



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA

Univerzita Karlova

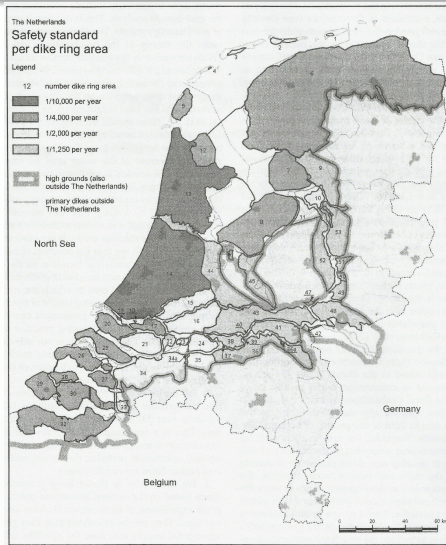
Bílý Jakub

Optimalizace strategií pro předcházení povodním

Carel Eijgenraam, Ruud Brekelmans, Dick den Hertog, Kees Roos (2016) - Optimal strategies for flood prevention

P. Zwaneveld, G. Verweij, S. van Hoesel (2018) - Safe dike heights at minimal costs: An integer programming approach

- Nizozemí - riziko povodní na 55 % území, 3500 km hrází
- 1953 - povodně v Nizozemí, 2000 mrtvých
- Delta Committee - David van Dantzig - matematický model pro vybudování (cenově) optimálních opatření za dodržení standardů ochrany
 - 53 samostatných chráněných okruhů s pevnou pravd. selhání během 1 roku (dle škod způsobených povodní)
 - O kolik je třeba současné hráze zvýšit, abychom dosáhli potřebného stupně ochrany?
- Model postupně vylepšován, ale používán cca do 2000.



Předpoklad

Jednotlivé okruhy jsou na sobě nezávislé, modelujeme každý zvlášť.
Hráz i chování řek/moří kolem celého okruhu je homogenní.

Cíl: Získat optimalizační úlohu, která kombinuje:

- Očekávanou finanční ztrátu, způsobenou selháním hrází okruhu v roce t .
 - $P(\text{selhání v } t) \cdot \text{ztráta v } t$
 - $P(\text{selhání v } t)$ roste v čase - pokles terénu, nárůst hladiny moře
 - ztráta v t také roste v čase - nové, dražší stavby, více obyvatel...
- Cenu vylepšení stávajících hrází
 - fixní náklady + výška zlepšení $\cdot$ cena za 10 cm
 - vyšší cena za 10 cm pro vysoké hráze (Musí se stavět i do šířky.)
 - když je hráz vyšší tak voda nemůže odtéct - vyšší ztráta při selhání (okruhy s svahem k moři)
- Započtení inflace/diskontování do modelu (výhled na 50+ let)

Předpoklad

Výška hladiny v řekách a mořích se řídí exponenciálním rozdělením.

P_t pravděpodobnost selhání v roce t

H_t výška hráze v roce t

α parametr exp. rozdělení pro hladinu vody (1/cm)

η růst hladiny vody (cm/rok)

Potom $P_t = P(\text{hladina vody je vyšší než výška hráze}) = 1 - F(H_t) = 1 - (1 - e^{-\alpha(H_t)})$

Pravděpodobnost selhání

$$P_t = P_0 \cdot e^{-\alpha(H_t - H_0 - \eta t)}$$

Výše škod při selhání a očekávaná ztráta při selhání

V_t	výše škod při selhání v roce t
H_t	výška hráze v roce t
γ	tempo ekonomického růstu v okruhu (za rok)
ζ	růst ztrát po zvýšení hráze (1/cm)

Výše škod při selhání

$$V_t = V_0 \cdot e^{\gamma t} \cdot e^{\zeta(H_t - H_0)}$$

Předpoklad

Selhání nenastane více, než jednou do roka. (V praxi jsou záplavy tak zřídka, že předpoklad platí.)

Očekávaná ztráta při selhání

$$\begin{aligned} S_t &= P_t \cdot V_t \text{ kde} \\ P_t &= P_0 \cdot e^{\alpha \eta t} \cdot e^{-\alpha(H_t - H_0)} \\ V_t &= V_0 \cdot e^{\gamma t} \cdot e^{\zeta(H_t - H_0)} \end{aligned}$$

Očekávaná ztráta při selhání

$$S_t = P_t \cdot V_t = P_0 \cdot e^{\alpha \eta t} \cdot e^{-\alpha(H_t - H_0)} \cdot V_0 \cdot e^{\gamma t} \cdot e^{\zeta(H_t - H_0)}$$

Reformulace:

$$S_t = S_0 \cdot e^{\beta t} \cdot e^{-\theta h_t}$$

$e^{\beta t}$ - zvýšení očekávaných ztrát kvůli rostoucím hladinám a ekonom. růstu, očekáváme $\beta > 0$ (jinak by stačila 1/0 akce v čase 0).

$e^{-\theta h_t}$ - snížení očekávaných ztrát díky zvyšování hrází, očekáváme $\theta > 0$ (jinak by zvýšení hráze nesnížilo očekávanou ztrátu).

h	výše hráze před zvýšením (cm)
u	zvýšení hráze (cm)
$b \geq 0; c > 0; \lambda \geq 0$	parametry

Cena zvýšení hrází

$$I(h; u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u = 0 \\ (c + bu)e^{\lambda(h+u)} & \text{pro } u \neq 0 \end{cases}$$

Finální model

Zavedeme diskontní faktory - δ_1 pro škody a δ_2 pro ceny zvyšování hrází.

Celková očekávaná ztráta a ceny zvyšování hrází

$$\int_0^{\infty} S_t e^{-\delta_1 t} dt = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_i}^{t_{i+1}} S_0 e^{\beta t} e^{-\theta h_{t_i}} e^{-\delta_1 t} dt = \frac{S_0}{\beta - \delta_1} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\theta h_{t_i}} [e^{(\beta - \delta_1)t_{i+1}} - e^{(\beta - \delta_1)t_i}]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(h_{t_{k-1}}; u_k) e^{-\delta_2 t_k}$$

Finální model

$$\min \frac{S_0}{\beta - \delta_1} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\theta h_{t_i}} [e^{(\beta - \delta_1)t_{i+1}} - e^{(\beta - \delta_1)t_i}] + \sum_{k=1}^{\infty} I(h_{t_{k-1}}; u_k) e^{-\delta_2 t_k}$$

Finální model

$$\min \frac{S_0}{\beta - \delta_1} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\theta \sum_{j=1}^i u_j} [e^{(\beta - \delta_1)t_{i+1}} - e^{(\beta - \delta_1)t_i}] + \sum_{k=1}^{\infty} l\left(\sum_{j=1}^{i-1} u_j; u_k\right) e^{-\delta_2 t_k}$$

optimalizované proměnné $u_i; t_i \quad i = 1 \dots \infty$

Model má samozřejmě nějaké podmínky např. $u_i > 0$ (pozor t_i mohou být < 0). Nebo např. $l(h; u_1 + u_2) \leq l(h; u_1) + l(h; u_2)$. Podrobnější diskuze podmínek a také, zda je model tohoto tvaru vhodný, či volby parametrů $(\delta_1; \delta_2; \theta; \beta)$ diskutovány v článku [1].

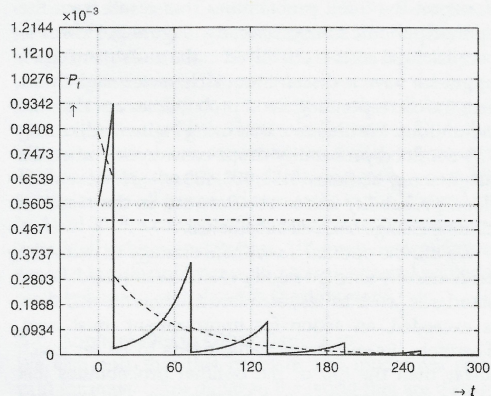
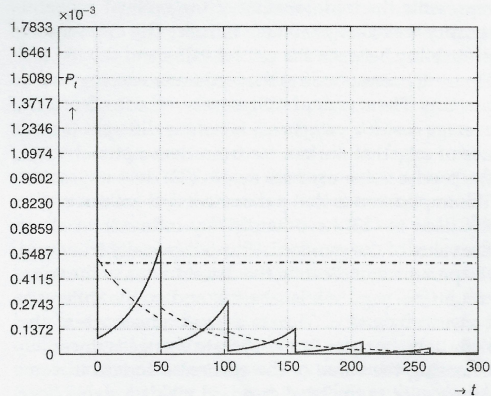
- Řešení lze získat položením parc. derivací dle u_i ; t_i rovných nule.
- Za určitých předpokladů regularity (především β ; θ ; δ_1 ; δ_2 ; λ jsou konstantní v čase), lze ukázat, že řešení existuje a je periodické (viz [A]):

$$u_j = v \quad \forall j \geq l \qquad t_j = t_l + (j - l)p \quad \forall j \geq l$$

Řešení může mít 2 tvary:

- $t_1 \geq 0$ (současná hráz je dostatečná) - V čase t_1 hráz zvýšíme a následně je řešení periodické.
- $t_1 < 0$ (současná opatření jsou nedostatečná) - V čase $t_1 = 0$ musíme provést nápravu situace a hráz hned zvýšit (je možné, že $u_i > v$), od t_2 je řešení periodické.

Výsledné pravděpodobnosti pro okruhy 15 a 22:



Note. The solid curves represent P_t , the dashed lines represent P_0^- , the dashed-striped lines represent the current flood protection standards, and the striped curves represent P_{middle} .

Dostatečnost současných hrází

No.	Year t_1	t_2	u_1	p	v	Costs
10	46	103	57	57	57	40.0
11	42	101	62	59	62	110.2
15	0	51	56	52	53	545.2
16	4	58	53	54	53	1,089.7
22	13	75	54	62	54	309.3
23	56	104	55	48	55	20.1
24	8	51	62	43	62	297.3
35	0	41	64	42	60	345.2
38	0	51	65	51	62	172.1
41	0	60	101	63	75	325.9
42	15	77	72	61	72	79.2
43	8	73	73	65	73	1,304.8
44	0	50	77	55	50	206.5
45	0	46	62	51	41	33.7
47	0	51	65	52	56	64.1
48	0	41	58	42	51	403.0
49	32	85	46	53	46	74.0
50	0	59	96	59	62	53.5
51	35	87	40	51	40	54.2
52	4	61	46	58	46	245.4
53	0	67	87	69	66	307.5

- Legislativa - Stavba hráze začne, když je překročena daná pravděpodobnost záplavy v okruhu.
- U větších projektů je doba od překročení hranice po dokončení stavby 15-25 let
- Autoři [1] vyzkoušeli vícero možností, jak tyto pravděpodobnosti určit, nejlepší kandidát pro dobu $[t_j; t_{j+1})$ určen:

$$P_t^{middle} = \frac{S_t^{middle}}{V_t} \text{ kde } S_t^{middle} = \frac{S_{t_{j+1}}^- - S_{t_{j+1}}^+}{\ln S_{t_{j+1}}^- - \ln S_{t_{j+1}}^+}$$

- neboli S_t^{middle} je logaritmický průměr očekávaných škod před a po zvýšení hráze v čase t_{j+1} .
- Jako příklad autoři používají okruh 22: Po vylepšení v čase $t = 13$ doporučují zlepšit standart z 1/2 000 na 1/10 000.

Předpoklad

Jednotlivé okruhy jsou na sobě nezávislé, modelujeme každý zvlášť.

~~Hráz i chování řek/moří kolem celého okruhu je homogenní.~~

Okruh má segmenty $l \in L$, každý s vlastními charakteristikami (pravd. selhání, výšky a ceny vylepšení apod.).

Očekáváme, že musíme vždy vylepšit segment s nejvyšší pravděpodobností selhání (škody po selhání jsou stejné pro všechny segmenty a minimalizujeme očekávané škody).

Rozhodovací proměnné:

- $CY(t; l; h_1; h_2) = 1$ pokud segment l je vylepšen v roce t z výšky h_1 na výšku h_2 . Jinak $CY(t; l; h_1; h_2) = 0$.
- $DY(t; l; h) = 1$ pokud segment l s výškou h je nejslabší článek (má nejvyšší pravd. selhání) v roce t . Jinak $DY(t; l; h) = 0$.

Model s nehomogenními hrázemi

$$\min \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{\substack{h_1, h_2 \in H_l \\ h_2 \geq h_1}} l(t, l, h_1, h_2) \cdot CY(t, l, h_1, h_2) \quad (1)$$

$$+ \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{h \in H_l} P(t, l, h) \cdot V(t, l, h) \cdot DY(t, l, h) \quad (2)$$

(1) značí náklady na vylepšování segmentů hrází. (2) je očekávaná ztráta při selhání nej-slabšího článku.

Podmínky:

$$CY(0, l, 0, 0) = 1; \quad CY(0, l, h_1, h_2) = 0 \quad \forall l \in L; h_1, h_2 \in H_l: h_2 \geq h_1, h_2 > 0 \quad (3)$$

(3) dává počáteční podmínky (v čase 0).

Model s nehomogenními hrázemi

$$\sum_{\substack{h_1 \in H_l \\ h_1 \leq h_2}} CY(t-1, l, h_1, h_2) = \sum_{\substack{h_3 \in H_l \\ h_3 \geq h_2}} CY(t, l, h_2, h_3) \quad \forall t \in T \setminus \{t^0\}, l \in L, h_2 \in H_l \quad (4)$$

(4) předává výšku h_2 z roku $t-1$ do roku t .

$$\sum_{h_1 \in H_l} \sum_{\substack{h_2 \in H_l \\ P(t, l_0, h_2) > P(t, l^*, h^*)}} CY(t, l_0, h_1, h_2) + \sum_{l \in L} \sum_{\substack{h \in H_l \\ P(t, l, h) \leq P(t, l^*, h^*)}} DY(t, l, h) \leq 1 \quad \forall t \in T, l_0, l^* \in L, h^* \in H_l \quad (5)$$

(5) určuje, který segment je nejslabší článek. Pokud segment l^* s výškou h^* je zvolen, pak nemůže existovat žádný segment s nižší pravd. selhání a zároveň žádný segment s vyšší pravd. nemůže být vylepšován.

Model s nehomogenními hrázemi

$$\sum_{l \in L} \sum_{h \in H_l} DY(t, l, h) = 1 \quad \forall t \in T \quad (6)$$

(6) určuje, že vždy je vybrán jen jeden nejslabší článek.

$$CY(t, l, h_1, h_2) \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, l \in L, h_1, h_2 \in H_l, h_2 \geq h_1 \quad (7)$$

$$DY(t, l, h) \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, l \in L, h \in H_l \quad (8)$$

$$\sum_{t^*=t+1 \dots t+m} \sum_{h_1 \in H_l} \sum_{h_2 \geq h_1 \in H_l} CY(t^*, l, h_1, h_2) \leq 1 \quad \forall t \in T \quad (9)$$

(7) a (8) deklarují CY a DY jako binární. (9) brání vylepšování segmentu l dvakrát ve stejném časovém okně $[t + 1; t + m]$

Algoritmus a snižování velikosti úlohy

- Diskretizace času - vlády zajímá výhled na 30 let, optimalizovat ale musíme na 300 let dopředu.
 - prvních 100 let - po 5 letech, dále po 10 letech
- Diskretizace zvyšování hrází - není třeba úplně přesné (hráz si v praxi "sedá").
 - prvních 100 cm - po 10 cm, do 200 cm po 20 cm, více po 30 cm
- Preprocessing - snižování počtu optimalizovaných proměnných
 - Odložení zvýšení hráze o 1 časovou jednotku (pokud máme přípustné řešení, tak zkontrolujeme řešení daná tak, že postupně všechna zvýšení posuneme o 1 časovou jednotku dále).
 - Pozdní zvýšení hráze není efektivní (pro některá zvýšení na konci sledované doby se stane, že přínos ze zvýšení je menší než cena za zvýšení).
 - Rozdělení zvýšení hráze do 2 kroků (pro řešení kde dochází k vysokému zvýšení v t_j najednou je možné najít lepší řešení menším zvýšením v t_j a druhým menším zvýšením v t_{j+k}).
- Optimalizace byla provedena pomocí branch-and-cut algoritmu, preprocessing dokázal snížit velikost problému o cca 40%, ale na dobu výpočtu neměl výrazný vliv.

- Cost-benefit modely - lepší metoda optimalizace problému, zohlednění vývoje do budoucna.
- Možnost přizpůsobení mnoha aspektů modelu - pravd. selhání, škod při selhání atd.
- Článek [1] - diskuze nad zvolenými modely pro pravd. selhání, škod při selhání atd.
- Článek [1] - metoda přijata vládou Nizozemí v roce 2015
- Článek [2] - důležité zlepšení rozdělením na segmenty, dodání lepší výpočetní metody
- Možnost využití v jiných státech - Bangladéš, Pákistán, USA ...

[1] Carel Eijgenraam, Ruud Brekelmans, Dick den Hertog, Kees Roos (2016) Optimal Strategies for Flood Prevention. Management Science 63(5):1644-1656, <https://doi.org/10.1287/mnsc.2015.2395>

[A] Online příloha k: Carel Eijgenraam, Ruud Brekelmans, Dick den Hertog, Kees Roos (2016) Optimal Strategies for Flood Prevention. Management Science 63(5):1644-1656, <https://doi.org/10.1287/mnsc.2015.2395>

[2] P. Zwaneveld, G. Verweij, S. van Hoesel, Safe dike heights at minimal costs: An integer programming approach, European Journal of Operational Research, Volume 270, Issue 1, 2018, Pages 294-301, ISSN 0377-2217, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.03.012>.

Děkuji za pozornost.