

Cvičení - Automaty a gramatiky (1.4. a 2.4.2026)

Témy:

- Chomského hierarchie:
 - Regulární gramatiky - pravidla typu $A \rightarrow wB$ nebo $A \rightarrow w$ kde $A \in V, w \in T^*$
 - Bezkontextové gramatiky - pravidla typu $A \rightarrow \omega$ kde $A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$
 - Kontextové gramatiky - pravidla typu $\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$ kde $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ a $\omega \in (V \cup T)^+$, ale dovolíme pravidlo $S \rightarrow \epsilon$, pak ale S nesmí být na pravé straně žádného pravidla
 - Obecné gramatiky - pravidla typu $\alpha \rightarrow \beta$ kde $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$
- Chomského normální forma ($A \rightarrow BC$ a $A \rightarrow a$; $A, B, C \in V; a \in T$) - redukce CFG:
 - Eliminace ϵ -pravidel
 - Eliminace jednotkových pravidel $A \rightarrow B$ kde $A, B \in V$
 - Eliminace zbytečných symbolů (nejprve negenerujících, pak nedosažitelné)
 - Vytvoř nové neterminály pro každý terminál a přidej příslušná pravidla. ($X_a \rightarrow a$); $X_a \in V; a \in T$
 - Rekurzivně nahraď dlouhá pravidla $A \rightarrow A_1 A_2 A_3$ za $A \rightarrow A_1 B_{23}$ a $B_{23} \rightarrow A_2 A_3$
- Zásobníkové automaty

Úkoly:

- Následující bezkontextovou gramatiku převedte na redukovanou gramatiku bez ϵ pravidel a jednotkových pravidel, která generuje stejný jazyk až na řetězec ϵ .

$$(a) G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, c\}, S, P), \text{ kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aACa \\ A \rightarrow a|B \\ B \rightarrow C|c \\ C \rightarrow cC|\epsilon \end{array} \right\},$$

$$(b) G_4 = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1, 2\}, S, P), \text{ kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow ABSC|\epsilon \\ A \rightarrow 1A0|\epsilon \\ B \rightarrow 1B00|\epsilon \\ C \rightarrow 2C|S \end{array} \right\},$$

- Následující bezkontextovou gramatiku převedte do Chomského normální formy.

$$G_5 = (\{S, E, F\}, \{(\cdot), *, +, a\}, S, P), \text{ kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow (E) \\ E \rightarrow F + F|F * F \\ F \rightarrow S|a \end{array} \right\}.$$

- Uvažujeme bezkontextovou gramatiku G_6 . Gramatiku převedte na ChNF $G_6 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$,

$$\text{kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow CA|CB \\ B \rightarrow CBA|CB|BA|BB \\ C \rightarrow ABC|BC \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \\ C \rightarrow c \end{array} \right\}.$$

- Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky (nebo zdůvodněte, proč neexistuje):

$$(a) L_1 = \{w2w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

$$(b) L_2 = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

$$(c) L_3 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \& |w|_0 = |w|_1\}$$

$$(d) L_4 = \{u2v \mid u, v \in \{0, 1\}^* \& |u| \neq |v|\}$$

$$(e) L_i = \{u2v \mid u, v \in \{0, 1\}^* \& u[i] \neq v[i]\}$$

$$(f) L_5 = \{u2v^R \mid u, v \in \{0, 1\}^* \& u \neq v\}$$

$$(g) L_6 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$(h) L_7 = \{a^i b^j c^{i*j} \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\}.$$

- Uvažujeme $G = (\{E, T, F\}, \{(\cdot), *, +, \cdot, 1\}, E, P)$, kde $P = \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow E + T|T \\ T \rightarrow T * F|F \\ F \rightarrow 1|(E)|\epsilon \end{array} \right\}.$

Navrhněte zásobníkový automat, který přijímá jazyk generovaný gramatikou G .

- Definujeme operaci slévání $\sqcup$ jako slévání dvou pruhů na dálnici - ne nutně jedno a jedno auto, libovolné množství aut z pruhu za sebou, tj.

$$aab \sqcup cc = \{ccaab, cacab, caacb, caabc, accab, acacb, acabc, aacbc, aabcc\}.$$

Pořadí v rámci pruhů zůstává zachováno. Pro jazyky definujeme

$$L_1 \sqcup L_2 = \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} (u \sqcup v).$$

$$(a) \text{ Určete } L_1 \sqcup L_2 \text{ pro } L_1 = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ a } L_2 = \{c^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

$$(b) \text{ Dokažte, že je jazyk } L_1 \sqcup L_2 \text{ bezkontextový.}$$

$$(c) \text{ Je jazyk } L_1 \sqcup L_2 \text{ bezkontextový pro } L_1 \text{ regulární a } L_2 \text{ bezkontextový?}$$

Cvičení - Automaty a gramatiky (1.4. a 2.4.2026)

Témy:

- Chomského hierarchie:
 - Regulární gramatiky - pravidla typu $A \rightarrow wB$ nebo $A \rightarrow w$ kde $A \in V, w \in T^*$
 - Bezkontextové gramatiky - pravidla typu $A \rightarrow \omega$ kde $A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$
 - Kontextové gramatiky - pravidla typu $\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$ kde $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ a $\omega \in (V \cup T)^+$, ale dovolíme pravidlo $S \rightarrow \epsilon$, pak ale S nesmí být na pravé straně žádného pravidla
 - Obecné gramatiky - pravidla typu $\alpha \rightarrow \beta$ kde $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$
- Chomského normální forma ($A \rightarrow BC$ a $A \rightarrow a$; $A, B, C \in V; a \in T$) - redukce CFG:
 - Eliminace ϵ -pravidel
 - Eliminace jednotkových pravidel $A \rightarrow B$ kde $A, B \in V$
 - Eliminace zbytečných symbolů (nejprve negenerujících, pak nedosažitelné)
 - Vytvoř nové neterminály pro každý terminál a přidej příslušná pravidla. ($X_a \rightarrow a$); $X_a \in V; a \in T$
 - Rekurzivně nahraď dlouhá pravidla $A \rightarrow A_1 A_2 A_3$ za $A \rightarrow A_1 B_{23}$ a $B_{23} \rightarrow A_2 A_3$
- Zásobníkové automaty

Úkoly:

- Následující bezkontextovou gramatiku převedte na redukovanou gramatiku bez ϵ pravidel a jednotkových pravidel, která generuje stejný jazyk až na řetězec ϵ .

$$(a) G_2 = (\{S, A, B, C\}, \{a, c\}, S, P), \text{ kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aACa \\ A \rightarrow a|B \\ B \rightarrow C|c \\ C \rightarrow cC|\epsilon \end{array} \right\},$$

$$(b) G_4 = (\{S, A, B, C\}, \{0, 1, 2\}, S, P), \text{ kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow ABSC|\epsilon \\ A \rightarrow 1A0|\epsilon \\ B \rightarrow 1B00|\epsilon \\ C \rightarrow 2C|S \end{array} \right\},$$

- Následující bezkontextovou gramatiku převedte do Chomského normální formy.

$$G_5 = (\{S, E, F\}, \{(\cdot), *, +, a\}, S, P), \text{ kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow (E) \\ E \rightarrow F + F|F * F \\ F \rightarrow S|a \end{array} \right\}.$$

- Uvažujeme bezkontextovou gramatiku G_6 . Gramatiku převedte na ChNF $G_6 = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, S, P)$,

$$\text{kde } P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow CA|CB \\ B \rightarrow CBA|CB|BA|BB \\ C \rightarrow ABC|BC \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \\ C \rightarrow c \end{array} \right\}.$$

- Navrhněte zásobníkové automaty pro následující jazyky (nebo zdůvodněte, proč neexistuje):

$$(a) L_1 = \{w2w^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

$$(b) L_2 = \{ww^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$$

$$(c) L_3 = \{w \mid w \in \{0, 1\}^* \& |w|_0 = |w|_1\}$$

$$(d) L_4 = \{u2v \mid u, v \in \{0, 1\}^* \& |u| \neq |v|\}$$

$$(e) L_i = \{u2v \mid u, v \in \{0, 1\}^* \& u[i] \neq v[i]\}$$

$$(f) L_5 = \{u2v^R \mid u, v \in \{0, 1\}^* \& u \neq v\}$$

$$(g) L_6 = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$(h) L_7 = \{a^i b^j c^{i*j} \mid i, j = 0, 1, 2, \dots\}.$$

- Uvažujeme $G = (\{E, T, F\}, \{(\cdot), *, +, \cdot, 1\}, E, P)$, kde $P = \left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow E + T|T \\ T \rightarrow T * F|F \\ F \rightarrow 1|(E)|\epsilon \end{array} \right\}.$

Navrhněte zásobníkový automat, který přijímá jazyk generovaný gramatikou G .

- Definujeme operaci slévání $\sqcup$ jako slévání dvou pruhů na dálnici - ne nutně jedno a jedno auto, libovolné množství aut z pruhu za sebou, tj.

$$aab \sqcup cc = \{ccaab, cacab, caacb, caabc, accab, acacb, acabc, aacbc, aabcc\}.$$

Pořadí v rámci pruhů zůstává zachováno. Pro jazyky definujeme

$$L_1 \sqcup L_2 = \bigcup_{u \in L_1, v \in L_2} (u \sqcup v).$$

$$(a) \text{ Určete } L_1 \sqcup L_2 \text{ pro } L_1 = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \text{ a } L_2 = \{c^k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

$$(b) \text{ Dokažte, že je jazyk } L_1 \sqcup L_2 \text{ bezkontextový.}$$

$$(c) \text{ Je jazyk } L_1 \sqcup L_2 \text{ bezkontextový pro } L_1 \text{ regulární a } L_2 \text{ bezkontextový?}$$