

Deterministické PDA, Uzávěrové vlastnosti, Dykovy jazyky

Marta Vomlelová

MS 303

Deterministický zásobníkový automat (DPDA)

Definition 1.51 (Deterministický zásobníkový automat (DPDA))

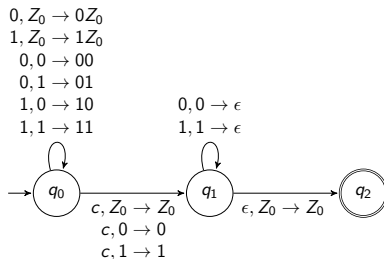
Zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je **deterministický** PDA právě když platí zároveň:

- $\delta(q, a, X)$ je nejvýše jednoprvková $\forall (q, a, X) \in Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma$.
- Je-li $\delta(q, a, X)$ neprázdná pro nějaké $a \in \Sigma$, pak $\delta(q, \epsilon, X)$ musí být prázdná.

Druhá podmínka zaručuje, že nebude volba mezi ϵ přechodem a čtením vstupního symbolu.

Example 1.78 (Det. PDA pro L_{wcr})

- Jazyk L_{wcr} palindromů je bezkontextový, ale nemá přijímající deterministický zásobníkový automat.
- Vložením středové značky c do $L_{wcr} = \{wcw^R \mid w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\}$ dostaneme jazyk rozpoznatelný DPDA.



Regulární jazyky, DPDA's

$$RL \subsetneq L_{DPDA} \subsetneq L_{PDA} = CFL = N_{PDA} \supsetneq N_{DPDA}.$$

Theorem 1.20

Nechť L je regulární jazyk, pak $L = L(P)$ pro nějaký DPDA P .

Proof.

DPDA může simulovat deterministický konečný automat a ignorovat zásobník. (nechat tam Z_0). □

Lemma

Jazyk L_{w_cwr} je přijímaný DPDA ale není regulární.

Důkaz neregularity z pumping lemmatu na slovo $0^n c 0^n$.

Example 1.79

Jazyk $L_{abb} = \{a^i b^i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^{2i} | i \in \mathbb{N}\}$ je bezkontextový, ale není přijímaný žádným deterministickým zásobníkovým automatem.

Proof.

- SPOREM: Předokládejme, že existuje deterministický PDA M přijímající jazyk L_{abb} .
- Vytvořme dvě kopie, M_1 a M_2 , odpovídající si uzly budeme nazývat sourozenci.
- Zkonstruujeme nový automat:
 - ▶ Počátečním stavem bude počáteční stav M_1
 - ▶ koncovými stavy budou koncové stavy M_2
 - ▶ přechody z koncových stavů M_1 $\delta(p, b, X) = (q, \gamma)$
 - ★ přesměrujeme do sourozenců q v M_2 a přejmenujeme b na c
 - ▶ v automatu M_2 hrany označené b přeznačíme na c .
- Výsledný automat přijímá $\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$ protože
 - ▶ M je deterministický, nemá jinou cestu, tj. i ve slově $a^i b^{2i}$ musel jít začátek stejně a pak číst b^i , nyní c^i ,
- o $\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$ víme, že není bezkontextový, tj. deterministický M nemůže existovat.



Bezprefixové jazyky

Definition 1.52 (bezprefixové jazyky)

Říkáme, že jazyk $L \subset \Sigma^*$ je **bezprefixový** pokud neexistují slova $u, v \in L$ a $z \in \Sigma^+$ tak, že $u = vz$. Tj. pro žádná slova jazyka $u \neq v$ není v **prefix** u .

Example 1.80

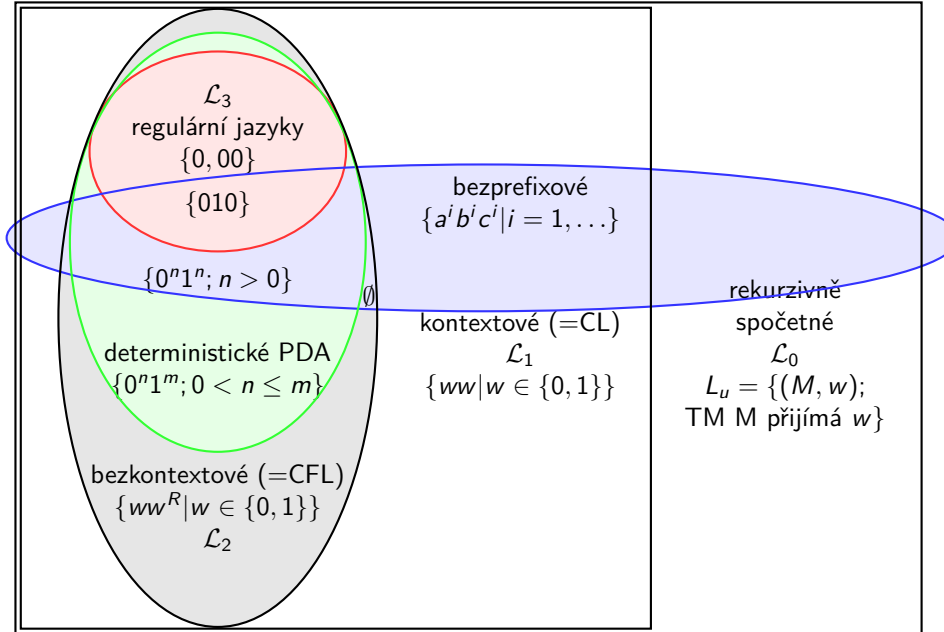
- Jazyk L_{wcwr} je bezprefixový.
- Jazyk $L = \{0\}^*$ není bezprefixový.

Theorem 1.21 ($L \in N(P_{DPDA})$ iff L bezprefixový a $L \in L(P'_{DPDA})$)

Jazyk L je $N(P)$ pro nějaký DPDA P právě když L je bezprefixový a L je $L(P')$ pro nějaký DPDA P' .

Proof.

- $\Rightarrow$ Prefix přijmeme prázdným zásobníkem, pro prázdný zásobník neexistuje instrukce, tj. žádné prodloužení není v $N(P)$.
- $\Leftarrow$ Převod P^I na P nepřidá nedeterminismus (první koncový $\rightarrow$ smaž hrany z něj, přijmi).



$L_d = \{w; \text{TM s kódem } w \text{ nepřijímá vstup } w\}$

Uzávěrové vlastnosti

Theorem 1.22 (CFL uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iteraci, reverzi)

CFL jsou uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iteraci (*), pozitivní iteraci (+), zrcadlový obraz w^R .

Proof:

- Sjednocení:
 - ▶ pokud $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ přejmenujeme neterminály,
 - ▶ přidáme nový symbol S_{new} a pravidlo $S_{new} \rightarrow S_1 | S_2$
- zřetězení (=konkatenace) $L_1.L_2$
 $S_{new} \rightarrow S_1 S_2$ (pro $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, jinak přejmenujeme)
- iterace $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$
 $S_{new} \rightarrow SS_{new} | \epsilon$
- pozitivní iterace $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$
 $S_{new} \rightarrow SS_{new} | S$
- zrcadlový obraz $L^R = \{w^R | w \in L\}$

$X \rightarrow \omega^R$ obrátíme pravou stranu pravidel.

Průnik bezkontextových jazyků

Example 1.81 (!CFL nejsou uzavřené na průnik)

- Jazyk $L = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 1\} = \{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \cap \{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\}$ není CFL, i když oba členy průniku jsou bezkontextové, dokonce deterministické bezkontextové.
 $\{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \quad \{S \rightarrow AC, A \rightarrow 0A1|01, C \rightarrow 2C|2\}$
 $\{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\} \quad \{S \rightarrow AB, A \rightarrow 0A|0, B \rightarrow 1B2|12\}$
- průnik není CFL z pumping lemmatu.

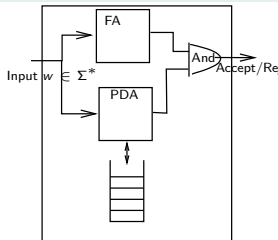
paralelní běh dvou zásobníkových automatů

- řídící jednotky umíme spojit (viz konečné automaty)
 - čtení umíme spojit (jeden automat může čekat)
 - bohužel dva zásobníky nelze obecně spojit do jednoho
- dva neomezené zásobníky = Turingův stroj
 = rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$

Průnik bezkontextového a regulárního jazyka

Theorem 1.23 (CFL i DCFL jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem)

- Mějme L bezkontextový jazyk a R regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je bezkontextový jazyk.
- Mějme L deterministický CFL a R regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je deterministický CFL.



Proof:

- zásobníkový a konečný automat můžeme spojit
 - ▶ FA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$
 - ▶ PDA přijímání stavem $M_1 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$
- nový automat $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_1, q_2), Z_0, F_1 \times F_2)$
 - ▶ $((r, s), \alpha) \in \delta((p, q), a, Z)$ právě když
 - $a \neq \epsilon$: $r = \delta_1(p, a) \& (s, \alpha) \in \delta_2(q, a, Z)$... automaty čtou vstup
 - $a = \epsilon$: $(s, \alpha) \in \delta_2(q, \epsilon, Z)$ PDA mění zásobník
 - $r = p$ FA stojí
- zřejmě $L(M) = L(A_1) \cap L(M_2)$
 - ▶ paralelní běh automatů

Substitute a homomorfizmus

- Opakování definice:

Definition ((5.1,5.2) substitute, homomorfizmus, inverzní homomorfizmus)

Mějme jazyk L nad abecedou Σ .

Substitute σ ; $\forall a \in \Sigma : \sigma(a) = L_a$ jazyk abecedy Σ_a , tj. $\sigma(a) \subseteq \Sigma_a^*$
převádí slova na jazyky:

- $\sigma(\epsilon) = \{\epsilon\}$,
- $\sigma(a_1 \dots a_n) = \sigma(a_1) \dots \sigma(a_n)$ (konkatenace), tj. $\sigma : \Sigma^* \rightarrow P((\bigcup_{a \in \Sigma} \Sigma_a)^*)$
- $\sigma(L) = \bigcup_{w \in L} \sigma(w)$.

homomorfizmus h , $\forall a \in \Sigma : h(a) \in \Sigma_a^*$

převádí slova na slova

- $h(\epsilon) = \epsilon$,
- $h(a_1 \dots a_n) = h(a_1) \dots h(a_n)$ (konkatenace) tj. $h : \Sigma^* \rightarrow (\bigcup_{a \in \Sigma} \Sigma_a)^*$
- $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

Inverzní homomorfizmus převádí slova zpět

- $h^{-1}(L) = \{w \mid h(w) \in L\}$.

Příklad: Substitute

Example 1.82

Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, (,)\}, \{E \rightarrow E + E | (E) | a\}, E)$. Mějme substituci:

- $\sigma(a) = L(G_a)$, $G_a = (\{I\}, \{a, b, 0, 1\}, \{I \rightarrow I0 | I1 | Ia | Ib | a | b\}, I)$,
- $\sigma(+)= \{-, *, :, div, mod\}$,
- $\sigma(()= \{ \{ \{,$
- $\sigma()) = \{ \} \}$.

- $(a + a) + a \in L(G)$
- v $\sigma(+)$ chybí $+$ pro ukázkou, že $(a + a) + a \notin \sigma(L(G))$.
- $(a001 - bba) * b1 \in \sigma((a + a) + a) \subset \sigma(L(G))$

Co se stane, když změníme definici:

- $\sigma(()= \{ (, [,$
- $\sigma()) = \{),] \}$?

Příklad: Homomorfizmus

Example 1.83

Mějme gramatiku

$G = (\{E\}, \{a, +, [,]\}, \{E \rightarrow E + E \mid [E]a\}, E)$. Mějme homomorfizmus:

- $h(a) = \epsilon$
 - $h(+)= \epsilon$,
 - $h([)= left$,
 - $h(]) = right$.
-
- $h([a + a] + a) = leftright$,
 - $h^{-1}(leftright) \ni [a + +]a$.

Example 1.84

Mějme gramatiku

$G = (\{E\}, \{a, +, [,]\}, \{E \rightarrow a + E \mid [E]a\}, E)$. Mějme homomorfizmus:

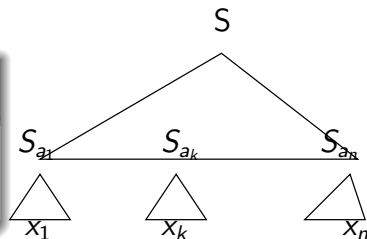
- $h_2(a) = a$
- $h_2(+)= +$,
- $h_2([)= \epsilon$,
- $h_2(]) = \epsilon$.

- 1 Je jazyk $L(G)$ regulární?
- 2 Je jazyk $h(L(G))$ regulární?
- 3 Je jazyk $h^{-1}(h(L(G)))$ regulární?
- 4 Je $h^{-1}(h(L(G))) = L(G)$?

Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

Theorem 1.24 (CFL jsou uzavřené na substituci)

Mějme CFL jazyk L nad Σ a substituci σ na Σ takovou, že $\sigma(a)$ je CFL pro každé $a \in \Sigma$. Pak je i $\sigma(L)$ bezkontextový (CFL).



Proof:

- Idea: listy v derivačním stromu generují další stromy.
- Přejmenujeme neterminály na jednoznačné všude v $G = (V, \Sigma, P, S)$, $G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a)$, $a \in \Sigma$.
- Vytvoříme novou gramatiku $G' = (V', T', P', S)$ pro $\sigma(L)$:
 - ▶ $V' = V \cup \bigcup_{a \in \Sigma} V_a$
 - ▶ $T' = \bigcup_{a \in \Sigma} T_a$
 - ▶ $P' = \bigcup_{a \in \Sigma} P_a \cup \{p \in P \text{ kde všechna } a \in \Sigma \text{ nahradíme } S_a\}$.

G' generuje jazyk $\sigma(L)$. □

Substitute bezkontextových jazyků

Example 1.85 (substitute)

$$\begin{aligned} L &= \{a^i b^j \mid 0 \leq i \leq j\} & S &\rightarrow aSb \mid Sb \mid \epsilon \\ \sigma(a) &= L_1 = \{c^i d^i \mid i \geq 0\} & S_1 &\rightarrow cS_1 d \mid \epsilon \\ \sigma(b) &= L_2 = \{c^i \mid i \geq 0\} & S_2 &\rightarrow cS_2 \mid \epsilon \\ \sigma(L): & & S &\rightarrow S_1 S_2 \mid S S_2 \mid \epsilon, S_1 \rightarrow cS_1 d \mid \epsilon, S_2 \rightarrow cS_2 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Theorem 1.25 (homomorfismus)

Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na homomorfizmus.

Proof:

- Přímý důsledek předchozí věty.
- Terminál a v derivačním stromě nahradím slovem $h(a)$. □

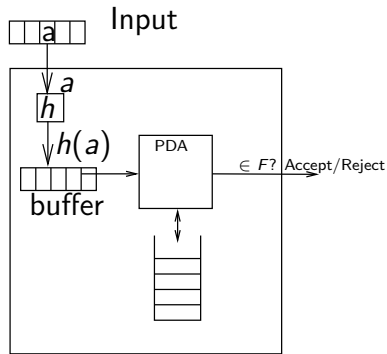
CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfismus

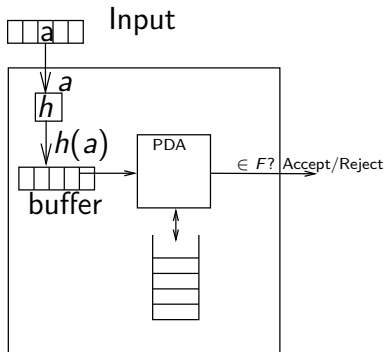
Theorem 1.26 (CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfismus)

Mějme CFL jazyk L a homomorfismus h . Pak $h^{-1}(L)$ je bezkontextový jazyk. Je-li L deterministický CFL, je i $h^{-1}(L)$ deterministický CFL.

Idea

- přečteme písmeno a a do vnitřního bufferu dáme $h(a)$
- simulujeme výpočet M , kdy vstup bereme z bufferu
- po vyprázdnění bufferu načteme další písmeno ze vstupu
- slovo je přijato, když je buffer prázdný a M je v koncovém stavu
- ! buffer je konečný, můžeme ho tedy modelovat ve stavu





Proof:

- pro L máme PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (koncovým stavem)

- $h : T \rightarrow \Sigma^*$

- definujeme PDA $M' = (Q', T, \Gamma, \delta', [q_0, \epsilon], Z_0, F \times \{\epsilon\})$ kde

$Q' = \{[q, u] \mid q \in Q, u \in \Sigma^*, \exists(a \in T) \exists(v \in \Sigma^*) h(a) = vu\}$ u je buffer
 $\delta'([q, \epsilon], a, Z) = \{([q, h(a)], Z)\}$ $h(a)$ naplňuje buffer

$\delta'([q, u], \epsilon, Z) = \{([p, u], \gamma) \mid (p, \gamma) \in \delta(q, \epsilon, Z)\}$
 $\cup \{([p, v], \gamma) \mid (p, \gamma) \in \delta(q, x, Z), u = xv\}$ $x \in \Sigma$ čte buffer, $x \in \Sigma$

Pro deterministický PDA M je i M' deterministický. $\square$

Použití uzavřenosti průniku CFL a RL

Example 1.86

Jazyk $L = \{0^i 1^j 2^k 3^l \mid i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový.

Proof: Důkaz sporem:

- Nechť L je bezkontextový jazyk
- $L_1 = \{0^i 1^j 2^k 3^l \mid j, k, l \geq 0\}$ je regulární jazyk
 - ▶ $\{S \rightarrow 0B, B \rightarrow 1B \mid C, C \rightarrow 2C \mid D, D \rightarrow 3D \mid \epsilon\}$
- $L \cap L_1 = \{0^i 1^i 2^i 3^i \mid i \geq 0\}$ není bezkontextový $\Rightarrow$ SPOR s uzavřeností na průnik s regulárním jazykem. □

L je kontextový jazyk

$S \rightarrow \epsilon \mid 0 \mid 0A \mid B_1 \mid C_1 \mid D_1$

$B_1 \rightarrow 1 \mid 1B_1 \mid C_1, C_1 \rightarrow 2 \mid 2C_1 \mid D_1, D_1 \rightarrow 3 \mid 3D_1$

$A \rightarrow 0 \mid 0A \mid P$

$P \rightarrow 1PCD \mid 1CD$

$DC \rightarrow CD$ přepíšeme $\{DC \rightarrow XC, XC \rightarrow XY, XY \rightarrow CY, CY \rightarrow CD\}$

$1C \rightarrow 12, 2C \rightarrow 22, 2D \rightarrow 23, 3D \rightarrow 33.$

Rozdíl a doplněk

Theorem 1.27 (Odečtení regulárního jazyka)

Mějme bezkontextový jazyk L a regulární jazyk R . Pak:

- $L - R$ je CFL.

Proof.

$L - R = L \cap \overline{R}$, $\overline{R}$ je regulární. □

Theorem 1.28 (CFL **nej**sou uzavřené na doplněk ani rozdíl)

Třída bezkontextových jazyků není uzavřená na doplněk ani na rozdíl.

CFL **nej**sou uzavřené na doplněk ani rozdíl.

Mějme bezkontextové jazyky L, L_1, L_2 , regulární jazyk R . Pak:

- $\overline{L}$ nemusí být CFL.
 - $L_1 - L_2$ nemusí být CFL.
- $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.
 $\Sigma^* - L$ není vždy CFL.

□

Uzávěrové vlastnosti deterministických CFL

- Rozumné programovací jazyky jsou deterministické CFL.
- Deterministické bezkontextové jazyky
 - ▶ nejsou uzavřené na průnik
 - ▶ jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem
 - ▶ jsou uzavřené na inverzní homomorfismus.

Lemma

Doplňěk deterministického CFL je opět deterministický CFL.

Proof:

- idea: prohodíme koncové a nekoncové stavy
- nedefinované kroky ošetříme 'podložkou' na zásobníku
- cyklus odhalíme pomocí čítače
- až po přečtení slova prochází koncové a nekoncové stavy stačí si pamatovat, zda prošel koncovým stavem.



Neuzavřenost deterministických CFL

Example 1.87 (DCFL nejsou uzavřené na sjednocení)

Jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j \vee j \neq k \vee i \neq k\}$ je CFL, ale není DCFL.

Proof.

Vzhledem k uzavřenosti DCFL na doplněk by byl DCFL i $\overline{L} \cap a^* b^* c^* = \{a^i b^j c^k \mid i = j = k\}$, o kterém víme, že není CFL (pumping lemma) □

Example 1.88 (DCFL nejsou uzavřené na homomorfizmus)

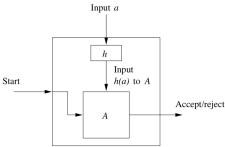
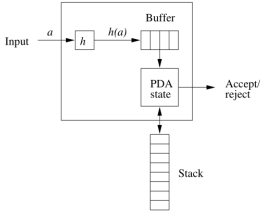
Jazyky $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq j\}$, $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid j \neq k\}$, $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i \neq k\}$ jsou deterministické bezkontextové.

- Jazyk $0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3$ je deterministický bezkontextový
- Jazyk $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ není deterministický bezkontextový
položme $h(0) = \epsilon$, $h(1) = \epsilon$, $h(2) = \epsilon$
 $h(x) = x$ pro ostatní symboly
 - ▶ $h(0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,
 - ▶ doplněk $\overline{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \cap a^* b^* c^* = \{a^i b^j c^k \mid i = j = k\}$.

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	ANO	ANO	NE
průnik	ANO	NE	NE
$\cap$ s RL	ANO	ANO	ANO
doplňěk	ANO	NE	ANO
homomorfizmus	ANO	ANO	NE
inverzní hom.	ANO	ANO	ANO

Uzávěrové vlastnosti v kostce

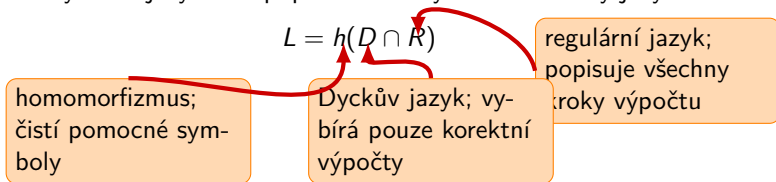
jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	$F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$	$S \rightarrow S_1 S_2$	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
průnik	$F = F_1 \times F_2$	$L = \{0^n 1^n 2^n n \geq 1\} = \left\{ \begin{array}{l} \{0^n 1^n 2^i n, i \geq 1\} \\ \cap \{0^i 1^n 2^n n, i \geq 1\} \end{array} \right\}$	
$\cap$ s RL	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$
doplňěk homom.	$F = Q_1 - F_1, \delta \text{ tot.}$ Kleene + RegExp + uz.	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ $a \text{ nahrad' } S_a$	$F = Q_1 - F_1, Z_0, \text{ cykly, tot.}$ $h(0) = h(1) = 0 \text{ cca. } \cup$
inverzní hom.			

Definition 1.53 (Dyckův jazyk)

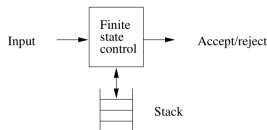
Dyckův jazyk D_n je definován nad abecedou $Z_n = \{a_1, a_1^|, \dots, a_n, a_n^|\}$ následující gramatikou: $S \rightarrow \epsilon | SS^| a_1 S a_1^| \dots | a_n S a_n^|$.

Úvodní pozorování:

- jedná se zřejmě o jazyk bezkontextový
- Dyckův jazyk D_n popisuje správně uzávorkované výrazy s n druhy závorek
- tímto jazykem lze popisovat výpočty libovolného zásobníkového automatu
- pomocí Dyckova jazyka lze popsat libovolný bezkontextový jazyk.



Jak charakterizovat bezkontextové jazyky?



- Pokud do zásobníku pouze přidáváme
potom si stačí pamatovat poslední symbol
- stačí konečná paměť → konečný automat.
- potřebujeme ze zásobníku také odebírat (čtení symbolu)
takový proces nelze zaznamenat v konečné struktuře
- přidávání a odebírání není zcela libovolné
jedná se o zásobník, tj. LIFO (last in, first out) strukturu
- roztáhněme si výpočet se zásobníkem do lineární struktury
 X symbol přidán do zásobníku
 X^{-1} symbol odebrán do zásobníku
- přidávaný a odebíraný symbol tvoří pár $\underbrace{ZZ^{-1}} B \underbrace{AA^{-1} CC^{-1}} B^{-1}$
který se v celé posloupnosti chová jako závorka

Theorem 1.29 (Dyckovy jazyky)

Pro každý bezkontextový jazyk L existuje regulární jazyk R tak, že $L = h(D \cap R)$ pro vhodný Dyckův jazyk D a homomorfismus h .

Proof:

- máme PDA přijímající L prázdným zásobníkem
- převedeme na instrukce tvaru $\delta(q, a, Z) \in (p, w), |w| \leq 2$
 - ▶ delší psaní na zásobník rozdělíme zavedením nových stavů
- nechť $R^|$ obsahuje všechny výrazy
 - ▶ $q^{-1}aa^{-1}Z^{-1}BAp$ pro instrukci $\delta(q, a, Z) \ni (p, AB)$
 - ▶ podobně pro instrukce $\delta(q, a, Z) \in (p, A), \delta(q, a, Z) \in (p, \epsilon)$
 - ▶ je-li $a = \epsilon$, potom dvojici aa^{-1} nezařazujeme
- definujeme R takto: $Z_0q_0(R^|)^*Q^{-1}$
- Dyckův jazyk je definován nad abecedou $\Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup Q \cup Q^{-1} \cup \Gamma \cup \Gamma^{-1}$
- $D \cap Z_0q_0(R^|)^*Q^{-1}$ popisuje korektní výpočty
$$\underbrace{Z_0 q_0 q_0^{-1} aa^{-1} Z_0^{-1}}_{\text{inicializace}} \underbrace{B A pp^{-1} bb^{-1} A^{-1} qq^{-1} cc^{-1} B^{-1} rr^{-1}}_{\text{výpočet}} \underbrace{\quad}_{\text{finalizace}}$$
- homomorfismus h vydělí přečtené slovo, tj.
 - $h(a) = a$ pro vstupní (čtené) symboly
 - $h(y) = \epsilon$ pro ostatní.

□

Uzávěrové vlastnosti v kostce

jazyk	regulární (RL)	bezkontextové	deterministické CFL
sjednocení	$F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$	$S \rightarrow S_1 S_2$	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
průnik	$F = F_1 \times F_2$	$L = \{0^n 1^n 2^n n \geq 1\} = \left\{ \begin{array}{l} \{0^n 1^n 2^i n, i \geq 1\} \\ \cap \{0^i 1^n 2^n n, i \geq 1\} \end{array} \right\}$	
$\cap$ s RL	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$	$F = F_1 \times F_2$
doplňěk homom.	$F = Q_1 - F_1, \delta \text{ tot.}$ Kleene + RegExp + uz.	$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ $a \text{ nahrad' } S_a$	$F = Q_1 - F_1, Z_0, \text{ cykly, tot.}$ $h(0) = h(1) = 0 \text{ cca. } \cup$
inverzní hom.	