

## Turingův stroj, rozšíření

Marta Vomlelová

MS 303

# Turingovy stroje – historie a motivace

- 1931–1936 pokusy o formalizaci pojmu algoritmu  
Gödel, Kleene, Church, Turing
- **Turingův stroj**
  - ▶ zachycení práce matematika
    - ★ nekonečná tabule  
lze z ní číst a lze na ni psát
    - ★ mozek (řídící jednotka)
  - ▶ Formalizace TM:
    - ★ místo tabule **nekonečná páska**
    - ★ místo křídý **čtecí a zapisovací hlava, kterou lze posunovat v obou směrech**
    - ★ místo mozku konečná řídící jednotka (jako u PDA)
  - ▶ další formalizace:
    - ★ částečně rekurzivní funkce, booleovské funkce, RAM,  $\lambda$ -kalkul,
- Snažíme se definovat problémy nerozhodnutelné jakýmkoli počítačem.

## Definice 7.1: Turingův stroj

**Turingův stroj (TM)** je sedmice  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  se složkami:

$Q$  konečná množina **stavů**

$\Sigma$  konečná neprázdná množina **vstupních symbolů**

$\Gamma$  konečná množina všech **symbolů pro pásku**. Vždy  $\Gamma \supseteq \Sigma$ ,  $Q \cap \Gamma = \emptyset$ .

$\delta$  (částečná) **přechodová funkce**.  $(Q - F) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ , v  $\delta(q, x) = (p, Y, D)$ :

$q \in (Q - F)$ ! aktuální stav

$x \in \Gamma$  aktuální symbol na pásce

$p$  nový stav,  $p \in Q$ .

$Y \in \Gamma$  symbol pro zapsání do aktuální buňky, přepíše aktuální obsah.

$D \in \{L, R\}$  je **směr** pohybu hlavy (doleva, doprava).

$q_0 \in Q$  **počáteční stav**.

$B \in \Gamma - \Sigma$ . Blank. Symbol pro prázdné buňky, na začátku všude kromě konečného počtu buněk se vstupem.

$F \subseteq Q$  množina **koncových** neboli **přijímajících** stavů.

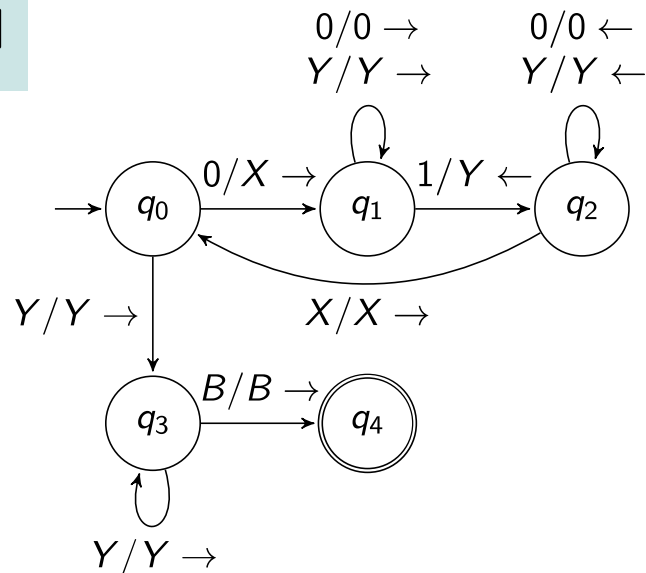
Pozn: někdy se nerozlišuje  $\Gamma$  a  $\Sigma$  a neuvádí se prázdný symbol  $B$ , tj. pětice.

# Přechodový diagram pro Turingův stroj

## Definice 7.2: Přechodový diagram pro TM

**Přechodový diagram** pro TM sestává z uzlů odpovídajícím stavům TM. Hrany  $q \rightarrow p$  jsou označeny seznamem všech dvojic  $X/YD$ , kde  $\delta(q, X) = (p, Y, D)$ ,  $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ .

Pokud neuvedeme jinak,  $B$  značí blank – prázdný symbol.



## Příklad 7.1 (Turingův stroj pro jazyk $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$ )

| State | 0             | 1             | X             | Y             | B             |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | –             | –             | $(q_3, Y, R)$ | –             |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | –             | $(q_1, Y, R)$ | –             |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | –             | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | –             |
| $q_3$ | –             | –             | –             | $(q_3, Y, R)$ | $(q_4, B, R)$ |
| $q_4$ | –             | –             | –             | –             | –             |

## Definice 7.3: Konfigurace Turingova stroje

**Konfigurace Turingova stroje** je řetězec  $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n$  kde

- $q$  je stav Turingova stroje
- čtecí hlava je vlevo od  $i$ -tého symbolu
- $X_1 \dots X_n$  je část pásky mezi nejlevějším a nejpravějším symbolem různým od prázdného ( $B$ ). S výjimkou v případě, že je hlava na kraji – pak na tom kraji vkládáme jeden  $B$  navíc.

## Definice 7.4: Krok Turingova stroje

**Kroky** Turingova stroje  $M$  značíme  $\vdash_M, \vdash_M^*, \vdash^*$  jako u zásobníkových automatů.

Pro  $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$

- $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n \vdash_M X_1X_2 \dots X_{i-1}YpX_{i+1} \dots X_n$ .

Pro  $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$

- $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n \vdash_M X_1X_2 \dots X_{i-2}pX_{i-1}YX_{i+1} \dots X_n$

Odvození v konečném počtu kroků  $\vdash_M^*$  definuji rekurzivně pro  $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$  konfigurace  
Základ:  $\mathcal{I} \vdash_M^* \mathcal{I}$  Rekurze: Pokud  $\mathcal{I} \vdash_M \mathcal{J}$  a  $\mathcal{J} \vdash_M^* \mathcal{K}$ , tak i  $\mathcal{I} \vdash_M^* \mathcal{K}$ .

## Definice 7.5: TM přijímá jazyk, rekurzivně spočetný jazyk

Turingův stroj  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$  **přijímá jazyk**  $L(M) = \{w \in \Sigma^* : q_0 w \vdash_M^* \alpha p \beta, p \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$ , tj. množinu slov, po jejichž přečtení se dostane do koncového stavu. Pásku (u nás) nemusí uklízet.

Jazyk nazveme **rekurzivně spočetným**, pokud je přijímán nějakým Turingovým strojem  $T$  (tj.  $L = L(T)$ ).

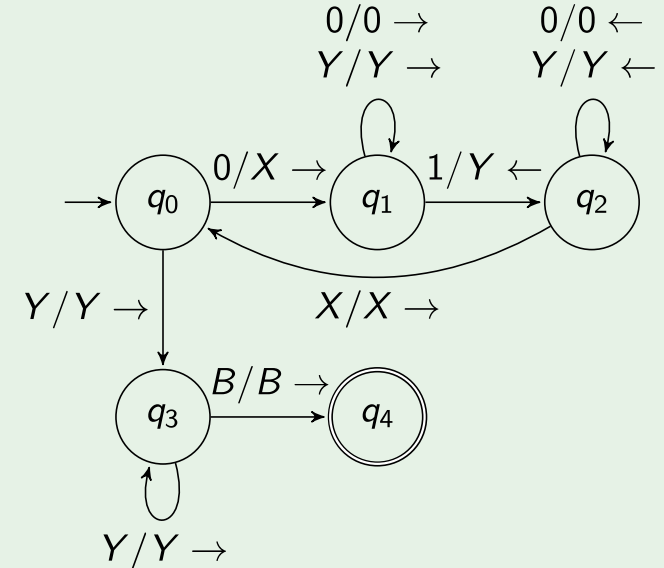
Turingův stroj  $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B, \{q_4\})$  s  $\delta$  v tabulce přijímá jazyk  $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$ .

| Stav  | 0             | 1             | X             | Y             | B             |
|-------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | —             | —             | $(q_3, Y, R)$ | —             |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | —             | $(q_1, Y, R)$ | —             |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | —             | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | —             |
| $q_3$ | —             | —             | —             | $(q_3, Y, R)$ | $(q_4, B, R)$ |
| $q_4$ | —             | —             | —             | —             | —             |

## Příklad 7.4 (TM z příkladu 7.1 přijímá jazyk $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$ )

Na pásce vždy výraz typu  $\mathbf{X^*0^*Y^*1^*}$

- postupně přepisujeme 0 na  $X$  a odpovídající 1 na  $Y$
- $q_0$  přepíše 0 na  $X$  a předá řízení  $q_1$
- $q_1$  najde první 1, přepíše na  $Y$  a předá řízení  $q_2$
- $q_2$  se vrátí k  $X$ , nechá ho být a předá řízení  $q_0$
- ...
- pokud  $q_0$  vidí  $Y$ , předá řízení  $q_3$
- $q_3$  dojde zkontrolovat, jestli na konci nezbyly 1
- pokud  $q_3$  našlo  $B$ , předá řízení  $q_4$
- $q_4$  skončí úspěchem (je přijímající)
- ...
- pokud  $q_3$  narazilo na 1, tak skončí neúspěchem
  - ▶ nemá instrukci
  - ▶ není přijímající.



# Ještě příklad, rekurzivně spočetné jazyky

## Příklad 7.5 (Modifikace konečného automatu na TM)

Jazyk  $L = \{a^{2^n} | n \geq 0\}$

přijímá Turingův stroj  $M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$  s  $\delta$  v tabulce:

| $\delta$                       | komentář                         |
|--------------------------------|----------------------------------|
| $\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$ | prázdné slovo, konec výpočtu     |
| $\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$ | zvětší čítač ( $2k + 1$ symbolů) |
| $\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$ | nuluje čítač ( $2k$ symbolů).    |

- Turingův stroj pro regulární jazyk:
  - ▶ simuluje konečný automat, pohyb hlavy vždy vpravo,
  - ▶ vidí-li  $B$ , tj. konec vstupu. Pokud je stav DFA přijímající, přejde do nového přijímajícího stavu  $q_F$ .
  - ▶ (Z  $q_F$  nesmí být instrukce, z přijímajících stavů DFA potřebuje rozlišit  $B$  a jiné znaky.)
- Bezkontextové jazyky: nejsnáze s pomocnou páskou simulující zásobník, bude za chvíli.

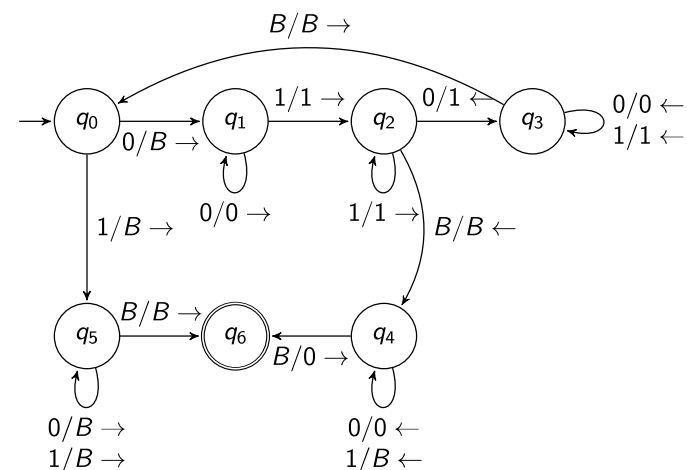
# TM s výstupem

## Příklad 7.6 (TM s výstupem)

Turingův stroj počítající **monus**  $m \dot{-} n = \max(m - n, 0)$ .

- $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_6\})$
- Počáteční páska  $0^m 10^n$ .
- M zastaví s páskou  $0^{m \dot{-} n}$  obklopenou prázdnem B.

- Najdi nejlevější 0, přepiš na B.
- Jdi doprava a najdi 1; pokračuj, najdi 0 a přepiš na 1.
- Vrať se doleva.
- Pokud nenajdeš 0 (uklid'):
  - ▶ vpravo: přepiš všechny 1 na B.
  - ▶ vlevo:  $m < n$ : přepiš všechny 1 a 0 na B, nech pásku prázdnou.



# Rekurzivní jazyky

## Definice 7.6: TM zastaví

TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu  $q$ , s čteným symbolem  $X$ , a není instrukce pro tuto konfiguraci, t.j.,  $\delta(q, X)$  není definováno.

- Předpokládáme, že v přijímajícím stavu  $q \in F$  TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

Paralela:

- Místo 'zastavit a nepřijmout' můžeme spustit nekonečnou smyčku výpočtu.
- Pak otázka **náležení slova do jazyka** odpovídá otázce **zastavení Turingova stroje**

## Definice 7.7: Rekurzivní jazyky

Říkáme, že TM  $M$  **rozhoduje jazyk**  $L$ , pokud  $L = L(M)$  a pro každé  $w \in \Sigma^*$  stroj nad  $w$  zastaví.

Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

# Paměť v řídicí jednotce, Pomocná stopa

## Příklad 7.7 (Příklad paměti ve stavu TM)

Pro jazyk  $L(M) = (01^* + 10^*)$  si pamatujeme první znak, stav je dvojice (obecně  $n$ -tice).  $M = (\{q_0, q_1\} \times \{0, 1, B\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, [q_0, B], B, \{[q_1, B]\})$

| $\delta$               | 0                  | 1                  | B                  |
|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\rightarrow [q_0, B]$ | $([q_1, 0], 0, R)$ | $([q_1, 1], 1, R)$ |                    |
| $[q_1, 0]$             |                    | $([q_1, 0], 1, R)$ | $([q_1, B], B, R)$ |
| $[q_1, 1]$             | $([q_1, 1], 0, R)$ |                    | $([q_1, B], B, R)$ |
| $*[q_1, B]$            |                    |                    |                    |

## Příklad 7.8 (Příprava pomocné stopy)

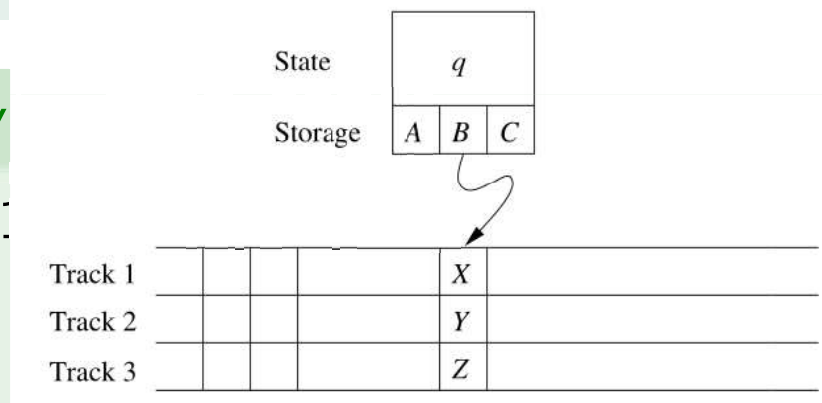
Budeme potřebovat dvě stopy na pásce. Přepíšeme vstup na dvojice, nahoře budeme mít volno na poznámky. V definici  $\delta$  používám zástupný znak pro vstupní písmeno  $a \in \{0, 1\}$ .

- $\delta([q_0, B], a) = ([q_0, B], [B, a], R)$
- $\delta([q_0, B], B) = ([q_{-1}, B], [B, B], L)$  jsem na konci, otáčím
- $\delta([q_{-1}, B], [B, a]) = ([q_{-1}, B], [B, a], L)$  jdi vlevo
- $\delta([q_{-1}, B], B) = ([q_1, B], B, R)$  dvě stopy připraveny pro další práci.

# Více stop na pásce využívá následující příklad

## Příklad 7.9 (TM pro jazyk $L_{wcw} = \{wcw\}$ )

- $M = (\{q_1, \dots, q_9\} \times \{0, 1, B\}, \{[B, 0], [B, 1], [B, B], [0, 1, B, c]\}, \delta, [q_1, B], [B, B], \{[q_9, B]\})$
- $\delta$  je definováno ( $a, b \in \{0, 1\}$ ):
  - ▶  $\delta([q_1, B], [B, a]) = ([q_2, a], [*, a], R)$  načti symbol  $a$
  - ▶  $\delta([q_2, a], [B, b]) = ([q_2, a], [B, b], R)$  jdi vpravo, hledej střed  $c$ ,
  - ▶  $\delta([q_2, a], [B, c]) = ([q_3, a], [B, c], R)$  pokračuj vpravo ve stavu  $q_3$ ,
  - ▶  $\delta([q_3, a], [*, b]) = ([q_3, a], [*, b], R)$  pokračuj vpravo,
  - ▶  $\delta([q_3, a], [B, a]) = ([q_4, B], [*, a], L)$  zkontroluj shodu, vymaž paměť a jdi vlevo,
  - ▶  $\delta([q_4, B], [*, a]) = ([q_4, B], [*, a], L)$  jdi vlevo,
  - ▶  $\delta([q_4, B], [B, c]) = ([q_5, B], [B, c], L)$   $c$  pokračuj za střed ve stavu  $q_5$ ,
- rozeskok podle toho, jestli je ještě co kontrolovat
  - ▶  $\delta([q_5, B], [B, a]) = ([q_6, B], [B, a], L)$  ještě budeme kontolovat,
  - ▶  $\delta([q_6, B], [B, a]) = ([q_6, B], [B, a], L)$  jdi vlevo,
  - ▶  $\delta([q_6, B], [*, a]) = ([q_1, B], [*, a], R)$  znovu začni,
  - ▶  $\delta([q_5, B], [*, a]) = ([q_7, B], [*, a], R)$  už vše vlevo od  $c$  porovnáno, jdi vpravo,
  - ▶  $\delta([q_7, B], [B, c]) = ([q_8, B], [B, c], R)$  pokračuj vpravo,
  - ▶  $\delta([q_8, B], [*, a]) = ([q_8, B], [*, a], R)$  pokračuj vpravo,
  - ▶  $\delta([q_8, B], [B, B]) = ([q_9, B], [B, B], R)$  přijmi.



# Vícepáskový TM má pro každou pásku vlastní hlavu

## Definice 7.8: Vícepáskový Turingův stroj

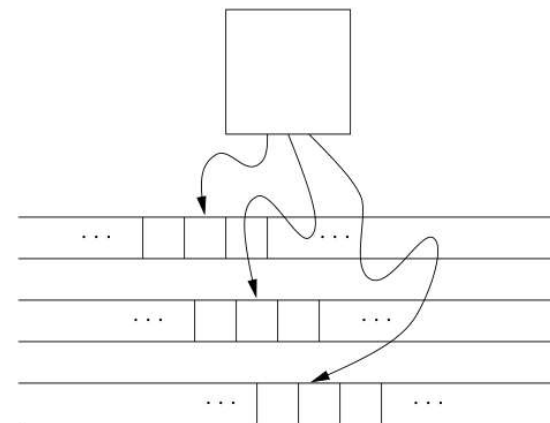
Počáteční pozice

- vstup na první pásce, ostatní zcela prázdné
- první hlava vlevo od vstupu, ostatní libovolně
- hlava v počátečním stavu

Jeden krok vícepáskového TM

- hlava přejde do nového stavu
- na každé pásce napíšeme nový symbol
- každá hlava se nezávisle posune vlevo, zůstane, vpravo.

Vícepáskový TM



## Věta 7.1: Vícepáskový TM

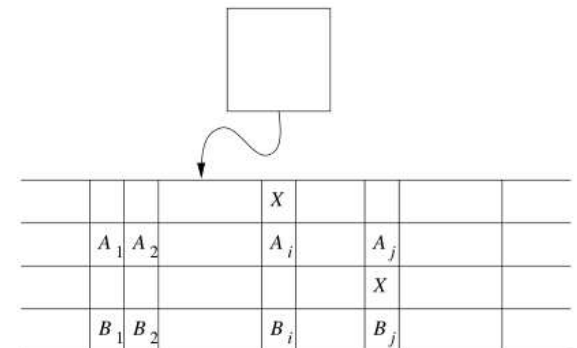
Každý jazyk přijímaný vícepáskovým TM je přijímaný i nějakým (jednopáskovým) Turingovým strojem TM.

## Důkaz: vícepáskový TM

- konstruujeme Turingův stroj  $M$
- pásku si představíme, že má  $2k$  stop
  - ▶ liché stopy: pozice  $k$ -té hlavy
  - ▶ sudé stopy: znak na  $k$ -té pásce
- pro simulaci jednoho kroku navštívíme všechny hlavy
- ve stavu si pamatujeme
  - ▶ počet hlav vlevo
  - ▶  $\forall k$  symbol pod  $k$ -tou hlavou
- pak už umíme provést jeden krok (znovu běžat)



Simulace 2-páskového TM na jedné pásce



- Simulaci výpočtu  $k$ -páskového stroje o  $n$  krocích lze provést v čase  $O(n^2)$  (simulace jednoho kroku z prvních  $n$  trvá  $4n + 2k$ , hlavy nejvýš  $2n$  daleko, přečíst, zapsat, posunout značky).

# Nedeterministické Turingovy stroje

## Definice 7.9: Nedeterministický TM

**Nedeterministickým Turingovým strojem** nazýváme sedmici  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ , kde  $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, B, F$  jsou jako u TM a  $\delta : (Q - F) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$ . Slovo  $w \in \Sigma^*$  **je přijímáno nedeterministickým TM**  $M$ , pokud existuje nějaký výpočet  $q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$ ,  $p \in F$ .

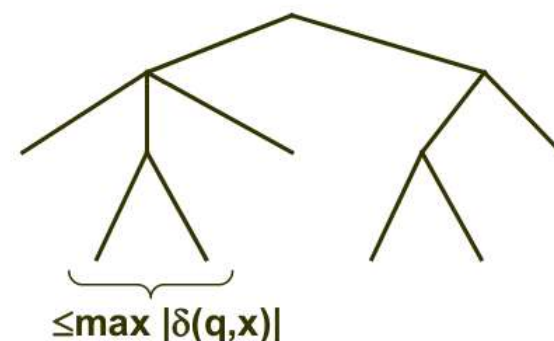
## Věta 7.2: Nedeterministický TM

Pro každý  $M_N$  nedeterministický TM existuje deterministický TM  $M_D$  takový, že  $L(M_N) = L(M_D)$ .

### Velmi stručně (příprava)

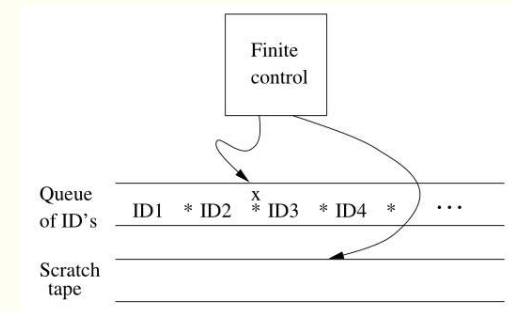
prohledáváme do šířky možné výpočty  $M_N$

- ▶ odvozeno v  $k$  krocích
- ▶ maximálně  $m^k$  konfigurací
  - ★ kde  $m = \max |\delta(q, x)|$  je max. počet voleb  $M_N$



## Důkaz: idea důkazu

- páska nekonečná – nelze použít podmnožinovou konstrukci
- prohledáváme do šířky všechny výpočty  $M_N$
- modelujeme TM se dvěma páskami
  - ▶ první páska: posloupnost konfigurací
    - ★ aktuální označena (křížkem na obrázku)
    - ★ vlevo už prozkoumané, můžeme zapomenout
    - ★ vpravo aktuální a pak další čekající
  - ▶ druhá páska: pomocný výpočet
- zpracování jedné konfigurace obnáší
  - ▶ přečti stav a symbol aktuální konfigurace ID
  - ▶ je-li stav přijímající  $\in F$ , přijmi a skonči
  - ▶ napiš konfiguraci ID na pomocnou pásku
  - ▶ pro každý možný krok  $\delta$  (uložený v hlavě  $M_D$ )
    - ★ proved' krok a napiš novou ID na konec první pásky
  - ▶ vrať se k označené ID, značku vymaž a posuň o 1 doprava
  - ▶ opakuj



## Věta 7.3: Jednosměrná páska

Pro každý Turingův stroj  $M_2$  existuje Turing. stroj  $M_1$ , který přijímá stejný jazyk a

- $M_1$  nikdy nepíše blank  $B$ ,
- $M_1$  nikdy nejde vlevo od počáteční pozice.

|       |          |          |         |
|-------|----------|----------|---------|
| $X_0$ | $X_1$    | $X_2$    | $\dots$ |
| *     | $X_{-1}$ | $X_{-2}$ | $\dots$ |

### Důkaz:

- Místo  $B$  blank zavedeme nový páskový symbol,  $B_1$ .
  - ▶ Místo každého psaní  $B$  píšeme  $B_1$  a všechny instrukce pro čtení  $B$  zkopírujeme též pro čtení  $B_1$ .
  - ▶ Takto modifikovaný TM nikdy nepíše  $B$  (píše  $B_1$ ).
- Pro jednosměrnou pásku
  - ▶ Nejdřív přepíšeme vstup, aby byl v horní stopě dvoustopé pásky.
  - ▶ Pod nejlevější symbol dáme nový znak  $*$ , abychom věděli, že jsme na levém okraji, a máme přepnout z horní stopy do dolní. Ve stavu ('hlavě') si pamatujeme, jestli čteme horní stopu ('normálně') nebo spodní stopu (kde  $L$  znamená doprava a  $R$  doleva). Pokud vidíme  $*$ , odpovídající instrukce přepíšeme na změnu stopy (zhora vlevo přepnu na dolů, pokud jsem dole přešla na " $*$ ", mám

- **Turingův stroj**: nekonečná oboustranná páska, může číst, psát, pohybovat hlavou.
- **Přijímání TM**: TM přijímá pokud vstoupí do koncového stavu.  
TM s výstupem: Hlava na prvním písmenu odpovědi, kromě odpovědi B.
- **Rekurzivně spočetné jazyky (RE)**: jazyky přijímané nějakým Turingovým strojem.
- **Konfigurace TM**: Všechny symboly pásky mezi nejlevějším a nejpravějším ne-B. Stav a pozice hlavy hned vlevo od právě čteného symbolu.
- modelovací triky
  - ▶ **Paměť v řídicí jednotce**
  - ▶ **Více stop**
- Rozšíření TM bez rozšíření třídy přijímaných jazyků:
  - ▶ **Vícepáskové TM** Samostatný pohyb hlav na páskách (lze simulovat na přidaných stopách).
  - ▶ **Nedeterministický TM**: Má instrukce na výběr, na přijetí stačí jeden přijímající výpočet.
  - ▶ TM s **Jednostrannou páskou nikdy nepíšící B** se bude hodit v dalších kapitolách. Dokáže simulovat libovolný TM.
- Už se neučí: **Lineárně omezené automaty LBA**
  - ▶ Turingovy stroje, kde je vstupní slovo mezi levou a pravou značkou, hlava nesmí za tyto značky ani je přepsat.