitost *tvrzení* čili matematického výroku odvozeného z axiomů a definic bývá (často subjektivně) vyjádřena tím, že je označen za:

- *Pozorování*, plyne-li jednoduše z axiomů a definic.
- *Větu*, pro tvrzení zasluhující zvláštní pozornost.
- *Lemma*, pro pomocný výrok zpravidla technického rázu sloužící k dokázání nějakého důležitějšího tvrzení.
- *Důsledek*, vyplývá-li bezprostředně z nějaké jiné věty.

Neví-li se, zda tvrzení platí, nazývá se *domněnka* nebo *hypotéza*.

Logické spojky

Negace výroku A má opačnou pravdivost a značíme ho $\neg A$. Vyjadřuje se slovy „Neplatí, že:“, „Není pravda, že:“, apod.

Konjunkce (z lat. *com-iugare, s-pojit*) výroků A a B platí tehdy, když platí oba výroky zároveň. Značí se $A \wedge B$, případně $A\&B$, A *AND* B a vyslovuje se „a“, „a zároveň“, „a také“.

Disjunkce (z lat. *dis-iungere roz-pojit*) výroků A a B platí tehdy, když platí alespoň jeden z výroků. Značí se $A \vee B$, případně A *OR* B a vyslovuje se „nebo“, „anebo“.

Jen výjimečně se spojka „nebo“ chápe ve smyslu „výlučného nebo“, kdy má platit právě jedna z možností, značeno A *XOR* B.

Ekvivalence výroků A a B platí tehdy, když mají stejnou pravdivostní hodnotu. Značí se $A \Leftrightarrow B$ a vyslovuje se „právě když“, „tehdy a jen tehdy“, „je ekvivalentní“.

Implikace výroků A a B platí tehdy, když platí oba zároveň anebo když A neplatí. Značí se $A \Rightarrow B$ a vyslovuje se „Pokud … potom“, „Jestliže … pak“, „Když … tak“, „Z … vyplývá“.

Pravdivostní tabulky

Pravdivostní tabulky slouží k vyhodnocení a zaznamenání pravdivosti složených výroků.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1

Vlastnosti logických spojek

Spojky $\wedge$, $\vee$ a $\Leftrightarrow$ jsou *komutativní*, ale $\Rightarrow$ nikoli:
$A \wedge B = B \wedge A$, $\quad A \vee B = B \vee A$, $\quad A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$,
$(0 \Rightarrow 1) = 1 \neq 0 = (1 \Rightarrow 0)$.

Vlastnosti logických spojek

Závorky určují pořadí vyhodnocení (nejen) logických spojek. Musejí se používat ve výrazech s různými spojkami (viz distrib.), protože není shoda na tom, která spojka má přednost před jinou.

Spojky $\wedge$, $\vee$ a $\Leftrightarrow$ jsou *asociativní*, ale $\Rightarrow$ nikoli:
$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, $\quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$,
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C = A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$,
$((0 \Rightarrow 0) \Rightarrow 0) = 0 \neq 1 = (0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0))$

Řetězení implikací $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, např. v tvrzení „Jestliže mrzne, tak když prší, tvoří se náledí.“ odpovídá situaci, kdy mají předpoklady platit zároveň. Ta má přirozenější zápis $(A \wedge B) \Rightarrow C$.

Se zápisem $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ se lze často setkat v důkazech. Zde to neznamená nekorektně zapsaný složený výrok, ale zjednodušené schéma pro zápis konjunkce dvou implikací $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$, z nichž vyplývá $A \Rightarrow C$.

Distributivní zákony (podobně jako pro množiny)
$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$, $\quad (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Negace složených výroků

Dvojí negace: $\neg(\neg A) = A$.

Negace konjunkce: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$.

Negace disjunkce: $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

A XOR B	0	1
0	0	1
1	1	0

Negace ekvivalence:

$$\neg(A \Leftrightarrow B) = A \ XOR \ B = (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B).$$

Negace implikace: $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$.

Konstrukce výroku

Hodnoty dané pravdivostní tabulkou lze převést na zápis složeným výrokem dvěma způsoby: buď disjunkcí případů, kde jsou 1 (viz negaci ekvivalence) nebo konjunkci případů, kde jsou 0,

např. $A \ XOR \ B = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$.

První, přirozenější způsob dává *disjunktivní normální formu* výroku, zatímco druhý dává *konjunktivní normální formu*, často používanou v informatice.