Cvičení - Automaty a gramatiky (07.05.2026)

Turingove stroje

1. Navrhněte Turingův stroj M, který rozhoduje jazyk $L = \{a^i b^i | i \geq 0\}$ nad abecedou $\{a, b, c\}$.

2. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1, c\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{yes}\})$, který rozhoduje wcw^R, $w \in \{0, 1\}^*$. Jestli není, skončí ve stavě f_{no}.

3. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1, c\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{yes}\})$, který zkontroluje, jestli je vstupní slovo ve formátu wcw, $w \in \{0, 1\}^*$. Jestli není, skončí ve stavě f_{no}.

4. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{liche}, f_{sude}\})$, který najde střed slova a skončí buď na něm (lichá délka) nebo na prvním znaku druhé poloviny.

5. Navrhněte Turingův stroj $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_0, B, \{f_{yes}, f_{no}\})$, zkontroluje, jestli je vstupní slovo ve formátu ww, $w \in \{0, 1\}^*$.

6. Naprogramujte na Turingově stroji *asociativní paměť*. Například můžete předpokládat Turingův stroj se dvěma páskami, kde první slouží k dotazování a odpovídání, a druhá reprezentuje obsah paměti.

   a) Dotazem $k\#w$, kde $k, w \in (\Sigma \setminus \#)^*$ jsou po řadě klíč a data, vložíme do paměti asociaci klíče k s daty w. Vstupní páska je v tomto případě smazána, pokud klíč v paměti ještě není reprezentován, jinak je ponechána beze změny. Za oddělovač dvojic můžete zvolit nový symbol páskové abecedy.

   b) Na první pásce lze položit dotaz: k, kde $k \in (\Sigma \setminus \#)^*$ je klíč, přičemž jako odpověď na první pásce očekáváme data asociované s klíčem k.

7. Nechť $b \in \mathbb{N}$. Navrhněte **Turingův stroj**, který přijímá jazyk $L = \{u\#v\#w | u, v, w \in (0, 1, \ldots, (b-1))^* \ \& \ u_b \circ v_b = w_b\}$, u_b kde značí interpretaci slova u jako čísla v soustavě o základu b (tj. například $0101_2 = 5$) a $\circ$ nějakou binární aritmetickou operaci.

   (a) $\circ$ je +

   (b) $\circ$ je -

   (c) $\circ$ je *

   (d) $\circ$ je div (celočíselné dělení)

   (e) $\circ$ je mod (zbytek po celočíselném dělení).

Opakování

1. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky regulární:

   (a) $L_1 = \{a^{3i+4} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (b) $L_2 = \{a^{i^2+i+1} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (c) $L_3 = \{a^i b^j \mid j < i, i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (d) $L_4 = L_1 \cap \overline{L_5}; L_5 = \{a^{2i} + 1 | i = 0, 1, 2, \ldots\}$

2. Rozhodněte, zda jsou následující jazyky bezkontextové:

   (a) $L_5 = \{a^i b^j \mid j < i, i = 0, 1, 2, \ldots\}$

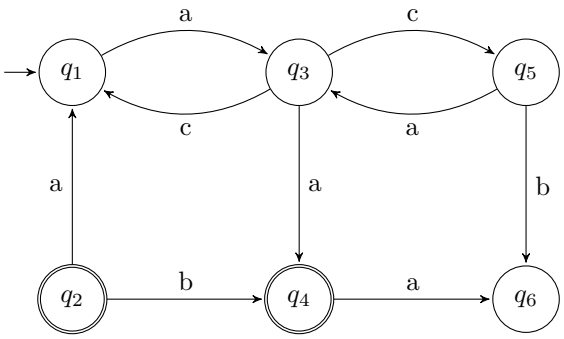
   (b) $L_6 = \{a^{2i} b^{3i} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (c) $L_7 = \{a^i b^{i+1} c^{2i} \mid i = 0, 1, 2, \ldots\}$

   (d) $L_8 = \{w \in \{a, b\}^* | |w|_a - |w|_b \geq 2\}$

3. Najdete redukt automatu:

   (a)



4. K nedeterministickému automatu **E** sestrojte ekvivalentní deterministický konečný automat.

E	a	b	λ
*→A	{A,B}	{B}	$\emptyset$
B	{B,D}	$\emptyset$	$\emptyset$
*C	{B}	{D}	{A}
D	{A}	{C,D}	$\emptyset$

5. Nechť A a B jsou konečné automaty pracující nad abecedou Σ. Navrhněte algoritmus, který rozhodne zda:

   (a) $L(A) = \emptyset$

   (b) $L(A) = L(B)$

   (c) $L(A) \subset L(B)$

   (d) $L(A) = \Sigma^*$

   (e) $L(A)$ je nekonečný.

6. Napište bezkontextovou (resp. regulární,pokud existuje) gramatiku generující jazyk $\{a^i b^j a^{3i} | i, j \in \mathbb{N}\}$.

7. Dokažte, že jazyk $\{a^{i^5} | i \in \mathbb{N}\}$ není regulární.

8. Sestrojte zásobníkový automat přijímající jazyk $\{w | w \in \{0,1\}^* : |w|_0 \geq |w|_1 + 1\}$.

9. Zařaďte jazyk $\{0^i 1^j 2^k 3^l | l = 0 \vee i = j = k\}$ do Chomského hierarcie. (Kontextovost dokazovat nemusíte, že je rekurzivně spočetný stačí popsat algoritmem slovně, detailní Turingův stroj není potřeba.) Je jazyk regulární? Je jazyk bezkontextový?

10. Sestrojte deterministický Turingův stroj, který přijímá právě slova nad $\{0,1\}^*$, která končí posloupností 010.