# Automaty a gramatiky

TIN071

Marta Vomlelová

March 3, 2025

## Contents

# Zkouška, Literatura

# 1 Úvod, Mihyll-Nerodova věta

**Požadavky ke zkoušce**

- **Zápočet je nutnou podmínkou účasti na zkoušce**.
- Zkouška sestává z písemné přípravy a ústní části.
- **Písemná příprava** bude sestávat ze dvou až tří otázek, které korespondují sylabu přednášky, ověřují schopnosti získané na cvičení a znalost definic, vět a algoritmů z přednášky.

! Po dobu písemné přípravy musí být veškeré přinesené poznámky, přípravy, mobily, počítače apod. uloženy v uzavřeném batohu. V případě opomenutí poznámek na židli, stole, otevřeném batohu apod. je zkouška okamžitě hodnocena 'nevyhověl' a student v ní dále nepokračuje.

- **Požadavky ústní části** Ústní část bude vycházet z písemné přípravy, zpravidla budete dotázáni na vysvětlení-zdůvodnění-příklady k tvrzením v písemné části. Ústní část může být doplněna otázkou v rozsahu sylabu přednášky s písemnou přípravou nesouvisející.

## Zdroje a literatura

- J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley
- M. Sipser: Introduction to the Theory of Computation, Cengage Learning, 2013
- M. Chytil: *Automaty a gramatiky, SNTL Praha, 1984*

⇒ moodle https://dl1.cuni.cz/course/view.php?id=5119

- kde jsou tyto slajdy

⇒ kde je dotazník k textové verzi slajdů

- moodle testy (které ale netestují zdůvodnění a důkazy).

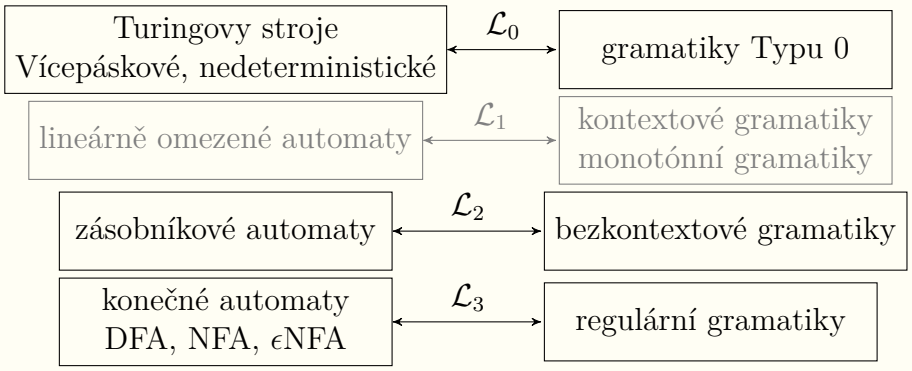
⇒ cvičení.

## 1.1 Cíl přednášky

- Osvojit si abstraktní model výpočetních zařízení,
- vnímat, jak drobné změny v definici vedou k velmi odlišným třídám,
- zažít skutečnost algoritmicky nerozhodnutelných problémů,
- rychlý úvod do složitosti $P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME$.

Obrázek shrnuje výpočetní modely - automaty v levém sloupci, gramatiky v pravém, propojuje je stejná třída přijímaných jazyků. Čím níže, tím jednodušší a přijímající menší třídu jazyků.

Automaty a gramatiky – dva způsoby popisu

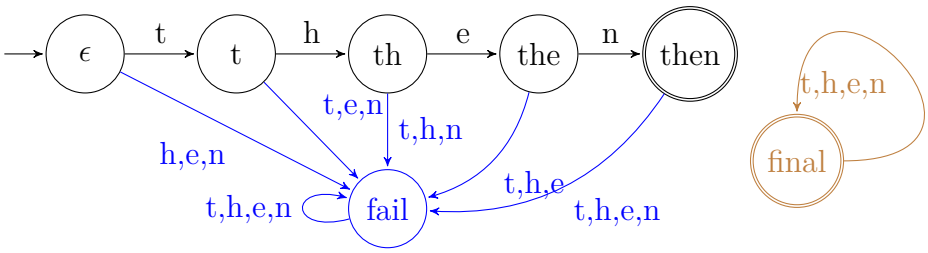



## 1.2 Definice základních pojmů

**Definition 1.1** (Deterministický konečný automat)**. Deterministický konečný automat (DFA)** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme $Q$
2. konečné neprázdné množiny **vstupních symbolů (abecedy)**, značíme $\Sigma$
3. **přechodové funkce**, zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$, značíme $\delta$, která bude reprezentovaná hranami grafu nebo tabulkou
4. **počátečního stavu** $q_0 \in Q$, vede do něj šipka 'odnikud',
5. a **množiny koncových (přijímajících) stavů** (final states) $F \subseteq Q$, označených dvojitým kruhem či šipkou 'ven'.

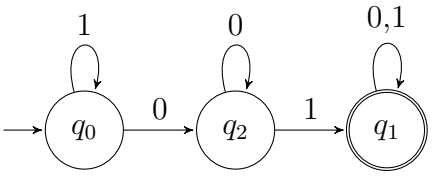
**Úmluva:** Pokud pro některou dvojici stavu a písmene není definovaný přechod, přidáme nový stav $fail$ a přechodovou funkci doplníme na totální přidáním šipek do $fail$.
Pokud je množina $F$ prázdná, a je vyžadovaná neprázdná, přidáme do ní i $Q$ nový stav $final$ do kterého vedou jen přechody z něj samého $\forall s \in \Sigma$: $\delta(final, s) = final$.




Konečný automat popisujeme většinou grafem (uzly jsou stavy, hrany anotované písmeny $\in \Sigma$ přechody, počáteční stav je značen šipkou dovnitř, přijímající stavy dvojitým kruhem (nebo šipkou ven). Jiný zápis atomatu je tabulka, sloupce nadepsané znaky abecedy, řádky stavy, koncové stavy značené hvězdičkou, v políčkách nový stav dle přechodové funkce $\delta$.

*Example* 1.1. Automat $A$ přijímající $L = \{x01y : x, y \in \{0,1\}^*\}$.

- Stavový diagram (graf) Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \delta, q_0, \{q_1\})$.




- tabulka
  - řádky: stavy + přechody
  - sloupce: písmena vstupní abecedy

| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\to q_0$ | $q_2$ | $q_0$ |
| $*q_1$ | $q_1$ | $q_1$ |
| $q_2$ | $q_2$ | $q_1$ |

### Abeceda, slova, jazyky

**Definition 1.2** (Slovo, $\epsilon$,$\lambda$,$\Sigma^*$,$\Sigma^+$,jazyk)**.** Mějme neprázdnou množinu symbolů $\Sigma$.

- **Slovo, řetězec** je konečná (i prázdná) posloupnost symbolů $s \in \Sigma$, **prázdné slovo** se značí $\epsilon$ nebo $\lambda$.
- **Množinu všech slov v abecedě** $\Sigma$ značíme $\Sigma^*$,
- množinu všech neprázdných slov v značíme $\Sigma^+$.
- **jazyk** $L \subseteq \Sigma^*$ je množina slov v abecedě $\Sigma$.

**Definition 1.3** (operace zřetězení, mocnina, délka slova)**.** Nad slovy $\Sigma^*$ definujeme operace:

- **zřetězení slov** $u.v$ nebo $uv$
- **mocnina** (počet opakování) $u^n$ ($u^0 = \epsilon$, $u^1 = u$, $u^{n+1} = u^n.u$)
- **délka slova** $|u|$ ($|\epsilon| = 0$, $|auto| = 4$).
- **počet výskytů** $s \in \Sigma$ ve slově $u$ značíme $|u|_s$ ($|zmrzlina|_z = 2$).

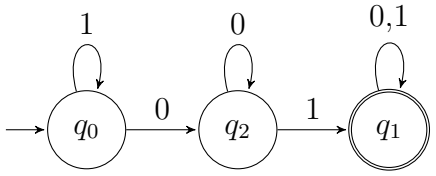
### Rozšířená přechodová funkce

**Definition 1.4** (rozšířená přechodová funkce)**.** Mějme přechodovou funkci $\delta : Q \times \Sigma \to Q$. **Rozšířenou přechodovou funkci** $\delta^*$: $Q \times \Sigma^* \to Q$ (tranzitivní uzávěr $\delta$) definujeme induktivně:

- $\delta^*(q, \epsilon) = q$
- $\delta^*(q, wx) = \delta(\delta^*(q, w), x)$ pro $x \in \Sigma, w \in \Sigma^*$.

Pozn. Pokud se v textu objeví $\delta$ aplikované na slova, míní se tím $\delta^*$.

$\delta^*(q_0, 1100) = q_2$, $\delta^*(q_0, 1100111111111001) = q_1$




### Jazyky rozpoznatelné konečnými automaty

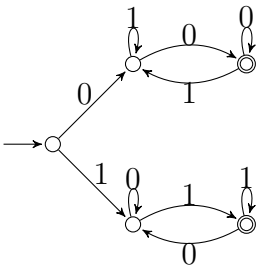
**Definition 1.5** (jazyky rozpoznatelné DFA, regulární jazyky)**.**

- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** deterministickým konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \& \ \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
- Slovo $w$ je **přijímáno** automatem $A$, právě když $w \in L(A)$.
- Jazyk $L$ je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat $A$ takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.

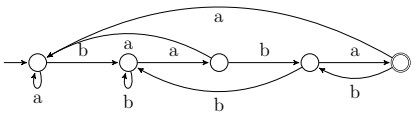
Příklady regulárních (a neregulárních) jazyků

*Example* 1.2 (regulární jazyky).

- $L = \{w \mid w = xux, w \in \{0,1\}^*, x \in \{0,1\}, u \in \{0,1\}^*\}$.



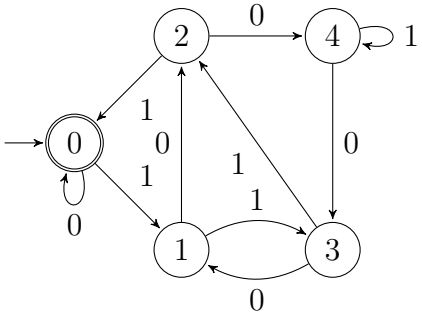
*Example* 1.3 (regulární jazyk). • $L = \{w \mid w = ubaba,\ w \in \{a,b\}^*,\ u \in \{a,b\}^*\}$.




*Example* 1.4 (regulární jazyk). • $L = \{w|w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného $5\}$.

*Example* 1.5 (!NEregulární jazyk). • $L = \{0^n 1^n | w \in \{0,1\}^*, n \in \mathbb{N}\}$ NENÍ regulání jazyk.

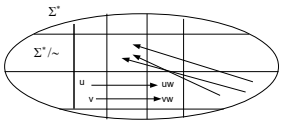
Example next: Semafor pro auta.




**Kongruence, Myhill–Nerodova věta**

## 1.3 Myhill–Nerodova věta

**Definition 1.6** (kongruence)**.** Mějme konečnou abecedu $\Sigma$ a relaci ekvivalence $\sim$ na $\Sigma^*$ (reflexivní, symetrická, tranzitivní). Potom:




- $\sim$ je **pravá kongruence**, jestliže $(\forall u, v, w \in \Sigma^*) u \sim v \Rightarrow uw \sim vw$.
- je **konečného indexu**, jestliže rozklad $\Sigma^*/\sim$ má konečný počet tříd.
- Třídu kongruence $\sim$ obsahující slovo $u$ značíme $[u]_\sim$, resp. $[u]$.

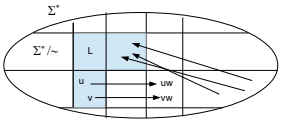
*Example* 1.6. • Relace $\sim_{end}$ 'končí stejným písmenem' je pravá kongruence,

  – pokud $ux \sim_{end} vx$, pak i $uxw \sim_{end} vxw$.

- Relace $\sim_{fl}$ 'končí stejně jako začíná' je ekvivalence, $aa \sim_{fl} bb$, ale $aaa \not\sim_{fl} bba$, tedy není pravá kongruence.
- Relace $\sim_{||}$ 'mají stejný počet znaků' není konečného indexu.

**Myhill–Nerodova věta**

**Theorem 1.1** (Myhill–Nerodova věta)**.** *Nechť $L$ je jazyk nad konečnou abecedou $\Sigma$. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:*




*a) $L$ je rozpoznatelný konečným automatem,*

*b) existuje pravá kongruence $\sim$ konečného indexu nad $\Sigma^*$ tak, že $L$ je sjednocením jistých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$.*

**Proof: Důkaz Myhill–Nerodovy věty ⇒**

a)⇒b); tj. automat ⇒ pravá kongruence konečného indexu

- definujeme $u \sim v \equiv \delta^*(q_0, u) = \delta^*(q_0, v)$.
- je to ekvivalence (reflexivní, symetrická, transitivní)
- je to pravá kongruence (z definice $\delta^*$)
- má konečný index (konečně mnoho stavů)

$$L = \{w | \delta^*(q_0, w) \in F\} = \bigcup_{q \in F} \{w | \delta^*(q_0, w) = q\} = \bigcup_{q \in F} [w | \delta^*(q_0, w) = q]_\sim.$$

□

**Proof: Důkaz Myhill–Nerodovy věty ⇐**

b)⇒a); tj. pravá kongruence konečného indexu ⇒ automat

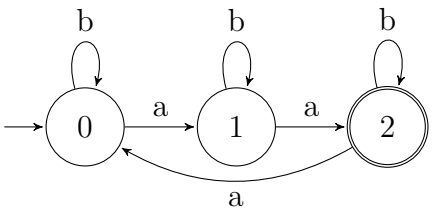
- abeceda automatu vezmeme $\Sigma$
- za stavy $Q$ volíme třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim$
- počáteční stav $q_0 \equiv [\epsilon]$
- koncové stavy $F = \{c_1, \ldots, c_n\}$, kde $L = \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i$
- přechodová funkce $\delta([u], x) = [ux]$ (je korektní z def. pravé kongruence).
- $L(A) = L$ $w \in L \Leftrightarrow w \in \bigcup_{i=1,\ldots,n} c_i \Leftrightarrow w \in c_1 \vee \ldots w \in c_n \Leftrightarrow [w] = c_1 \vee \ldots [w] = c_n \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L(A)$ $\delta^*([\epsilon], w) = [w]$

□

**Použití Myhill–Nerodovy věty: Konstrukce automatů**

*Example* 1.7. Sestrojte automat přijímající jazyk $L = \{w | w \in \{a, b\}^* \& |w|_a = 3k+2\}$, tj. obsahuje $3k+2$ symbolů $a$.

- $|u|_x$ značí počet symbolů $x$ ve slově $u$
- definujme $u \sim v \equiv (|u|_a mod\ 3 = |v|_a mod\ 3)$
- třídy ekvivalence 0,1,2
- $L$ odpovídá třídě 2
- a – přechody do následující třídy
- b – přechody zachovávají třídu.



### Ne-regulární jazyk

*Example* 1.8 (Ne–regulární jazyk). Jazyk $L_{a^+b^ic^i} = \{u | u = a^+b^ic^i \vee u = b^ic^j, + \in \mathbb{N}_{>0}, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární (Myhill–Nerodova věta).

*Jazyk $L_{a^+b^ic^i}$ není regulární.*

- Důkaz sporem: Předpokládejme, že $L$ je regulární

$\Rightarrow$ pak existuje pravá kongruence $\sim_L$ konečného indexu $m$, $L$ je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$

- vezmeme množinu řetězců $S = \{ab, abb, abbb, \ldots, ab^{m+1}\}$
- existují dvě slova $i \neq j$, která padnou do stejné třídy

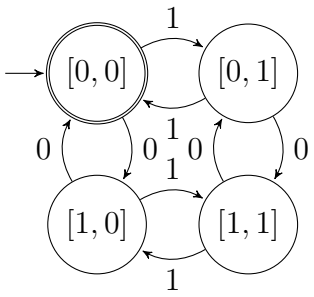
| | | |
|---|---|---|
| $i \neq j$ | $ab^i \sim ab^j$ | |
| přidáme $c^i$ | $ab^ic^i \sim ab^jc^i$ | $\sim$ je kongruence |
| spor | $ab^ic^i \in L$ & $ab^jc^i \notin L$ | s '$L$ je sjednocení některých tříd $\Sigma^*/\sim_L$'. |

□

### Příklad - 'součin' automatů

*Example* 1.9. $L = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, |w|_0 = 2k \& |w|_1 = 2\ell, k, \ell \in \mathbb{N}_0\}$, tj.

- sudý počet 0
- a zároveň sudý počet 1.




| $\delta$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $* \rightarrow [0,0]$ | $[1,0]$ | $[0,1]$ |
| $[0,1]$ | $[1,1]$ | $[0,0]$ |
| $[1,0]$ | $[0,0]$ | $[1,1]$ |
| $[1,1]$ | $[0,1]$ | $[1,1]$ |

### Příklad (špatného) protokolu pro elektronický převod peněz

- Tři zúčastnění: zákazník, obchod, banka.
- Pro jednoduchost jen jedna platba (soubor 'money').

  *Example* 1.10. Zákazník poskytne obchodu číslo kreditní karty, obchod si vyžádá peníze od banky a pošle zboží zákazníkovi. Zákazník má možnost zablokovat kartu a žádat zrušení transakce.

  Pět událostí:

  - Zákazník může zadat číslo karty **pay**.
  - Zákazník může kartu zablokovat **cancel**.
  - Obchod může poslat **ship** zboží zákazníkovi.
  - Obchod může vyžádat **redeem** peníze od banky.
  - Banka může převést **transfer** peníze obchodu.

## (Neúplný) konečný automat pro bankovní příklad

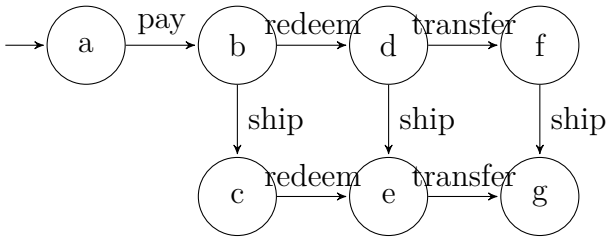



Figure 1: Obchod

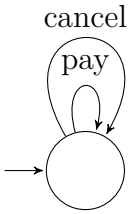



Figure 2: Zákazník

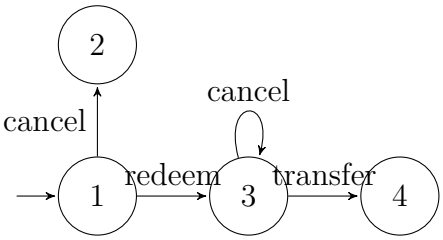



Figure 3: Banka

### Hrana pro každý vstup

- Můžeme vyžadovat, aby automat provedl akci pro každý vstup. Obchod přidá hranu pro každý stav do sebe samého označenou *cancel*.
- Zákazník by neměl shodit bankovní automat opětovným zaplacením *pay*, proto přidáme smyčku *pay*. Podobně s ostatními akcemi.

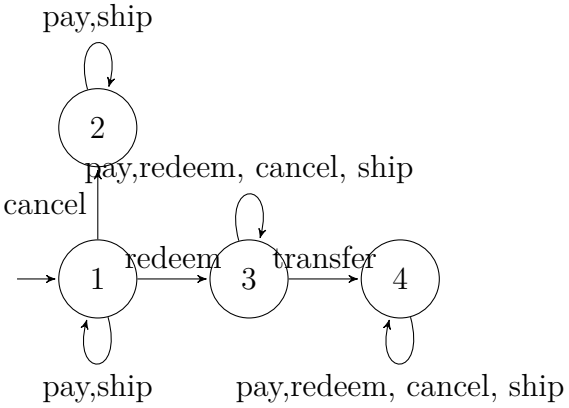
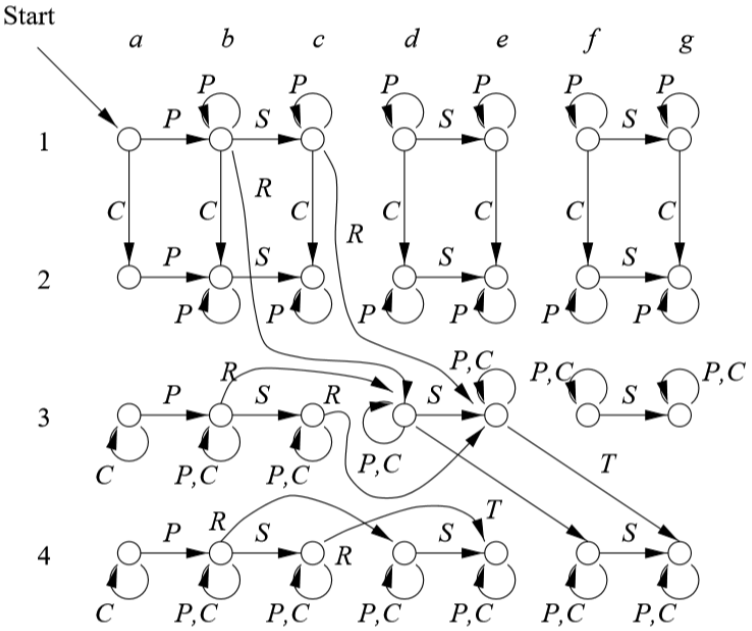


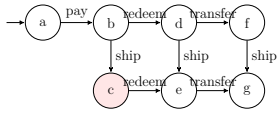

Figure 4: Úplnější automat pro banku.

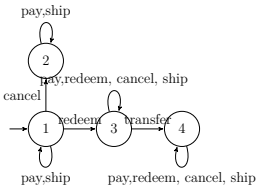
### Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times O$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley



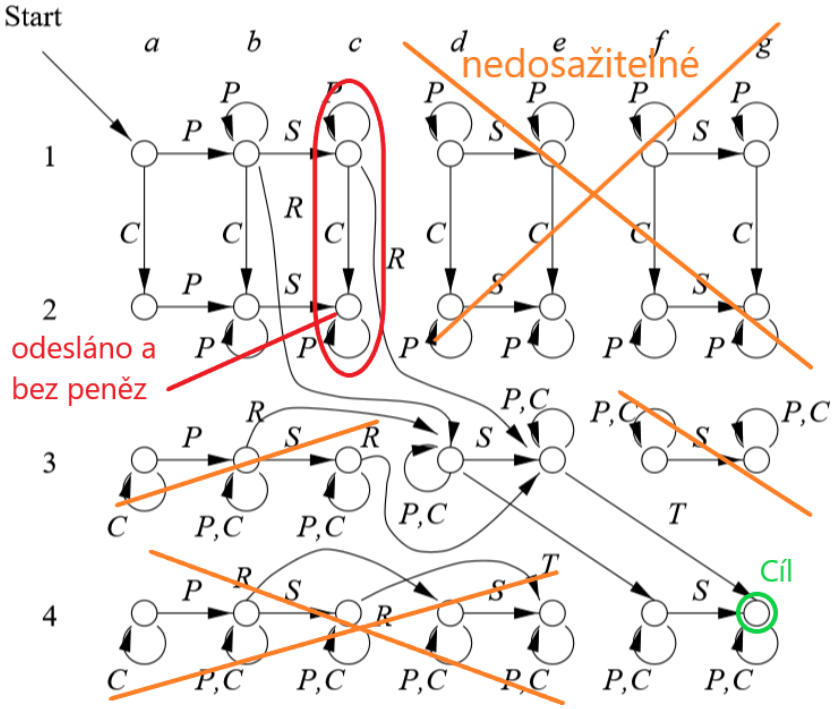



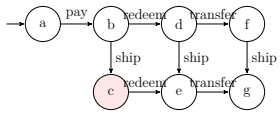



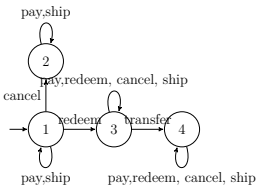

## Součin automatů

- Součin automatů pro banku a obchod má stavy dvojice $B \times O$.
- Hrana v součinu automatů provádí paralelně akce v bance a obchodě. Pokud jednomu chybí akce, bude chybět i součinu automatů.

J.E. Hopcroft, R. Motwani, J.D. Ullman: *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations*, Addison–Wesley



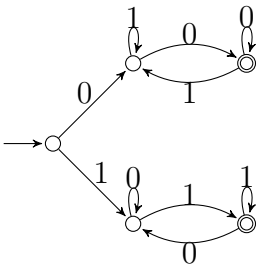

## Dnes jsme probrali

- Definice
  - deterministického konečného automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - jazyka $L \subseteq \Sigma^*$
  - jazyka rozpoznávaného konečným automatem $L(A) = \{w \mid w \in \Sigma^* \ \& \ \delta^*(q_0, w) \in F\}$
- Myhill–Nerodova věta
- příklad důkazu ne–regulárnosti jazyka ($\{ab^ic^i | i \in \mathbb{N}\}$, $\{0^i1^i | i \in \mathbb{N}\}$)
- příklady regulárních jazyků

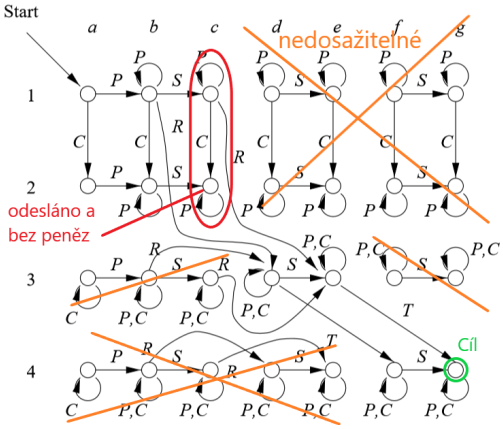
# 2 Iterační lemma pro reg. jazyky, Redukovaný DFA

**Konečné automaty, Regulární jazyky**

- **Deterministický konečný automat (DFA)** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- **Jazykem rozpoznávaným (akceptovaným, přijímaným)** konečným automatem $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme jazyk $L(A) = \{w | w \in \Sigma^* \& \delta^*(q_0, w) \in F\}$.
- Jazyk $L$ je **rozpoznatelný** konečným automatem, jestliže existuje konečný automat $A$ takový, že $L = L(A)$.
- Třídu jazyků rozpoznatelných deterministickými konečnými automaty označíme $\mathcal{F}$, nazveme **regulární jazyky**.




- Dnes budeme zkoumat:
  - Dá se do každého stavu dojít?
  - Je v přechodové funkci cyklus?
  - Jak automat redukovat?
  - Může být nedeterministický?




## 2.1 Dosažitelné stavy

**Definition 2.1** (Dosažitelné stavy)**.** Mějme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a $q \in Q$. Řekneme, že stav $q$ je **dosažitelný**, jestliže existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\delta^*(q_0, w) = q$.

**Algorithm: Hledání dosažitelných stavů**

Dosažitelné stavy hledáme iterativně.

- Začátek: $M_0 = \{q_0\}$.
- Opakuj: $M_{i+1} = M_i \cup \{q | q \in Q, (\exists p \in M_i,\ \exists x \in \Sigma)\ \delta(p, x) = q\}$
- opakuj dokud $M_{i+1} \neq M_i$.

**Proof: Korektnost a úplnost**

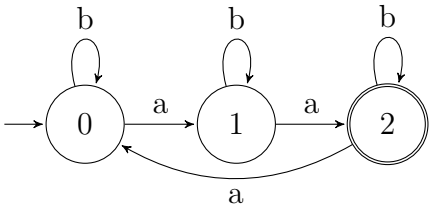
- Korektnost: $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq Q$ a každé $M_i$ obsahuje pouze dosažitelné stavy.
- Úplnost:
  - nechť $q$ je dosažitelný, tj. $(\exists w \in \Sigma^*)\delta^*(q_0, w) = q$
  - vezměme nejkratší takové $w = x_1 \ldots x_n$ tž. $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_n) = q$
  - zřejmě $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_i) \in M_i$ (dokonce $M_i \setminus M_{i-1}$)
  - tedy $\delta^*(q_0, x_1 \ldots x_n) \in M_n$, tedy $q \in M_n$.

□

## 2.2 Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky

**Projde automat cyklus?**

Automat $A$




*Example* 2.1. Projde automat výše cyklus při čtení slova:

- $abbbba$ ?
- $abbbba = a(b)bbba$; $\forall i \geq 0; a(b)^i bbba \in L(A)$.
- $aaaaba$ ?
- $aaaaba = (aaa)aba$; $\forall i \geq 0; (aaa)^i aba \in L(A)$.
- $aa$ ?
- $aa$ neprojde cyklus, ale délka $|aa| <$ počet stavů.

**Theorem 2.1** (!Iterační (pumping) lemma pro regulární jazyky)**.** *Mějme regulární jazyk $L$. Pak existuje konstanta $n \in \mathbb{N}$ (závislá na $L$) tak že každé $w \in L; |w| \geq n$ můžeme rozdělit na tři části, $w = xyz$, že:*

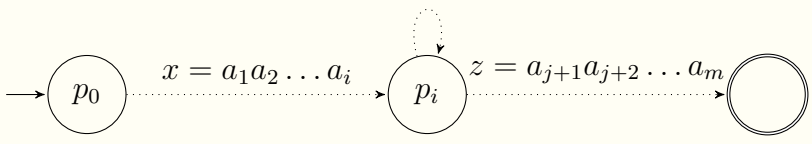
- $y \neq \epsilon$
- $|xy| \leq n$
- $\forall k \in \mathbb{N}_0$, *slovo* $xy^k z$ *je také v* $L$.

### Důkaz iteračního lematu pro regulární jazyky

**Proof: iteračního lematu pro regulární jazyky**

- Mějme regulární jazyk $L$, pak existuje DFA $A$ s $n$ stavy, že $L = L(A)$.
- Vezměme libovolné slovo $a_1 a_2 \dots a_m = w \in L$ délky $m \geq n$, $a_i \in \Sigma$.
- Definujme: $\forall i$ $p_i = \delta^*(q_0, a_1 a_2 \dots a_i)$. Platí $p_0 = q_0$.
- Máme $n+1$ $p_i$ a $n$ stavů, některý se opakuje, vezměme první takový, tj. $(\exists i, j)(0 \leq i < j \leq n \ \& \ p_i = p_j)$.
- Definujme: $x = a_1 a_2 \dots a_i$, $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$, $z = a_{j+1} a_{j+2} \dots a_m$, tj. $w = xyz$, $y \neq \epsilon$, $y = a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j$

  $|xy| \leq n$.




- Smyčka nad $p_i$ se může opakovat libovolně krát a vstup je také akceptovaný.

□

**Použití pumping lemmatu**

*Example* 2.2 (Pumping lemma jako hra s oponentem). Jazyk $L_{eq} = \{w; |w|_0 = |w|_1\}$ slov se stejným počtem 0 a 1 není regulární.

Proof: Jazyk $L_{eq}$ není regulární.

- Předpokládejme že $L_{eq}$ je regulární. Vezměme $n$ z pumping lemmatu.
- Zvolme $w = 0^n 1^n \in L_{eq}$.
- Rozdělme $w = xyz$ dle pumping lemmatu, $y \neq \epsilon$, $|xy| \leq n$.
- Protože $|xy| \leq n$ je na začátku $w$, obsahuje jen 0.
- Z pumping lemmatu: $xz \in L_{eq}$ (pro $k = 0$). To má ale méně 0 než 1, takže nemůže být v $L_{eq}$.

□

*Example* 2.3. Jazyk $L = \{0^i 1^i; i \geq 0\}$ není regulární.

**Aplikace pumping lemmatu 2**

*Example* 2.4. Jazyk $L_{pr}$ slov $1^p$ kde $p$ je prvočíslo není regulární.

Proof: $L_{pr}$ slov $1^p$ kde $p$ je prvočíslo není regulární.

- Předpokládejme že $L_{pr}$ je regulární. Vezměme $n$ z pumping lemmatu. Zvolme prvočíslo $p \geq n + 2$, označme $w = 1^p$.
- Rozložme $w = xyz$ dle pumping lemmatu, nechť $|y| = m$. Pak $|xz| = p - m$.
- $xy^{p-m}z \in L_{pr}$ z pumping lemmatu, ale $|xy^{p-m}z| = |xz| + (p - m)|y| = p - m + (p - m)m = (m + 1)(p - m)$ není prvočíslo (žádný z činitelů není 1).

□

**'Pumpovatelný' ne-regulární jazyk**

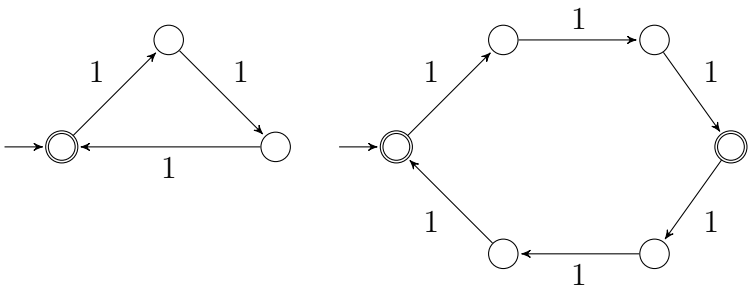
*Example* 2.5 (Ne–regulární jazyk, který lze pumpovat). Jazyk $L = \{u|u = a^+ b^i c^i \vee u = b^i c^j, + \in \mathbb{N}_{>0}, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární (Myhill–Nerodova věta), ale vždy lze pumpovat první písmeno.

## 2.3 Ekvivalentní stavy, Redukce automatu

**Nejednoznačnost**

Automat přijímající daný jazyk není určen jednoznačně.

- Jazyk $L = \{w|w \in \{1\}^* \& |w| = 3k\}$.



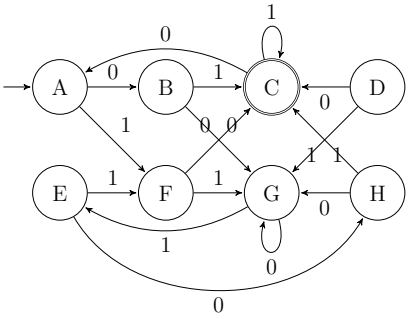

**Definition 2.2** (Ekvivalence stavů)**.** Říkáme, že stavy $p, q \in Q$ konečného automatu $A$ jsou **ekvivalentní** pokud:

- Pro všechny řetězce $w \in \Sigma^*$; $\delta^*(p, w) \in F$ iff $\delta^*(q, w) \in F$.

Pokud dva stavy nejsou ekvivalentní, říkáme, že jsou **rozlišitelné**.

**Příklad rozlišitelných stavů**

*Example* 2.6. Automat na obrázku:



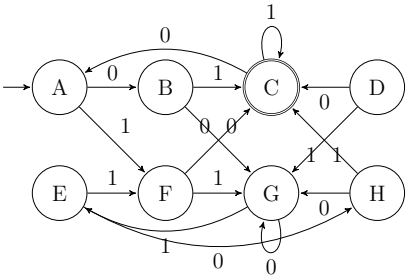

- C a G nejsou ekvivalentní, $\delta^*(C,\epsilon) \in F$ a $\delta^*(G,\epsilon) \notin F$.
- A,G: $\delta^*(A,01) = C$ je přijímající, $\delta^*(G,01) = E$ není.
- A,E jsou ekvivalentní – $\epsilon$, $1*$ zřejmé, 0 vede do ne–přijímajících stavů, 01 a 00 se sejdou ve stejném stavu.

*Lemma.* Ekvivalence na stavech je tranzitivní.

**Algorithm: !Algoritmus hledání rozlišitelných stavů v DFA**

Následující algoritmus nalezne rozlišitelné stavy:

- Základ: Pokud $p \in F$ (přijímající) a $q \notin F$, pak je dvojice $\{p,q\}$ rozlišitelná.
- Indukce: Nechť $p,q \in Q$, $a \in \Sigma$ a o dvojici $r,s; r = \delta(p,a)$ a $s = \delta(q,a)$ víme, že jsou rozlišitelné. Pak i $\{p,q\}$ jsou rozlišitelné.
  - opakuj dokud existuje nová trojice $p,q \in Q$, $a \in \Sigma$.




| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | x | | | | | | |
| C | x | x | | | | | |
| D | x | x | x | | | | |
| E | | x | x | x | | | |
| F | x | x | x | | x | | |
| G | x | x | x | x | x | x | |
| H | x | | x | x | x | x | x |

Křížek značí rozlišitelné dvojice. C je rozlišitelné hned, ostatní kromě $\{A,G\},\{E,G\}$ také. Vidíme tři ekvivalentní dvojice stavů.

**Algoritmus hledání rozlišitelných stavů**

Přijímající vs. nepřijímající stavy

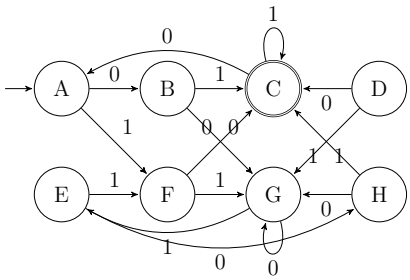
| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | | | | | | | |
| C | x | x | | | | | |
| D | | | x | | | | |
| E | | | x | | | | |
| F | | | x | | | | |
| G | | | x | | | | |
| H | | | x | | | | |

1.krok1: $\delta(q,1) \in F$ pro $q \in \{B,C,H\}$

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | x | | | | | | |
| C | x | x | | | | | |
| D | | x | x | | | | |
| E | | x | x | | | | |
| F | | x | x | | | | |
| G | | x | x | | | | |
| H | x | | x | x | x | x | x |

1.krok0: $\delta(q,0) \in F$ pro $q \in \{D,F\}$

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | x | | | | | | |
| C | x | x | | | | | |
| D | x | x | x | | | | |
| E | | x | x | x | | | |
| F | x | x | x | | x | | |
| G | | x | x | x | | x | |
| H | x | | x | x | x | x | x |




B a G jsou rozlišitelné, $\delta(A,0) = B$, $\delta(G,0) = G$, tj. A,G jsou rozlišitelné. Obdobně pro E,G vedoucí $\delta(*,0)$ do rozlišitelných stavů H,G.

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B | x | | | | | | |
| C | x | x | | | | | |
| D | x | x | x | | | | |
| E | | x | x | x | | | |
| F | x | x | x | | x | | |
| G | x | x | x | x | x | x | |
| H | x | | x | x | x | x | x |

Zůstávají tři ekvivalentní dvojice stavů.

**Theorem 2.2.** *Pokud dva stavy nejsou odlišeny předchozím algoritmem, pak jsou tyto stavy ekvivalentní.*

**Proof: Koreknost algoritmu**

- Uvažujme špatné páry stavů, které jsou rozlišitelné a algoritmus je nerozlišil.
- Vezměme z nich pár $p, q$ rozlišitelný nejkratším slovem $w = a_1 \dots a_n$.
- Stavy $r = \delta(p, a_1)$ a $s = \delta(q, a_1)$ jsou rozlišitelné kratším slovem $a_2 \dots a_n$ takže pár není mezi špatnými.
  Tedy jsou 'vykřížkované' algoritmem.
- Tedy v příštím kroku algoritmus rozliší i $p, q$.

□

Čas výpočtu je polynomiální vzhledem k počtu stavů.

- V jednom kole uvažujeme všechny páry, tj. $O(n^2)$.
- Kol je maximálně $O(n^2)$, protože pokud nepřidáme křížek, končíme.
- Dohromady $O(n^4)$.

Algoritmus lze zrychlit na $O(n^2)$ pamatováním stavů, které závisí na páru $\{r, s\}$ a následováním těchto seznamů 'zpátky'.

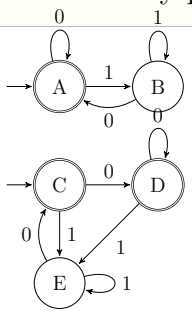
### Testování rovnosti regulárních jazyků

**Algorithm: !Testování rovnost regulárních jazyků**

Rovnost (ekvivalenci) regulárních jazyků $L, M$ testujeme následovně:

- Najdeme DFA $A_L, A_M$ rozpoznávající $L(A_L) = L, L(A_M) = M$, $Q_L \cap Q_M = \emptyset$.
- Vytvoříme DFA sjednocením stavů a přechodů $(Q_L \cup Q_M, \Sigma, \delta_L \cup \delta_M, q_L, F_L \cup F_M)$; zvolíme jeden z počátečních stavů.
- Jazyky jsou stejné právě když počáteční stavy původních DFA jsou ekvivalentní.

*Example* 2.7. Uvažujme jazyk $\{\epsilon\} \cup \{0,1\}^*0$ přijímající prázdné slovo a slova končící 0. Vpravo obrázek dvou DFA a tabulku rozlišitelných stavů.




| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| B | x | | | |
| C | | x | | |
| D | | x | | |
| E | x | | x | x |

### Minimalizace DFA

**Definition 2.3** (redukovaný DFA, redukt)**.** Deterministický konečný automat je **redukovaný**, pokud

- nemá nedosažitelné stavy a
- žádné dva stavy nejsou ekvivalentní
- $\delta$ je totální.

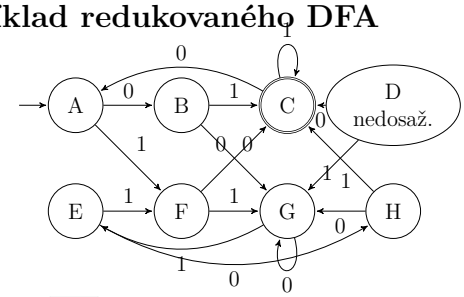
Konečný automat $B$ je **reduktem** automatu $A$, jestliže:

- $B$ je redukovaný a
- $A$ a $B$ jsou ekvivalentní.

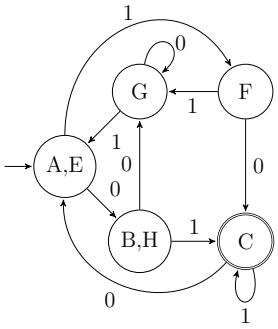
**Algorithm: !Algoritmus nalezení reduktu DFA $A$**

- Ze vstupního DFA $A$ eliminujeme stavy nedosažitelné z počátečního stavu.
- Najdeme rozklad zbylých stavů na třídy ekvivalence.
- Konstruujeme DFA $B$ na třídách ekvivalence jakožto stavech. Přechodovou funkci $B$ označíme $\gamma$, mějme $S \in Q_B$. Pro libovolné $q \in S$, označíme $T$ třídu ekvivalence $\delta(q, a)$ a definujeme $\gamma(S, a) = T$. Tato třída musí být stejná pro všechny $q \in S$.
- Počáteční stav $B$ je třída obsahující počáteční stav $A$.
- Množina přijímajících stavů $B$ jsou bloky odpovídající přijímajícím stavům $A$.

### Příklad redukovaného DFA




| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| B | $x$ | | | | | |
| C | $x$ | $x$ | | | | |
| E | | $x$ | $x$ | | | |
| F | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | | |
| G | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ | |
| H | $x$ | | $x$ | $x$ | $x$ | $x$ |
| | A | B | C | E | F | G |




Třídy ekvivalence:

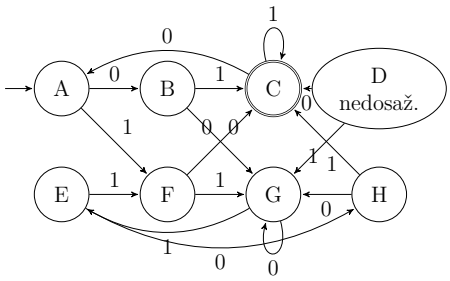
$\{A, E\}, \{B, H\}, \{C\}, \{F\}, \{G\}$

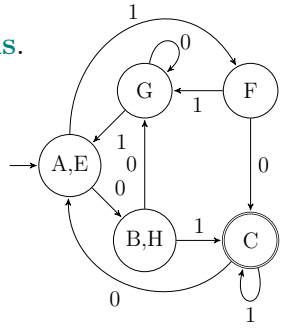
### Automatový homomorfizmus

**Definition 2.4** (automatový homomorfizmus)**.** Nechť $A_1, A_2$ jsou DFA. Řekneme, že zobrazení $h : Q_1 \to Q_2$ $Q_1$ na $Q_2$ je **automatovým homomorfizmem**, jestliže:

| | |
|---|---|
| $h(q_{0_1}) = q_{0_2}$ | 'stejné' počáteční stavy |
| $h(\delta_1(q, x)) = \delta_2(h(q), x)$ | 'stejné' přechodové funkce |
| $q \in F_1 \Leftrightarrow h(q) \in F_2$ | 'stejné' koncové stavy. |

Homomorfizmus prostý a na nazýváme **isomorfizmus**.




### Ekvivalence automatů a homomorfizmus

**Definition 2.5** (Ekvivalence automatů**!**)**.** Dva konečné automaty $A, B$ nad stejnou abecedou $\Sigma$ jsou **ekvivalentní**, jestli že rozpoznávají stejný jazyk, tj. $L(A) = L(B)$.

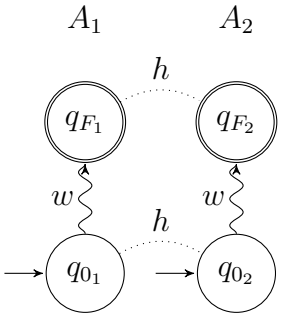
**Theorem 2.3** (Věta o ekvivalenci automatů)**.** *Existuje-li homomorfizmus konečných automatů $A_1$ do $A_2$, pak jsou $A_1$ a $A_2$ ekvivalentní.*

Proof:

- Pro libovolný řetězec $w \in \Sigma^*$ konečnou iterací
  - $h(\delta_1^*(q, w)) = \delta_2^*(h(q), w)$
- dále:

$$\begin{aligned} w \in L(A_1) &\Leftrightarrow \delta_1^*(q_{0_1}, w) \in F_1 \\ &\Leftrightarrow h(\delta_1^*(q_{0_1}, w)) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(h(q_{0_1}), w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \delta_2^*(q_{0_2}, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow w \in L(A_2) \end{aligned}$$

□




### Redukty a jejich ekvivalence

*Lemma.* Každé dva ekvivalentní redukované automaty jsou izomorfní.

*Proof.*

- Každý stav $q \in Q_1$ je dosažitelný. Najdeme pro něj slovo $q = \delta_1^*(q_{0_1}, w)$
- a definujeme $h(q) = \delta_2^*(q_{0_2}, w)$.
- Lze dokázat, že je $h$ korektně definovaná funkce, zachovává vlastnosti homomorfizmu $(q_0, F, \delta)$ a jde o bijekci, tj. je to isomorfizmus.

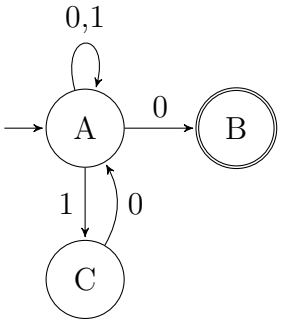
□

*Lemma.* Pro každý deterministický konečný automat $A$, který přijímá alespoň jedno slovo, existuje redukovaný DFA, který je s ním ekvivalentní.

**Definition 2.6** (Redukt)**.** **Redukt**em DFA $A$ nazýváme redukovaný automat s $A$ ekvivalentní. Z předchozí věty plyne, že všechny redukty automatu $A$ jsou izomorfní.

### Pro nedeterministické FA to tak snadné není

*Example* 2.8. Nedeterministický FA na obrázku můžeme redukovat vypuštěním stavu $C$.
Stavy $\{A, C\}$ jsou rozlišitelné vstupem 0, takže algoritmus pro DFA redukci nenajde.
Mohli bychom hledat exhauzivním výpočtem.




# 3 Nedeterministické $\epsilon$–NFA, Operace zachovávající regularitu

### Nedeterministické konečné automaty s $\epsilon$ přechody ($\epsilon$-NFA)

Nedeterministický automat může být ve více stavech paralelně. Má schopnost 'uhodnout' něco o vstupu.

Figure 5: NFA přijímající všechna slova končící 01.

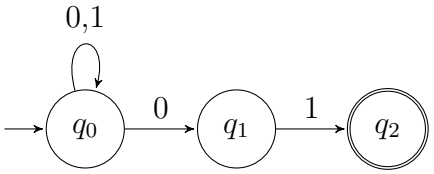
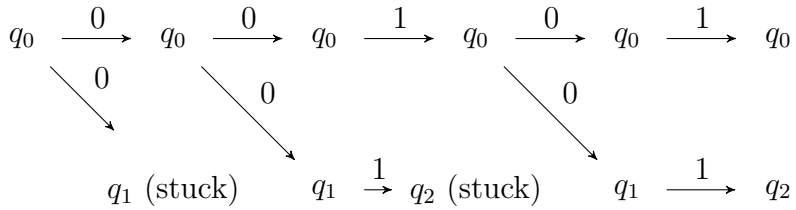



Figure 6: NFA zpracovává vstup 00101.




**Definition 3.1** (Nedeterministický konečný automat s $\epsilon$ přechody ($\epsilon$-NFA))**. Nedeterministický konečný automat s $\epsilon$ přechody ($\epsilon$-NFA)** $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestává z:

1. konečné množiny **stavů**, zpravidla značíme $Q$
2. konečné množiny **vstupních symbolů**, značíme $\Sigma$
3. **přechodové funkce**, zobrazení $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ vracející podmnožinu $Q$.
4. **počáteční ho stavu**[1] $q_0 \in Q$,
5. a **množiny koncových (přijímajících) stavů** $F \subseteq Q$.

*Example* 3.1. Tabulka pro $\epsilon$-NFA z předchozího slajdu $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ je:

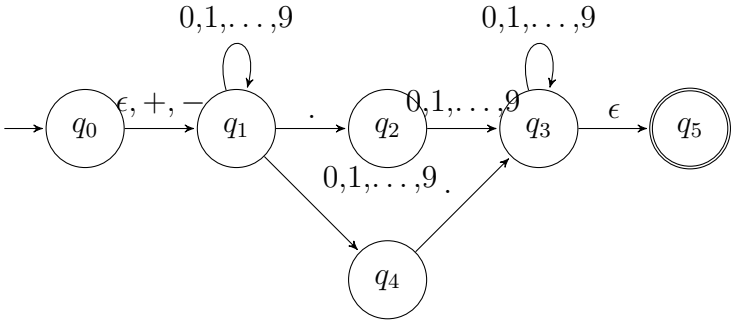
| $\delta$ | $\epsilon$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $\to q_0$ | $\emptyset$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |
| $*q_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

.

**Konečné automaty s $\epsilon$ přechody**

- $\epsilon$-přechod znamená přechod bez přečtení vstupního symbolu.

*Example* 3.2 ($\epsilon$-NFA, silně nedeterministická $\delta$). (1) Volitelně znaménko + nebo - ,
(2) řetězec číslic,
(3) desetinná tečka a
(4) další řetězec číslic. Nejméně jeden z řetězců (2) a (4) musí být neprázdný.

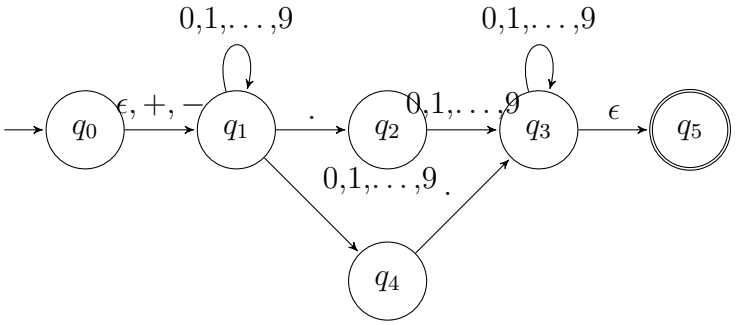



[1] alternativa: množiny počátečních stavů $S_0 \subseteq Q$

*Example* 3.3 (Přechodová funkce v tabulce). Předešlý $\epsilon$-NFA je: $E = (\{q_0, q_1, \ldots, q_5\}, \{., +, -, 0, 1, \ldots, 9\}, \delta, q_0, \{$

s $\delta$:

| $\delta$ | $\epsilon$ | +,- | . | 0,1,...,9 |
|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $\{q_1\}$ | $\{q_1\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $q_1$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ | $\{q_1, q_4\}$ |
| $q_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ |
| $q_3$ | $\{q_5\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ |
| $q_4$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{q_3\}$ | $\emptyset$ |
| $*q_5$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |




### $\epsilon$–uzávěr

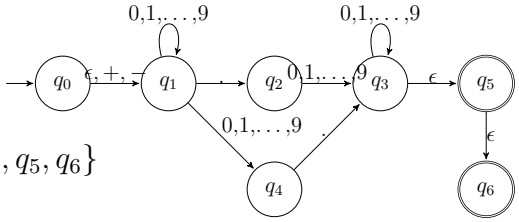
**Definition 3.2** ($\epsilon$–uzávěr)**.** Pro $q \in Q$ definujeme **$\epsilon$–uzávěr** $\epsilon closure(q)$ rekurzivně:

- Stav $q$ je v $\epsilon closure(q)$.
- Je–li $p \in \epsilon closure(q)$ a $r \in \delta(p, \epsilon)$ pak i $r \in \epsilon closure(q)$.

Pro množinu stavů $S \subseteq Q$ definujeme $\epsilon closure(S) = \bigcup_{q \in S} \epsilon closure(q)$.

*Example* 3.4 ($\epsilon$ uzávěr).

- $\epsilon closure(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\epsilon closure(q_1) = \{q_1\}$
- $\epsilon closure(q_3) = \{q_3, q_5, q_6\}$
- $\epsilon closure(\{q_3, q_4\}) = \{q_3, q_4, q_5, q_6\}$




### Rozšířená přechodová funkce a jazyk přijímaný $\epsilon$-NFA

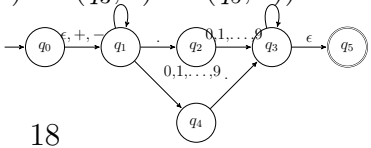
**Definition 3.3** ($\delta^*$ pro $\epsilon$NFA )**.** Nechť $E = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je $\epsilon$–NFA. Rozšířenou přechodovou funkci $\delta^*$ definujeme následovně:

- $\delta^*(q, \epsilon) = \epsilon closure(q)$.
- Indukční krok: $v = wa$, kde $w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$.

$$\delta^*(q, wa) = \epsilon closure\left(\bigcup_{p \in \delta^*(q,w)} \delta(p, a)\right).$$

*Example* 3.5.

$$\begin{aligned}
\delta^*(q_0, \epsilon) &= \epsilon closure(q_0) &&= \{q_0, q_1\} \\
\delta^*(q_0, 5) &= \epsilon closure(\textstyle\bigcup_{q \in \delta^*(q_0, \epsilon)} \delta(q, 5)) = \epsilon closure(\delta(q_0, 5) \cup \delta(q_1, 5)) &&= \{q_1, q_4\} \\
\delta^*(q_0, 5.) &= \epsilon closure(\delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .)) &&= \{q_2, q_3, q_5, q_6\} \\
\delta^*(q_0, 5.6) &= \epsilon closure(\delta(q_2, 6) \cup \delta(q_3, 6) \cup \delta(q_5, 6)) &&= \{q_3, q_5, q_6\}
\end{aligned}$$



### Jazyk přijímaný $\epsilon$NFA

**Definition 3.4** (Jazyk přijímaný $\epsilon$NFA )**.** Mějme nedeterministický konečný automat $\epsilon$NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, pak

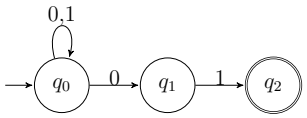
$$L(A) = \{w|\ \delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

je jazyk přijímaný automatem $A$.

Tedy $L(A)$ je množina slov $w \in \Sigma^*$ takových, že $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje alespoň jeden přijímající stav.

*Example* 3.6. Automat z předchozího slajdu přijímá jazyk $L = \{w|w \text{ končí na } 01, w \in \{0,1\}^*\}$. Důkaz indukcí konjunkce tvrzení:

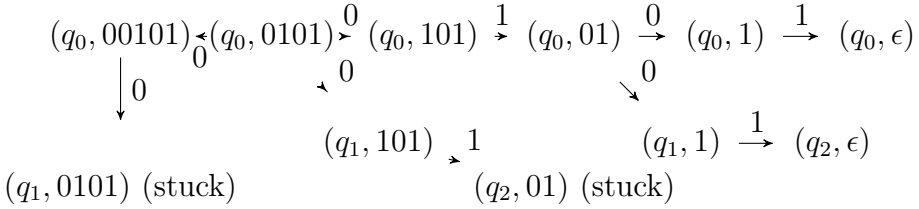
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje $q_0$ pro každé slovo $w$.
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje $q_1$ iff $w$ končí 0.
- $\delta^*(q_0, w)$ obsahuje $q_2$ iff $w$ končí 01.




### Konfigurace automatu, Výpočetní graf

**Definition 3.5** (Konfigurace $DFA$, $\epsilon NFA$)**.** Mějme $\epsilon$NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $q \in Q$, $v \in \Sigma^*$, pak dvojice $(q, v)$ označuje **konfiguraci** konečného automatu, nacházejícího se ve stavu $q$ s nepřečteným vstupem $v$.

**Definition 3.6** (Výpočetní strom, graf $\epsilon NFA$)**.** Mějme NFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ a vstupní slovo $w \in \Sigma^*$. Uzly **výpočetního grafu** jsou konfigurace $A$ nad slovem $w$, orientované hrany značí možný přechod mezi konfiguracemi, tj. z $(p, au)$ vede hrana do $(q, u)$ právě když $q \in \delta(p, a)$.




### Podmnožinová konstrukce (s $\epsilon$–přechody)

**Theorem 3.1** (Podmnožinová konstrukce (s $\epsilon$–přechody))**.** *Jazyk $L$ je rozpoznatelný $\epsilon$-NFA právě když je $L$ regulární.*

**Algorithm: !Podmnožinová konstrukce (s $\epsilon$–přechody)**

Pro libovolný $\epsilon$-NFA $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ zkonstruujeme DFA $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{D_0}, F_D)$ přijímající stejný jazyk jako $N$.

- Nové stavy jsou $\epsilon$-uzavřené podmnožiny $Q_N$.

  $Q_D \subseteq \mathcal{P}(Q_N)$, $\forall S \subseteq Q_N : \epsilon closure(S) \in Q_D$. V $Q_D$ může být i $\emptyset$.

- Počáteční stav je $\epsilon$-uzávěr $q_0$.

  $q_D = \epsilon closure(q_0)$.

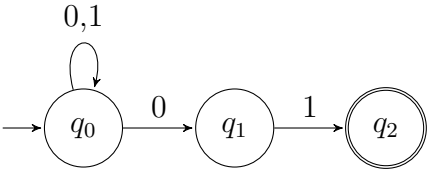
- Přijímací stavy jsou všechny množiny obsahující nějaký přijímající stav.

  $F_D = \{S | S \in Q_D \ \& \ S \cap F_N \neq \emptyset\}$.

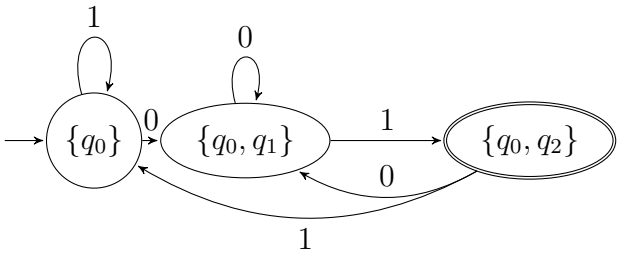
- Přechodová funkce sjednotí předchody z jednotlivých stavů a uzavře $\epsilon$closure.

  Pro $S \in Q_D, a \in \Sigma$ definujeme $\delta_D(S, a) = \epsilon closure(\bigcup_{p \in S} \delta_N(p, a))$.

**Příklad podmnožinové konstrukce pro** $\{w.01 | w \in \{0,1\}\}$



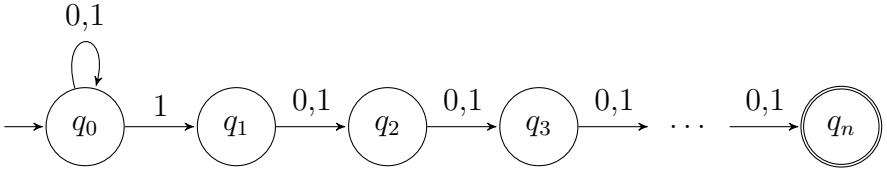

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $\rightarrow \{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $\{q_1\}$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |
| $*\{q_2\}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |
| $*\{q_0, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0\}$ |
| $*\{q_1, q_2\}$ | $\emptyset$ | $\{q_2\}$ |
| $*\{q_0, q_1, q_2\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_2\}$ |




**Theorem 3.2** (Převod $\epsilon$-NFA na DFA)**.** *Pro DFA* $D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_{D_0}, F_D)$ *vytvořený podmnožinovou konstrukcí z NFA* $N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ *platí* $L(N) = L(D)$.

*Proof.* Indukcí dokážeme: $\delta_D^*(q_0, w) = \delta_N^*(q_{D_0}, w)$. □

*Example* 3.7 ('Těžký' případ pro podmnožinovou konstrukci). Jazyk $L(N)$ slov 0's a 1's takových, že $n$–tý symbol od konce je 1. Intuitivně si DFA musí pamatovat $n$ posledních přečtených symbolů.




- Aplikace hledání v textu

### Množinové operace nad jazyky

**Definition 3.7** (Množinové operace nad jazyky)**.** Mějme dva jazyky $L, M$. Definujme následující operace:
(1) binární **sjednocení** $L \cup M = \{w | w \in L \vee w \in M\}$

- Příklad: jazyk obsahuje slova začínající $a^i$ nebo tvaru $b^j c^j$.

(2) **průnik** $L \cap M = \{w | w \in L \ \& \ w \in M\}$

- Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky končící na 'baa'.

(3) **rozdíl** $L - M = \{w | w \in L \ \& \ w \notin M\}$

- Příklad: jazyk obsahuje slova sudé délky nekončící na 'baa'.

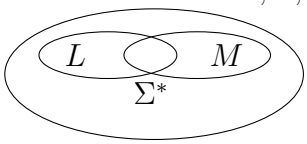
(4) **doplněk (komplement)** $\bar{L} = -L = \{w | w \notin L\} = \Sigma^* - L$

- Příklad: jazyk obsahuje slova nekončící na 'a'.

**Theorem** (de Morganova pravidla)**.** *Platí:*

$$L \cap M = \overline{\bar{L} \cup \bar{M}}$$
$$L \cup M = \overline{\bar{L} \cap \bar{M}}$$
$$L - M = L \cap \bar{M}.$$

*Důkaz ze vztahů* $\&, \vee, \neg$.




□

### Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

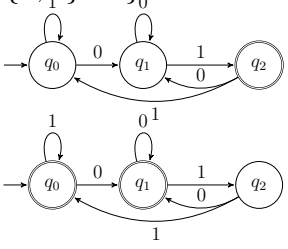
**Theorem 3.3** (Uzavřenost na množinové operace)**.** *Mějme regulární jazyky $L, M$. Pak jsou následující jazyky také regulární:*
*(1) sjednocení $L \cup M$,*
*(2) průnik $L \cap M$,*
*(3) rozdíl $L - M$,*
*(4) doplněk $\bar{L} = \Sigma^* - L$.*

**Proof: Uzavřenost RJ na doplněk**

- Pokud $\delta$ není pro některé dvojice $q, a$ definovaná, přidáme nový nepřijímající stav $q_{fail}$ a do něj přechod pro vše dříve nedefinované plus $\forall a \in \Sigma$: $\delta(q_{fail}, a) = q_{fail}$.
- Pak stačí prohodit koncové a nekoncové stavy přijímajícího deterministického FA, tj. $F_{complement} = Q_A - F_A$.

□

*Example* 3.8. Jazyk $\{w;\ w \in \{0,1\}^*01\}$



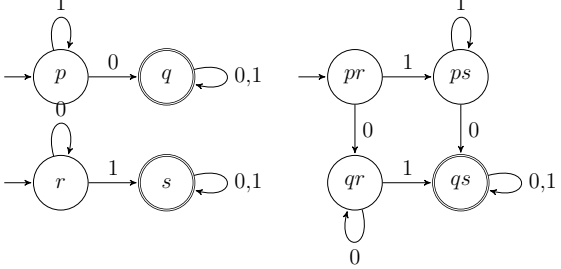

### Konstrukce součinu automatů

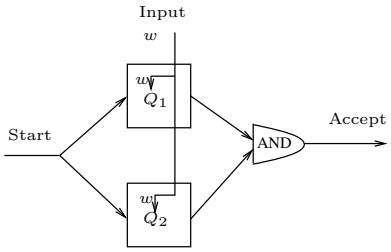
**Proof: Průnik, sjednocení, rozdíl**

- Pro sjednocení a rozdíl doplníme funkci $\delta$ na totální.
- Zkonstruujeme součinový automat, $Q = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta([p_1, p_2], x) = [\delta_1(p_1, x), \delta_2(p_2, x)], [q_{0_1}, q_{0_2}], F)$
- průnik: $F = F_1 \times F_2$
- sjednocení: $F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$
- rozdíl: $F = F_1 \times (Q_2 - F_2)$.

□

Příklad součinu automatů (průnik jazyků). Slova obsahující 0,1, oboje.




**Příklady na uzávěrové vlastnosti**

*Example* 3.9. Konstruujeme konečný automat přijímající slova, která obsahují $3k + 2$ symbolů 1 a neobsahují posloupnost 11.

- Přímá konstrukce je komplikovaná.
- $L_1 = \{w | w \in \{0,1\}^* \& |w|_1 = 3k + 2\}$
- $L_2 = \{w | u, v \in \{0,1\}^* \& w = u11v\}$
- $L = L_1 - L_2$.

*Example* 3.10. Jazyk $M$ slov s různým počtem 0 a 1 není regulární.

- Je–li $M$ regulární, $\overline{M} = \Sigma^* - M$ je také regulární.
- O $\overline{M}$ víme, že regulární není (pumping lemma).

**Ještě jeden příklad**

*Example* 3.11. Jazyk $L_{0\neq1} = \{0^i 1^j : i \neq j, i, j \in \mathbb{N}_0\}$ není regulární.

- Jazyk $L_{01} = \{0^i 1^j; i, j \in \mathbb{N}_0\}$ je regulární, umíme sestrojit konečný automat.
- $L_{01} - L_{0\neq1} = \{0^i 1^i : i \in \mathbb{N}_0\}$
- Z uzávěrových vlastností víme, že rozdíl regulárních jazyků je regulární.
- Jazyk $L_{01}$ regulární je.
- Předpokládejme, že $L_{0\neq1}$ je regulární. Pak by i $\{0^i 1^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ musel být regulární, což není - SPOR.

### Řetězcové operace nad jazyky

**Definition 3.8** (Řetězcové operace nad jazyky)**.** Nad jazyky $L, M$ definujeme následující operace:

| | |
|---|---|
| **zřetězení** jazyků | $L.M = \{uv \mid u \in L \ \& \ v \in M\}$ |
| | $L.x = L.\{x\}$ a $x.L = \{x\}.L$ pro $x \in \Sigma$ |
| **mocniny** jazyka | $L^0 = \{\epsilon\}$ |
| | $L^{i+1} = L^i.L$ |
| **pozitivní iterace** | $L^+ = L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geq 1} L^i$ |
| **obecná iterace** | $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \ldots = \bigcup_{i \geq 0} L^i$ |
| | tedy $L^* = L^+ \cup \{\epsilon\}$ |
| **otočení jazyka** | $L^R = \{u^R \mid u \in L\}$ |
| (=zrcadlový obraz,reverze) | $(x_1 x_2 \ldots x_n)^R = x_n x \ldots x_2 x_1$ |
| **levý kvocient** $L$ podle $M$ | $M \setminus L = \{v \mid uv \in L \ \& \ u \in M\}$ |
| **levá derivace** $L$ podle $w$ | $\partial_w L = \{w\} \setminus L$ (pozn. derivace bude i v jiném významu) |
| **pravý kvocient** $L$ podle $M$ | $L/M = \{u \mid uv \in L \ \& \ v \in M\}$ |
| **pravá derivace** $L$ podle $w$ | $\partial_w^R L = L/\{w\}$. |

**Theorem 3.4** (Uzavřenost reg. jazyků na řetězcové operace)**.** *Jsou–li $L, M$ regulární jazyky, je regulární i $L.M$, $L^*, L^+$, $L^R$, $M \setminus L$ a $L/M$.*

*Lemma* ($L.M$). Jsou–li $L, M$ regulární jazyky, je regulární i $L.M$.

Proof:

Vezmeme DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, pak $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ tak že $L = L(A_1)$ a $M = L(A_2)$.
Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_0\}, \Sigma, \delta, q_0, F_2)$ kde:
$Q = Q_1 \cup Q_2$ předpokládáme různá jména stavů, jinak přejmenujeme
končíme až po přečtení slova z $L_2$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\delta(q_0, \epsilon)$ | $= \{q_1, q_2\}$ | pro $q_1 \in F_1$ | tj. $\epsilon \in L(A_1)$ |
| $\delta(q_0, \epsilon)$ | $= \{q_1\}$ | pro $q_1 \notin F_1$ | tj. $\epsilon \notin L(A_1)$ |
| $\delta(q_0, x)$ | $= \emptyset$ | pro $x \in \Sigma$ | |
| $\delta(q, x)$ | $= \{\delta_1(q, x)\}$ | pro $q \in Q_1 \ \& \ \delta_1(q, x) \notin F_1$ | počítáme v $A_1$ |
| | $= \{\delta_1(q, x), q_2\}$ | pro $q \in Q_1 \ \& \ \delta_1(q, x) \in F_1$ | nedet. přechod z $A_1$ do $A_2$ |
| | $= \{\delta_2(q, x)\}$ | pro $q \in Q_2$ | počítáme v $A_2$. |

Pak $L(B) = L(A_1).L(A_2)$. □

### Uzavřenost iterace

*Lemma* ($L^*, L^+$). Je–li $L$ regulární jazyk, je regulární i $L^*, L^+$.

- Idea: opakovaný výpočet automatu $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- realizace: nedeterministické rozhodnutí, zda pokračovat nebo restart
- speciální stav pro příjem $\epsilon \in L^0$ (pro $L^+$ vynecháme či $\notin F$).

Proof: Důkaz pro $L^*$

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme NFA automat $B = (Q \cup \{q_B\}, \Sigma, \delta_B, q_B, F \cup \{q_B\})$ kde:
$\delta_B(q_B, \epsilon) = \{q_0\}$ nový stav $q_B$ pro příjem $\epsilon$, přejdeme do $q_0$ $\quad \delta_B(q, x) = \{\delta(q, x)\}$ pokud $q \in Q \ \& \ \delta$
$\delta_B(q_B, x) = \emptyset$ pro $x \in \Sigma$ $\quad = \{\delta(q, x), q_0\}$ pokud $q \in Q \ \& \ \delta$
Pak $L(B) = L(A)^*$ ($q_B \in F_B$), $L(B) = L(A)^+$ ($q_B \notin F_B$). □

### Uzavřenost reverze

*Lemma* ($L^R$). Je–li $L$ regulární jazyk, je regulární i $L^R$.

- Zřejmě $(L^R)^R = L$ a tedy stačí ukázat jeden směr.
- idea: obrátíme šipky ve stavovém diagramu; nederministický FA

Proof:

Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
Definujeme nedeterministický automat $B = (Q \cup \{q_B\}, \Sigma, \delta_B, q_B, \{q_0\})$ kde:

- $\delta_B(q, x) = \{p | \delta(p, x) = q\}$ pro $q \in Q$
- $\delta_B(q_B, \epsilon) = F$, $\delta_B(q_B, x) = \emptyset$.
- Pro libovolné slovo $w = x_1 x_2 \dots x_n$
  - $q_0, q_1, q_2, \dots, q_n$ je přijímající výpočet pro $w$ v $A$

  $\Leftrightarrow$
  - $q_B, q_n, q_{n-1}, \dots, , q_2, q_1, q_0$ je přijímající výpočet pro $w^R$ v $B$.

□

Pozn. Někdy $L$ nebo $L^R$ má výrazně jednodušší přijímající automat.

### Uzavřenost kvocientu

*Lemma* ($M \setminus L$ a $L/M$). Jsou–li $L, M$ regulární jazyky, je regulární i $M \setminus L$ a $L/M$.

- Idea: $A_L$, budeme startovat ve stavech, do kterých se lze dostat slovem z $M$.

Proof:

- Vezmeme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, tak že $L = L(A)$.
  Definujeme nedeterministický NFA $B = (Q \cup \{q_\epsilon\}, \Sigma, \delta, q_\epsilon, F)$ kde:
- a přidáme přechod $\delta(q_\epsilon, \epsilon) = \{q | q \in Q \ \& \ (\exists u \in M)\ q = \delta^*(q_0, u)\}$ do stavů, kam lze dojit slovem z $M$.
  - lze nalézt algoritmicky ($\{q;\ L(A_q) \cap M \neq \emptyset$ kde $A_q = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q\})\}$)
- $v \in M \setminus L$

  $\Leftrightarrow$ $(\exists u \in M)\ uv \in L$

  $\Leftrightarrow$ $(\exists u \in M, \exists q \in Q)\ \delta(q_0, u) = q \ \& \ \delta(q, v) \in F$

  $\Leftrightarrow$ $\exists q \in \delta(q_\epsilon, \epsilon) \ \& \ \delta(q, v) \in F$

  $\Leftrightarrow$ $v \in L(B)$.

$L/M = (M^R \setminus L^R)^R$. □

# 4 Regulární výrazy, Kleeneova věta, Substituce, Homomorfizmus

### Regulární výrazy

**Regulární výrazy (RV)** jsou

- algebraickým popisem jazyků

- deklarativním způsobem, jak vyjádřit slova, která chceme přijímat.
- Schopné definovat všechny a pouze regulární jazyky.
- Můžeme je brát jako programovací jazyk, uživatelsky přívětivý popis konečného automatu.

*Example* 4.1.
- Základní UNIX grep příkaz.
- Lexikální analyzátory jako Lex a Flex (popis pomocí 'token'ů je vzásadě regulární výraz).
- Python knihovna re .
- Syntaktická analýza potřebuje silnější nástroj, bezkontextové gramatiky, budou následovat.

**Definition 4.1** (Regulární výrazy (Regular Expression) (RegE), hodnota RegE $L(\alpha)$)**.** **Regulární výrazy** $\alpha, \beta \in RegE(\Sigma)$ nad konečnou neprázdnou abecedou $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ a jejich hodnota $L(\alpha)$ jsou definovány induktivně:

- Základ:

| výraz $\alpha$ | pro | hodnota $L(\alpha) \equiv [\alpha]$ |
|---|---|---|
| $\epsilon$ | prázdný řetězec | $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ |
| $\emptyset$ | prázdný výraz | $L(\emptyset) = \{\} \equiv \emptyset$ |
| $\mathbf{a}$ | $a \in \Sigma$ | $L(\mathbf{a}) = \{a\}$. |

- Indukce:

| výraz | hodnota | poznámka |
|---|---|---|
| $\alpha + \beta$ | $L(\alpha + \beta) = L(\alpha) \cup L(\beta)$ | v grep, re \| |
| $\alpha\beta$ | $L(\alpha\beta) = L(\alpha)L(\beta)$ | můžeme značit ., ale plete se s UNIX grep. Každý reg- |
| $\alpha^*$ | $L(\alpha^*) = L(\alpha)^*$ | |
| $(\alpha)$ | $L((\alpha)) = L(\alpha)$ | závorky nemění hodnotu. |

ulární výraz dostaneme indukcí výše, tj. třída $RegE(\Sigma)$ je nejmenší třída uzavřená na uvedené operace.

*Lemma* 4.1. Jazyk $L(\epsilon) = \{\epsilon\} = \emptyset^*$, v definici jen pro význam symbolu $L(\epsilon)$.

### Příklady reguláních výrazů, priorita

**Definition 4.2** (priorita)**.** Nejvyšší prioritu má iterace $*$, nižší konkatenace (zřetězení), nejnižší sjednocení $+$.

*Example* 4.2 (Regulární výrazy)*.* Jazyk střídajících se nul a jedniček lze zapsat:

- $(\mathbf{01})^* + (\mathbf{10})^* + \mathbf{1}(\mathbf{01})^* + \mathbf{0}(\mathbf{10})^*$
- $(\epsilon + \mathbf{1})(\mathbf{01})^*(\epsilon + \mathbf{0})$.

Jazyk $L((\mathbf{0}^*\mathbf{10}^*\mathbf{10}^*\mathbf{1})^*\mathbf{0}^*) = \{w | w \in \{0,1\}^*, |w|_1 = 3k, k \geq 0\}$.

**Theorem 4.1** (!varianta Kleeneho věty)**.**
1. *Každý jazyk reprezentovaný konečným automatem lze zapsat jako regulární výraz.*
2. *Každý jazyk popsaný regulárním výrazem můžeme zapsat jako $\epsilon$-NFA (a tedy i DFA).*

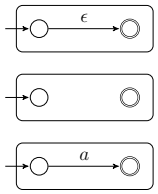
### Převod RegE výrazu na $\epsilon$–NFA automat

*Převod RegE výrazu na $\epsilon$–NFA automat.*

Důkaz indukcí dle struktury $R$. V každém kroku zkonstruujeme $\epsilon$-NFA $E$ rozpoznávající stejný jazyk $L(R) = L(E)$ se třemi dalšími vlastnostmi:

1. Právě jeden přijímající stav.
2. Žádné hrany do počátečního stavu.
3. Žádné hrany z koncového stavu.

Základ:



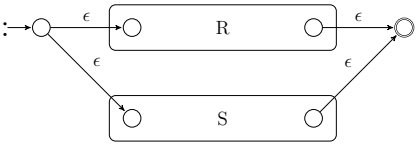

Prázdný řetězec $\epsilon$

Prázdná množina $\emptyset$

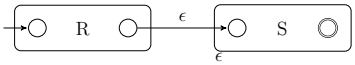
$a \in \Sigma$: výraz **a**

INDUKCE:

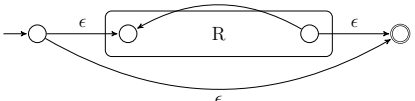
Součet $R + S$:




Zřetězení $RS$:




Iterace $R^*$:



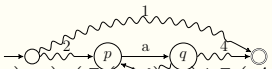

□

### Alternativní (neefektivní) důkaz Kleeneovy věty

**Proof: Rozpoznatelný FA ⇒ RJ**

Máme automat DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ který přijímá jazyk $L(A)$. Indukcí podle počtu hran $A$ dokážeme $L(A) \in RJ(\Sigma)$.

- žádná hrana – pouze jazyky $\emptyset$ a $\{\epsilon\}$, z definice a $\emptyset^*$.
- $(n + 1)$ hran
  - vybereme jednu hranu $p \to^a q$, tj. $q \in \delta(p, a)$
  - sestrojíme čtyři automaty bez tého hrany ($\delta^| = \delta$, jen $\delta^|(p, a) = \delta(p, a) - \{q\}$)
    - $A_1 = (Q, \Sigma, \delta^|, q_0, F)$
    - $A_2 = (Q, \Sigma, \delta^|, q_0, \{p\})$
    - $A_3 = (Q, \Sigma, \delta^|, q, \{p\})$
    - $A_4 = (Q, \Sigma, \delta^|, q, F)$




  - Potom $L(A) = L(A_1) \cup (L(A_2).a).(L(A_3).a)^* L(A_4)$,
  - jazyky $L(A_1), L(A_2), L(A_3), L(A_4) \in RJ(\Sigma)$ z indukčního předpokladu ($n$ hran).

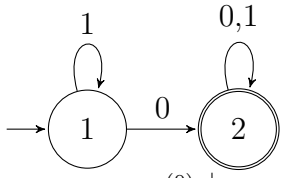
□

### Od DFA k regulárním výrazům

- Mějme DFA $A$, $Q_A = \{1, \ldots, n\}$ o $n$ stavech, stavy očíslujeme od 1.
- Nechť $R_{ij}^{(k)}$ je regulární výraz, $L(R_{ij}^{(k)}) = \{w | \delta^*_{\leq k}(i, w) = j\}$ množina slov převádějících stav $i$ do stavu $j$ v $A$ cestou, která neobsahuje stav s vyšším indexem než $k$.
- Budeme rekruzivně konstruovat $R_{ij}^{(k)}$ pro $k = 0, \ldots, n$.

- $k = 0$, $i \neq j$: $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_m}$ kde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou symboly označující hrany $i$ do $j$ (nebo $R_{ij}^{(0)} = \emptyset$ nebo $R_{ij}^{(0)} = \mathbf{a}$ pro $m = 0, 1$).
- $k = 0$, $i = j$: smyčky, $R_{ii}^{(0)} = \epsilon + \mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + \ldots + \mathbf{a_m}$ kde $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou symboly na smyčkách v $i$.

**Příklad: Od konečného automatu k RegE**

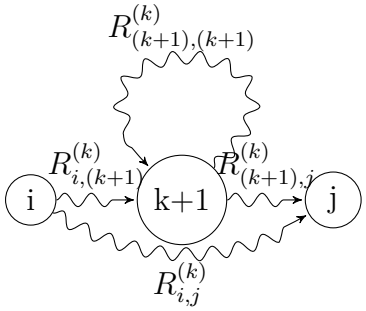



$$R_{12}^{(2)} = \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$$

$$R_{ij}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} + R_{i(k+1)}^{(k)}(R_{(k+1)(k+1)}^{(k)})^* R_{(k+1)j}^{(k)}$$

| | | |
|---|---|---|
| $R_{11}^{(0)}$ | $\epsilon + \mathbf{1}$ | $=$ |
| $R_{12}^{(0)}$ | $\mathbf{0}$ | $=$ |
| $R_{21}^{(0)}$ | $\emptyset$ | $=$ |
| $R_{22}^{(0)}$ | $(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$ | $=$ |
| $R_{11}^{(1)}$ | $(\epsilon + \mathbf{1}) + (\epsilon + \mathbf{1})(\epsilon + \mathbf{1})^*(\epsilon + \mathbf{1})$ | $=\mathbf{1}^*$ |
| $R_{12}^{(1)}$ | $\mathbf{0} + (\epsilon + \mathbf{1})(\epsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$ | $=\mathbf{1}^*\mathbf{0}$ |
| $R_{21}^{(1)}$ | $\emptyset + \emptyset(\epsilon + \mathbf{1})^*(\epsilon + \mathbf{1})$ | $=\emptyset$ |
| $R_{22}^{(1)}$ | $(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}) + \emptyset(\epsilon + \mathbf{1})^*\mathbf{0}$ | $=\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}$ |
| $R_{11}^{(2)}$ | $\mathbf{1}^* + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$ | $=\mathbf{1}^*$ |
| $R_{12}^{(2)}$ | $\mathbf{1}^*\mathbf{0} + \mathbf{1}^*\mathbf{0}(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$ | $=\mathbf{1}^*\mathbf{0}(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$ |
| $R_{21}^{(2)}$ | $\emptyset + (\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*\emptyset$ | $=\emptyset$ |
| $R_{22}^{(2)}$ | $(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1}) + (\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*(\epsilon + \mathbf{0} + \mathbf{1})$ | $=(\mathbf{0}+\mathbf{1})^*$ |

*Proof.* INDUKCE. Mějme $\forall i, j \in Q$ $R_{ij}^{(k)}$. Konstruujeme $R_{ij}^{(k+1)}$.




1. $R_{ij}^{(k+1)} = R_{ij}^{(k)} + R_{i(k+1)}^{(k)}(R_{(k+1)(k+1)}^{(k)})^* R_{(k+1)j}^{(k)}$
   - Cesty z $i$ do $j$ neprocházející uzlem $(k+1)$ jsou již v $R_{ij}^{(k)}$.
   - Cesty z $i$ do $j$ přes $(k+1)$ s případnými smyčkami můžeme zapsat $R_{i(k+1)}^{(k)}(R_{(k+1)(k+1)}^{(k)})^* R_{(k+1)j}^{(k)}$.
   - regulární výrazy jsou uzavřené na sčítání (sjednocení), zřetězení i iteraci, tj. $R_{ij}^{k+1} \in RegE(\Sigma)$
2. Nakonec, $RegE = \oplus_{j \in F_A} R_{1j}^{(n)}$ sjedncení přes přijímající stavy $j$.

□

**Zjednodušení regulárních výrazů (netřeba znát)**

*Lemma* (Další vlastnosti bez důkazu).

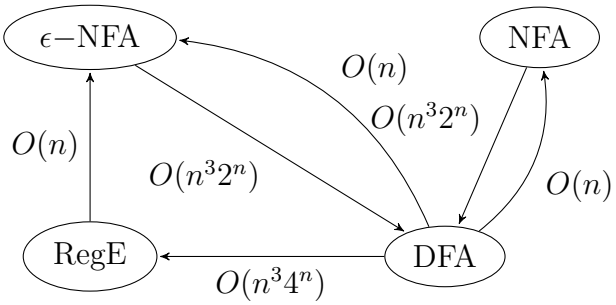
- Zjednodušení návrhu automatů

$$
\begin{aligned}
L.\emptyset = \emptyset.L &= \emptyset \\
\{\epsilon\}.L = L.\{\epsilon\} &= L \\
(L^*)^* &= L^* \\
(L_1 \cup L_2)^* &= L_1^*(L_2.L_1^*)^* = L_2^*(L_1.L_2^*)^* \\
(L_1.L_2)^R &= L_2^R.L_1^R \\
\partial_w(L_1 \cup L_2) &= \partial_w(L_1) \cup \partial_w(L_2) \\
\partial_w(\Sigma^* - L) &= \Sigma^* - \partial_w L.
\end{aligned}
$$

**Shrnutí převodů mezi reprezentacemi regulárních jazyků**

Převod NFA na DFA

- $\epsilon$ uzávěr v $O(n^3)$ – prohledává $n$ stavů násobeno $n^2$ hran pro $\epsilon$ přechody.
- Podmnožinová konstrukce, DFA s až $2^n$ stavy. Pro každý stav, $O(n^3)$ času na výpočet přechodové funkce.




Převod DFA na NFA

- Přidat množinové závorky k přechodové funkci a přechody pro $\epsilon$ u $\epsilon-$NFA.

Převod automatu DFA an RegE regulární výraz

- $O(n^3 4^n)$

RegE výraz na automat

- V čase $O(n)$ vytvoříme $\epsilon-$NFA.

**Substituce jazyků**

**Definition 4.3** (Substituce jazyků)**.** Mějme konečnou abecedu $\Sigma$. Pro každé $x \in \Sigma$ budiž $\sigma(x)$ jazyk v nějaké abecedě $Y_x$. Dále položme

$\sigma(\epsilon) = \{\epsilon\}$

$\sigma(u.v) = \sigma(u).\sigma(v)$

- Zobrazení $\sigma : \Sigma^* \to P(Y^*)$, kde $Y = \bigcup_{x\in\Sigma} Y_x$ se nazývá **substituce**.
- Pro jazyk $L$ definujeme: $\sigma(L) = \bigcup_{w\in L} \sigma(w)$, podobně sjednocení.
- **nevypouštějící substituce** je substituce, kde žádné $\sigma(x)$ neobstahuje $\epsilon$.

*Example* 4.3 (substituce). 1) $\Sigma = \{k, p, m, c, t\}$, $L = (kmp)(ckmp)^*t$,

$k$ slovník křestních jmen, $p$ slovník příjmení, $m$ mezera, $c$ čárka, $t$ tečka.

2) Pokud $\sigma(0) = \{a^i b^j, i, j \geq 0\}, \sigma(1) = \{cd\}$

tak $\sigma(010) = \{a^i b^j cda^k b^l, i, j, k, l \geq 0\}$.

### Homomorfizmus a inverzní homomorfizmus jazyků

**Definition 4.4** (homomorfizmus (jazyků), inverzní homomorfizmus)**.** **Homomorfizmus** $h$ je speciální případ substituce, kde obraz je vždy jen jednoslovný jazyk (vynecháváme u něj závorky), tj. $(\forall x \in \Sigma)\ h(x) = w_x$.

Pokud $\forall x : w_x \neq \epsilon$, jde o **nevypouštějící homomorfizmus**.

**Inverzní homomorfizmus** $h^{-1}(L) = \{w | h(w) \in L\}$.

*Example* 4.4 (homomorfizmus).

- Znaky nahradíme TEXzápisem, $h(\mu) = \backslash mu$ a podobně.
- Homomorfizmus $h$ definujeme: $h(0) = ab$, a $h(1) = \epsilon$. Pak $h(0011) = abab$.

  Pro $L = \mathbf{10^*1}$ je $h(L) = (ab)^*$.

**Theorem 4.2** (uzavřenost na homomorfizmus)**.** *Je–li jazyk $L$ i $\forall x \in \Sigma$ jazyk $\sigma(x), h(x)$ regulární, pak je regulární i $\sigma(L), h(L)$.*

*Uzavřenost na substituci, homomorfizmus.* Strukturální indukcí 'probubláváním' algebraickým popisem jazyka základních, sjednocení, zřetězení a iterace. Pro sjednocení a zřetězení z definice substituce a uzavřenosti regulárních jazyků na sjednocení a zřetězení.

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\alpha + \beta) &= \sigma(L(\alpha)) \cup \sigma(L(\beta)) \\ \underline{\sigma}(\alpha\beta) &= \{w | \exists u \in L(\alpha) \exists v \in L(\beta) : \sigma(u)\sigma(v) = w\} \end{aligned}$$

Pro iteraci rozložíme na nekonečné sjednocení, pro každý konkrétní počet iterací $\sigma$ aplikované na konečné zřetězení.

$$\begin{aligned} \sigma(L(\alpha)^*) &= \sigma(L(\alpha)^0) \cup \sigma(L(\alpha)^1) \cup \ldots \cup \sigma(L(\alpha)^n) \cup \ldots \\ &= \underline{\sigma}(\alpha)^0 \cup \underline{\sigma}(\alpha)^1 \cup \ldots \cup \underline{\sigma}(\alpha)^n \cup \ldots \\ &= L(\underline{\sigma}(\alpha)^*). \end{aligned}$$

□

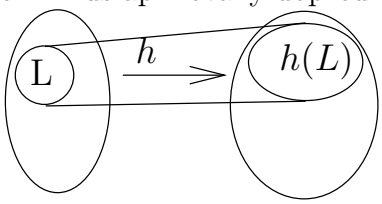
### Inverzní homomorfizmus

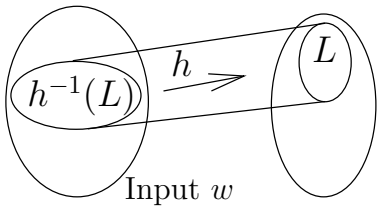
**Definition** ((4.4) Inverzní homomorfizmus)**.** Nechť $h$ je homomorfizmus abecedy $T$ do slov nad abecedou $\Sigma$. Pak $h^{-1}(L)$ *'h inverze L'* je množina řetězců $h^{-1}(L) = \{w | w \in T^*;\ h(w) \in L\}$.

*Example* 4.5. Nechť $L = (\{00\} \cup \{1\})^*$, $h(a) = 01$ a $h(b) = 10$.
Pak $h^{-1}(L) = (\{ba\})^*$.

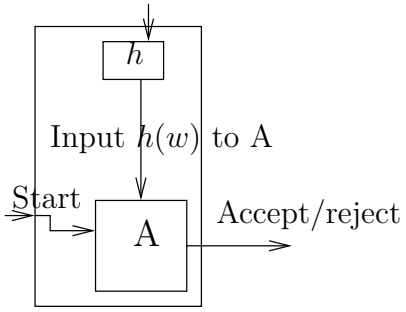
Důkaz: $h((\{ba\})^*) \in L$ snadno.
Ostatní $w$ generují izolované 0 (rozbor případů).

Homomorfizmus aplikovaný dopředně a zpětně.




<all> Input $w$




### Inverzní homomorfizmus DFA

**Theorem 4.3.** *Je–li $h$ homomorfizmus abecedy $T$ do abecedy $\Sigma$ a $L$ je regulární jazyk abecedy $\Sigma$, pak $h^{-1}(L)$ je také regulární jazyk.*

Proof:

- pro $L$ máme DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- $h : T \to \Sigma^*$
- definujeme $\epsilon$-NFA $B = (Q', T, \delta', [q_0, \epsilon], F \times \{\epsilon\})$ kde

$$
\begin{array}{lll}
Q' = \{[q,u] \,|q \in Q, u \in \Sigma^*, \exists (a \in T) \exists (v \in \Sigma^*) h(a) = vu\} & & u \text{ je buffer} \\
\delta'([q,\epsilon], a) & = [q, h(a)] & \text{naplňuje buffer} \\
\delta'([q, bv], \epsilon) & = [p, v] \text{ kde } \delta(q,b) = p & \text{čte buffer.}
\end{array}
$$

□

**Příklad: Navštiv všechny stavy**

*Example* 4.6. Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Definujme jazyk $L = \{w \in \Sigma^*;\ \delta^*(q_0, w) \in F$ a pro každý stav $q \in Q$ existuje prefix $x_q$ slova $w$ tak, že $\delta^*(q_0, x_q) = q\}$.

Tento jazyk $L$ je regulární.

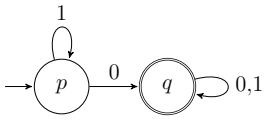
$M$ Označme $M = L(A)$.

$T$ Definujeme novou abecedu $T$ trojic $\{[paq]; p, q \in Q, a \in \Sigma, \delta(p,a) = q\}$.

$h$ Definujeme homomorfizmus $(\forall\ p, q, a)\ h([paq]) = a$.

$L_1$ Jazyk $L_1 = h^{-1}(M)$ je regulární, protože $M$ je regulární (DFA inverzní homomorfizmus).

- $h^{-1}(101)$ obsahuje $2^3 = 8$ řetězců, např. $[p1p][q0q][p1p] \in \{[p1p],[q1q]\}\{[p0q],[q0q]\}\{[p1p],[q1q]\}$.
- Dále zkonstruujeme $L$ z $L_1$ (další slide).




$L_2$ Vynutíme začátek $q_0$. Definujeme $E_1 = \bigcup_{a \in \Sigma, q \in Q}\{[q_0 a q]\} = E_1 = \{[q_0 a_1 q_0], [q_0 a_2 q_1], \ldots, [q_0 a_m q_n]\}$. Pak $L_2 = L_1 \cap L(E_1.T^*)$.

$L_3$ Vynutíme stejné sousedící stavy. Definujeme ne–odpovídající dvojice $E_2 = \bigcup_{q \neq r, p, q, r, s \in Q, a, b \in \Sigma}\{[paq][rbs]\}$.

Definujeme $L_3 = L_2 - L(T^*.E_2.T^*)$,

- Končí v přijímajícím stavu, protože jsme začali z jazyku $M$ přijímaném DFA $A$.

$L_4$ Všechny stavy. $\forall\ q \in Q$ definujeme $E_q$ jako regulární výraz sjednocení všech symbolů $T$ takových, že $q$ není ani na první, ani na poslední pozici. Odečteme $L(E_q^*)$ od $L_3$. $L_4 = L_3 - \bigcup_{q \in Q}\{E_q^*\}$.

$L$ Odstraníme stavy, necháme symboly. $L = h(L_4)$. Tedy $L$ je regulární.

Přehled:

$M$ $= L(A)$
Inverzní homom.

$L_1$ $h^{-1}(M) \subseteq \{[qap]\}^*$
průnik RJ

$L_2$ $+ q_0$
rozdíl RJ

$L_3$ + sousední stavy rovny
rozdíl RJ

$L_4$ + všechny stavy
homomorfismus

$L$ $h([qap]) = a$

**Rozhodovací problémy pro regulární jazyky!**

*Lemma* (Test ne–prázdnosti regulárního jazyka). Lze algoritmicky rozhodnout, zda jazyk přijímaný DFA, NFA, $\epsilon$-NFA je prázdný.

Jazyk je prázdný právě když žádný z koncových stavů není dosažitelný. Dosažitelnost lze testovat $O(|Q|^2)$.

*Lemma* (Test náležení do regulárního jazyka). Pro daný řetězec $w$; $|w| = n$ a regulární jazyk $L$. Lze algoritmicky rozhodnout, zda je $w \in L$.

- DFA: Spusť automat; pokud $|w| = n$, při dobré reprezentaci a konstatním čase přechodu $O(n)$.
- NFA o $s$ stavech: čas $O(ns^2)$. Každý vstupní symbol aplikujeme na všechny stavy předchozího kroku, kterých je nejvýš $s$.
- $\epsilon-$NFA - nejdříve určíme $\epsilon$–uzávěr. Pak aplikujeme přechodovou funkci a $\epsilon$–uzávěr na výsledek.

**Shrnutí minulé přednášky (+dva řádky a sloupce navíc)**

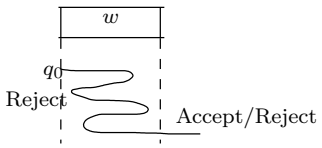
- Podmnožinová konstrukce DFA z $\epsilon$NFA
- Regulární výrazy
- Kleeneho věta
  - Jazyk je přijímaný konečným automatem právě když lze napsat jako regulární výraz,
  - tj. z $\emptyset$ a $\{\mathbf{a}\}$ pro $a \in \Sigma$
  - a konečného počtu aplikací iterace, zřetězení a sjednocení.
- Uzávěrové vlastnosti
  - dnes jen 'regulární' sloupec.

| jazyk | regulární (RL) | bezkontextové | deterministické CFL |
|---|---|---|---|
| sjednocení | ANO | ANO | NE |
| průnik | ANO | NE | NE |
| $\cap$ s RL | ANO | ANO | ANO |
| doplněk | ANO | NE | ANO |
| homomorfizmus | ANO | ANO | NE |
| inverzní hom. | ANO | ANO | ANO |

# 5 Dvousměrné FA, Mealy a Moore stroje

**Dvousměrné (dvoucestné) konečné automaty**

- Konečný automat provádí následující činnosti:
  - přečte písmeno
  - změní stav vnitřní jednotky
  - posune čtecí hlavu doprava
- Čtecí hlava se nesmí vracet.



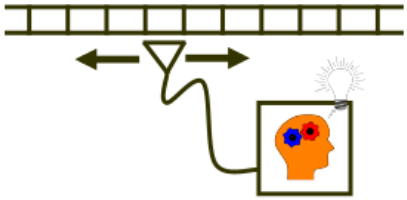

**Definition 5.1** (Deterministické Dvousměrné konečné automaty)**. Deterministickým dvousměrným konečným automatem** nazýváme pětici $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

1. $Q$ je konečná množina stavů,
2. $\Sigma$ je konečná množina vstupních symbolů
3. přechodové funkce $\delta$ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q \times \{-1, 1\}$ *rozšířené o pohyb hlavy*

4. $q_0 \in Q$ počáteční stav
5. množina přijímajících stavů $F \subseteq Q$.

Pozn.: Je deterministický, nedeterministický $\delta_N : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q \times \{-1, 1\})$. Pozn.2: Nulový pohyb hlavy lze, jen trochu zkomplikuje důkaz dále.

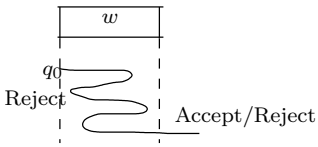
- Reprezentujeme opět stavovým diagramem, tabulkou.



### Výpočet dvousměrného automatu

**Definition 5.2** (Výpočet dvousměrného automatu)**.** Slovo $w$ je **přijato dvousměrným konečným automatem**, pokud:

- výpočet začal na prvním písmenu slova $w$ vlevo v počátečním stavu
- čtecí hlava poprvé opustila slovo $w$ vpravo v některém přijímajícím stavu
- mimo čtené slovo není výpočet definován (výpočet zde končí a slovo není přijato).



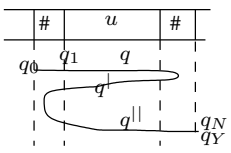

- Ke slovům si můžeme přidat speciální koncové znaky $\# \notin \Sigma$
- funkce $\partial_\#$ odstraní $\#$ zleva, $\partial_\#^R$ zprava.

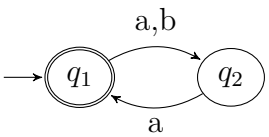
*Lemma.* Je–li $L(A) = \{\#w\#|w \in L \subseteq \Sigma^*\}$ regulární, potom je regulární i $L = \partial_\# \partial_\#^R (L(A) \cap \#\Sigma^*\#)$.

### Příklad dvousměrného automatu

*Example* 5.1 (Příklad dvousměrného automatu). Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$. Dvousměrný konečný automat $B = (Q \cup Q^| \cup Q^{||} \cup \{q_0, q_N, q_Y\}, \Sigma \cup \{\#\}, \delta^|, q_0, \{q_Y\})$ přijímající jazyk $L(B) = \{\#u\#|uu \in L(A)\}$ (toto NENÍ levý ani pravý kvocient!) definujeme následovně:

| $\delta^\|$ | $x \in \Sigma$ | $\#$ | poznámka |
|---|---|---|---|
| $q_0$ | $q_N, -1$ | $q_1, +1$ | $q_1$ je počátek $A$ |
| $q$ | $p, +1$ | $q^\|, -1$ | $p = \delta(q, x)$ |
| $q^\|$ | $q^\|, -1$ | $q^{\|\|}, +1$ | |
| $q^{\|\|}$ | $p^{\|\|}, +1$ | $q_Y, +1$ | $q \in F, p = \delta(q, x)$ |
| $q^{\|\|}$ | $p^{\|\|}, +1$ | $q_N, +1$ | $q \notin F, p = \delta(q, x)$ |
| $q_N$ | $q_N, +1$ | $q_N, +1$ | |
| $q_Y$ | $q_N, +1$ | $q_N, +1$ | |



### Dvousměrné a jednosměrné konečné automaty

**Theorem 5.1.** *Jazyky přijímané dvousměrnými konečnými automaty jsou právě regulární jazyky.*

**Proof: konečný automat → dvousměrný automat**

- Konečný automat předeveme na dvousměrný přidáním posunu hlavy vpravo
- $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \to 2A = (Q, \Sigma, \delta^{|}, q_0, F)$, kde $\delta^{|}(q, x) = (\delta(q, x), +1)$.

□

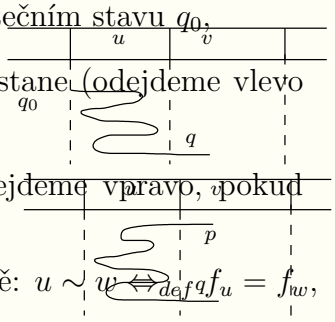
- Možnost pohybovat čtecí hlavou po pásce nezvětšila sílu konečného automatu (dokud na pásku nic nepíšeme!).
- Pro důkaz potřebujeme přípravu.

### Funkce $f_u$ popisující výpočet 2DFA nad slovem $u$

**Algorithm: Funkce $f_u$ popisující výpočet 2DFA nad slovem $u$**

Definujeme funkci $f_u : Q \cup \{q_0^{|}\} \to Q \cup \{0\}$

- $f_u(q_0^{|})$ popisuje v jakém stavu poprvé odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vlevo v počátečním stavu $q_0$,
- symbol 0 značí, že daná situace nenastane (odejdeme vlevo nebo cyklus),
- $f_u(p); p \in Q$ v jakém stavu opět odejdeme vpravo, pokud začneme výpočet vpravo v $p$
- Definujeme ekvivalenci slov následovně: $u \sim w \overset{def}{\Leftrightarrow} f_u = f_w$,
  - tj. slova jsou ekvivalentní pokud mají stejné 'výpočtové' funkce.



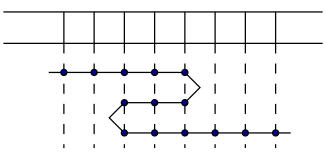

### Regulárnost 2DFA

Ekvivalence $\sim$ je ekvivalence, má konečný index, je to pravá kongruence, jazyk 2DFA odpovídá sjednocení tříd $f_w(q_0^{|}) \in F$.

Podle Myhill–Nerodovy věty je $L(A)$ regulární jazyk.

### Konstruktivní důkaz věty o 2DFA

- Potřebujeme převést návraty na lineární výpočet.
- Zajímají nás jen přijímající výpočty
- Díváme se na řezy mezi symboly (v jakém stavu přechází na další políčko)



Pozorování:

- stavy se v přechodu řezu střídají (doprava, doleva)
- první stav jde doprava, poslední také doprava
- v deterministických přijímajících výpočtech nejsou cykly
- první a poslední řez obsahují jediný stav.

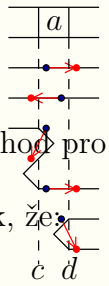
**Algorithm: 2DFA → NFA**

- Najdeme všechny možné řezy – posloupnosti stavů (je jich konečně mnoho).
- Mezi řezy definujeme nedeterministické přechody podle čteného symbolu.
- Rekonstruujeme výpočet skládáním řezů jako puzzle.

**Algorithm: Formální převod 2DFA na NFA**

Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je dvousměrný (deterministický) konečný automat. Definujeme ekvivalentní nedeterministický automat $B = (Q^{|}, \Sigma, \delta^{|}, (q_0), F^{|})$ kde:

- $Q^{|}$ jsou všechny korektní přechodové posloupnosti
  - posloupnosti stavů $(q^1, \ldots, q^k); q^i \in Q$
  - délka posloupnosti je lichá $(k = 2m + 1)$
  - žádný stav se neopakuje na liché ani na sudé pozici $(\forall i \neq j)\ (q^{2i} \neq q^{2j})$ & $(\forall i \neq j)(q^{2i+1} \neq q^{2j+1})$
- $F^{|} = \{(q) | q \in F\}$ posloupnosti délky 1
- $\delta^{|}(c, a) = \{d | d \in Q^{|} \& c \xrightarrow{a} d$ je lokálně konzistentní přechod pro $a\}$
  - existuje bijekce: $h : c_{odd} \cup d_{even} \to c_{even} \cup d_{odd}$, tak, že:
  - zachovává uspořádání
  - pro $h(q) \in c_{even}$ je $(h(q), -1) = \delta(q, a)$
  - pro $h(q) \in d_{odd}$ je $(h(q), +1) = \delta(q, a)$.




$L(A) = L(B)$
Trajektorie 2DFA $A$ odpovídá řezům v FA $B$, odtud $L(A) = L(B)$.

### Příklad převodu 2DFA na NKA

Možné řezy a jejich přechody

- Mějme následující dvousměrný konečný automat:

| | a | b |
|---|---|---|
| $\to p$ | p,+1 | q,+1 |
| $*q$ | q,+1 | r,-1 |
| r | p,+1 | r,-1 |

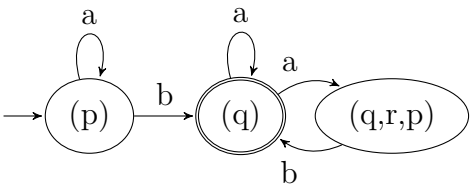
- Doleva jedině $r$ – všechny sudé pozice $r$, tj. jediná sudá
- možné řezy: $(p), (q), (p, r, q), (q, r, p)$.

| | a | b |
|---|---|---|
| $\to (p)$ | (p) | (q) |
| $*(q)$ | (q),(q,r,p) | |
| (p,r,q) | | |
| (q,r,p) | | (q) |

Ukázka (zacykleného, nepřijímajícího) výpočtu:

| a | a | b | a | a | b | a | a | b | b |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| p | p | p | q | q | q | | | | |
| | | | | r | | | | | |
| | | | | | p | q | q | q | |
| | | | | | | | r | | |
| | | | | | | | | p | q |
| | | | | | | | r | r | |
| | | | | | | | | p | q |
| | | | | | | | | . | . |

Výsledný NFA:




### Automaty s výstupem (motivace)

- Dosud jediná zpráva z automatu: 'Jsme v přijímajícím stavu'.
- Můžeme z FA získat více informací? Můžeme zaznamenat trasu výpočtu?

Moore: indikace stavů (všech, nejen koncových)

- v každé chvíli víme, kde se automat nachází
- Příklad: různé (regulární) čítače

Mealy: indikace přechodů

- po přečtení každého symbolu víme, co automat dělal
- Příklad: regulární překlad slov

Automat už není tak docela černá skříňka.

### Mooreův stroj

**Definition 5.3** (Mooreův stroj)**.** **Mooreovým (sekvenčním) strojem** nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu, q_0)$ resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \mu)$, kde

$Q$ je konečná neprázdná množina stavů

$\Sigma$ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)

$Y$ je konečná neprázdná množina symbolů (**výstupní abeceda**)

$\delta$ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$ (přechodová funkce)

$\mu$ je zobrazení $Q \to Y$ (**značkovací funkce**)

$q_0 \in Q$ (počáteční stav)

- Někdy nás nezajímá počáteční stav, ale jen práce automatu
- značkovací funkce umožňuje suplovat roli koncových stavů
  - $F \subseteq Q$ nahradíme značkovací funkcí $\mu : Q \to \{0, 1\}$ takto:
    $\mu(q) = 0$ pokud $q \notin F$,
    $\mu(q) = 1$ pokud $q \in F$.

### Příklad Mooreova stroje

*Example* 5.2 (Tenisový set). Mooreův stroj pro počítání tenisového skóre.

- Vstupní abeceda: ID hráče, který uhrál bod
- Výstupní abeceda & stavy: skóre (tj. $Q = Y$ a $\mu(q) = q$)

| Stav/výstup | A | B |
|---|---|---|
| 00:00 | 15:00 | 00:15 |
| 15:00 | 30:00 | 15:15 |
| 15:15 | 30:15 | 15:30 |
| 00:15 | 15:15 | 00:30 |
| 30:00 | 40:00 | 30:15 |
| 30:15 | 40:15 | 30:30 |
| 30:30 | 40:30 | 30:40 |
| 15:30 | 30:30 | 15:40 |
| 00:30 | 15:30 | 00:40 |
| 40:00 | A | 40:15 |
| 40:15 | A | 40:30 |
| 40:30 | A | shoda |
| 30:40 | shoda | B |
| 15:40 | 30:40 | B |
| 00:40 | 15:00 | B |
| shoda | A:40 | 40:B |
| A:40 | A | shoda |
| 40:B | shoda | B |
| A | 15:00 | 00:15 |
| B | 15:00 | 00:15 |

### Mealyho stroj

**Definition 5.4** (Mealyho stroj)**.** **Mealyho (sekvenčním) strojem** nazýváme šestici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M, q_0)$ resp. pětici $A = (Q, \Sigma, Y, \delta, \lambda_M)$, kde

$Q$ je konečná neprázdná množina stavů

$\Sigma$ je konečná neprázdná množina symbolů (vstupní abeceda)

$Y$ je konečná neprázdná množina symbolů (výstupní abeceda)

$\delta$ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Q$ (přechodová funkce)

$\lambda_M$ je zobrazení $Q \times \Sigma \to Y$ (**výstupní funkce**)

$q_0 \in Q$ (počáteční stav)

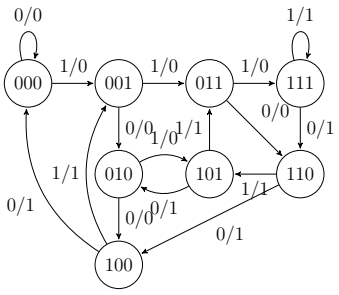
- Výstup je určen stavem a vstupním symbolem
  - Mealyho stroj je obecnějším prostředkem než stroj Mooreův
  - Značkovací funkci $\mu : Q \to Y$ lze nahradit výstupní funkcí $\lambda_M : Q \times \Sigma \to Y$ například takto:
    $\forall x \in \Sigma \ \lambda_M(q, x) = \mu(q)$
    nebo $\forall x \in \Sigma \ \lambda_M(q, x) = \mu(\delta(q, x))$

### Příklad Mealyho stroje

*Example* 5.3 (Mealyho stroj). Automat, který dělí vstupní slovo v binárním tvaru číslem 8 (celočíselně).

- Posun o tři bity doprava
- potřebujeme si pamatovat poslední trojici bitů
- vlastně tříbitová dynamická paměť

| Stav\symbol | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 000 | 000/0 | 001/0 |
| 001 | 010/0 | 011/0 |
| 010 | 100/0 | 101/0 |
| 011 | 110/0 | 111/0 |
| 100 | 000/1 | 001/1 |
| 101 | 010/1 | 011/1 |
| 110 | 100/1 | 101/1 |
| 111 | 110/1 | 111/1 |




- I když nevíme, kde automat startuje, po třech symbolech začne počítat správně.

### Výstup sekvenčních strojů

slovo ve vstupní abecedě → slovo ve výstupní abecedě

Mooreův stroj

značkovací funkce $\mu : Q \to Y$

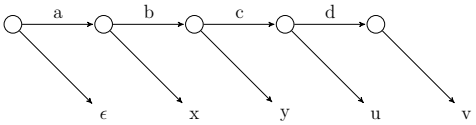
$\mu^* : Q \times \Sigma^* \to Y^*$

$\mu^*(q, \epsilon) = \epsilon$ (někdy $\mu^*(q, \epsilon) = q$)

$\mu^*(q, wx) = \mu^*(q, w).\mu(\delta^*(q, wx))$

Příklad: $\mu^*$(00:00,AABA)=(00:00 .) 15:00 . 30:00 . 30:15 . 40:15

Mealyho stroj



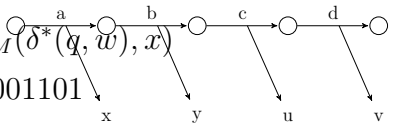

výstupní funkce $\lambda_M : Q \times \Sigma \to Y$

$\lambda_M^* : Q \times \Sigma^* \to Y^*$

$\lambda_M^*(q, \epsilon) = \epsilon$

$\lambda_M^*(q, wx) = \lambda_M^*(q, w).\lambda_M(\delta^*(q, w), x)$

Příklad: $\lambda_M^*$(000,1101010)=0001101




**Konečné automaty – shrnutí**

Konečný automat

- redukovaný deterministický automat (lze definovat i jednoznačný)
- nedeterminismus $\epsilon$–NFA, $2^n$, (dvousměrný FA $n^n$)

Regulární výrazy

Automaty a jazyky

- regulární jazyky
- uzavřenost na množinové operace
- uzavřenost na řetězcové operace
- uzavřenost na substituci, homomorfizmus a inverzní homomorfizmus,
- automaty výše i regulární výrazy popisují stejnou třídu jazyků.

Charakteristika regulárních jazyků

- Mihyll–Nerodova věta (kongruence)
- Kleeneova věta (elementární jazyky a operace)
- Iterační (pumping) lemma (iterace podslov, jen nutná podmínka).

Dvousměrný automat, pokud nesmí psát na pásku, přijímá jen regulátrní jazyky.

# 6 Gramatiky, Chomského hierarchie, víceznačnost

**Palindromy**

**Definition** (palindrom)**.** **Palindrom** je řetězec $w$ stejný při čtení zepředu i zezadu, tj. $w = w^R$.

- Příklady: `'otto'`; `'Madam, I'm Adam'`.

*Lemma.* Jazyk $L_{pal} = \{w | w = w^R, w \in \Sigma^*\}$ není regulární.

*Example* 6.1 (Bezkontextová gramatika pro palindromy). $G = (\{S\}, \{o, t\}, P, S)$, $P =$
1. $S \to \epsilon$
2. $S \to o$
3. $S \to t$
4. $S \to oSo$
5. $S \to tSt$

Proof:

- Důkaz sporem. Předpokládejme $L_{pal}$ je regulární, nechť $n$ je konstanta z pumping lemma, uvažujme slovo: $w = o^n t o^n$.
- z pumping lemmatu lze rozložit na $w = xyz$, $y$ obsahuje jednu nebo více z prvních $n$ o-ček. Tedy $xz$ má být v $L_{pal}$ ale má méně o-ček vlevo od 't' než vpravo, tedy není palindrom. Iterační lemma pro jazyk $L_{pal}$ nedokáže najít $n$, proto $L_{pal}$ není regulární.

□

### Formální (generativní) gramatiky, Bezkontextové gramatiky

**Definition 6.1** (Formální (generativní) gramatika)**.** Formální (generativní) gramatika je $G = (V, T, P, S)$ složena z

- konečné množiny **neterminálů** (variables) $V$
- neprázdné konečné množiny **terminálních symbolů** (**terminálů**) $T$
- **počáteční symbol** $S \in V$.
- konečné množiny **pravidel** (**produkcí**) $P$ reprezentující rekurzivní definici jazyka. Každé pravidlo má tvar:
  - $\beta A \gamma \to \omega$, $A \in V, \beta, \gamma, \omega \in (V \cup T)^*$

    tj. levá strana obsahuje aspoň jeden neterminální symbol.

**Definition** (Bezkontextová gramatika CFG)**.** **Bezkontextová gramatika (CFG)** je $G = (V, T, P, S)$ gramatika, obsahující pouze pravidla tvaru

$A \to \omega$, $A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$.

### Chomského hierarchie

**Definition 6.2** (Klasifikace gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel)**.**

- **gramatiky typu 0** (**rekurzi**
  **spočetné jazyky** $\mathcal{L}_0$)

  pravidla v obecné formě $\alpha \to \omega$, $\alpha, \omega \in (V \cup T)^*, \alpha$ obsahuje neterminál
- **gramatiky typu 1** (**kontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_1$)
  - pouze pravidla ve tvaru $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$

    $A \in V, \gamma, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$**!**
  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \epsilon$, potom se ale $S$ nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla
- **gramatiky typu 2** (**bezkontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_2$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$
- **gramatiky typu 3** (regulární/**pravé lineární gramatiky**, regulární jazyky $\mathcal{L}_3$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega B, A \to \omega, A, B \in V, \omega \in T^*$.

### Uspořádanost Chomského hierarchie

- Chomského hierarchie definuje uspořádání tříd jazyků

$$\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$$

- dokonce vlastní podmnožiny (později)

  $\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1$ rekurzivně spočetné jazyky zahrnují kontextové jazyky

  pravidla $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$ obsahují vlevo neterminál $A$

  $\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$ bezkontextové jazyky zahrnují regulární jazyky

  pravidla $A \to \omega B, A \to \omega$ obsahují vpravo řetězec $(V \cup T)^*$

  $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2$ kontextové jazyky zahrnují bezkontextové jazyky

  problém je s pravidly typu $A \to \epsilon$, ale ta umíme eliminovat.

*Example* 6.2 (Notace).

| | |
|---|---|
| $a, b, c, 1, *, ($ | terminály |
| $A, B, C$ | neterminály, proměnné |
| $w, z$ | řetězec terminálů |
| $X, Y$ | buď terminál nebo neterminál |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | řetězec $(T \cup V)^*$ |
| $A \to \alpha \vert \beta$ | $\{A \to \alpha, A \to \beta\}$, OR, kompaktní zápis více pravidel. |

**Definition 6.3** (Derivace $\Rightarrow^*$)**.** Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$.

- Říkáme, že $\alpha$ se **přímo přepíše** na $\omega$ (píšeme $\alpha \Rightarrow_G \omega$ nebo $\alpha \Rightarrow \omega$) jestliže

  $\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta\beta\nu$, $\omega = \eta\gamma\nu$ a $(\beta \to \gamma) \in P$.

- Říkáme, že $\alpha$ se **přepíše** na $\omega$ (píšeme $\alpha \Rightarrow^* \omega$) jestliže

  $\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_n = \omega$,
  tj. také $\alpha \Rightarrow^* \alpha$.

- Posloupnost $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nazýváme **derivací (odvozením)**.

- Pokud $\forall i \neq j : \beta_i \neq \beta_j$, hovoříme o **minimálním odvození**.

- Libovolný řetězec $\omega \in (T \cup V)^*$ odvoditelný z počátečního symbolu nazýváme **sentenciální forma**.

**Definition 6.4** (Jazyk generovaný gramatikou $G$)**.** **Jazyk** $L(G)$ generovaný gramatikou $G = (V, T, P, S)$ je množina terminálních řetězců, pro které existuje derivace ze startovního symbolu

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow_G^* w\}.$$

**Jazyk neterminálu** $A \in V$ definujeme $L(A) = \{w \in T^* | A \Rightarrow_G^* w\}$.

### Gramatiky typu 3 a regulární jazyky

**Definition** (Gramatika typu 3, pravá lineární)**.** Gramatika $G$ je **pravá lineární, tj. regulární, Typu 3**, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $A \to wB, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

*Example* 6.3 (Příklad derivace gramatiky typu 3). $P = \{S \to 0S|1A|\epsilon,\ A \to 0A|1B,\ B \to 0B|1S\}$

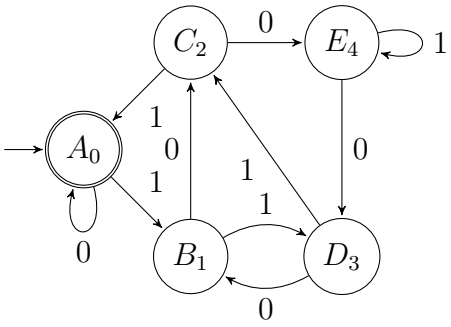
$$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011B \Rightarrow 0110B \Rightarrow 01101S \Rightarrow 01101$$

- Pozorování:
  - každá sentenciální forma derivace obsahuje právě jeden neterminál
  - tento neterminál je vždy umístěn zcela vpravo
  - aplikací pravidla $A \to w$ se derivace uzavírá
  - krok derivace generuje symboly a změní neterminál
- Idea vztahu gramatiky a konečného automatu
- neterminál = stav konečného automatu
- pravidla = přechodová funkce.

### Příklad převodu FA na gramatiku

*Example* 6.4 (G, FA binární zápis čísla dělitelného 5). $L = \{w|w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného $5\}$

$$\begin{aligned} A &\to 1B|0A|\epsilon \\ B &\to 0C|1D \\ C &\to 0E|1A \\ D &\to 0B|1C \\ E &\to 0D|1E \end{aligned}$$




Příklady derivací

$$\begin{aligned} &A \Rightarrow 0A \Rightarrow 0 && (0) \\ &A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 101 && (5) \\ &A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 1010A \Rightarrow 1010 && (10) \\ &A \Rightarrow 1B \Rightarrow 11D \Rightarrow 111C \Rightarrow 1111A \Rightarrow 1111 && (15) \end{aligned}$$

### Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

**Theorem 6.1** ($L \in RE \Rightarrow L \in \mathcal{L}_3$)**.** *Pro každý jazyk rozpoznávaný konečným automatem existuje gramatika typu 3, která ho generuje.*

**Proof: Převod konečného automatu na gramatiku typu 3**

- $L = L(A)$ pro deterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- definujme gramatiku $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, kde pravidla $P$ mají tvar

  $p \to aq$, když $\delta(p, a) = q$
  $p \to \epsilon$, když $p \in F$
- je $L(A) = L(G)$?
  - $\epsilon \in L(A) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow (q_0 \to \epsilon) \in P \Leftrightarrow \epsilon \in L(G)$
  - $a_1 \dots a_n \in L(A) \Leftrightarrow \exists q_0, \dots, q_n \in Q$ tž. $\delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}, q_n \in F$
    $\Leftrightarrow (q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \dots a_1 \dots a_n q_n \Rightarrow a_1 \dots a_n)$ je derivace pro $a_1 \dots a_n$
    $\Leftrightarrow a_1 \dots a_n \in L(G)$

□

### Příprava převodu gramatiky typu 3 na FA

- Opačný směr
  - pravidla $A \to aB$ kódujeme do přechodové funkce
  - pravidla $A \to \epsilon$ určují koncové stavy
  - pravidla $A \to a_1 \dots a_n B, A \to a_1 \dots a_n$ s více neterminály rozepíšeme
    - zavedeme nové neterminály $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$
    - vytvoříme pravidla $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \dots, Y_n \to a_n B$
    - resp. $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \epsilon$
  - pravidla $A \to B$ odpovídají $\epsilon$ přechodům
    - zbavíme se jich tranzitivním uzávěrem
    - nebo musíme tranzitivně uzavřít $S \to B$ pro hledání $S \to \epsilon$.

*Lemma.* Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$.

### Standardizace gramatiky typu 3

*Lemma.* Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$.

*Proof.* Pro gramatiku $G = (V, T, S, P)$ definujeme $G^| = (V^|, T, S, P^|)$, kde pro každé pravidlo zavedeme dostatečný počet nových neterminálů $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$ a definujeme

| P | $P^\|$ |
|---|---|
| $A \to aB$<br>$A \to \epsilon$<br>$A \to a_1 \dots a_n B$<br>$Z \to a_1 \dots a_n$ | $A \to aB$<br>$A \to \epsilon$<br>$A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \dots Y_n \to a_n B$<br>$Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \epsilon$ |
| odstraníme i pravidla:<br>$A \to B$ | <br>tranzitivní uzávěr $U(A) = \{B \mid B \in V \& A \Rightarrow^* B\}$<br>$A \to \gamma$ pro všechna $Z \in U(A)$ a $(Z \to \gamma) \in P^\|$ |

□

**Pouze pravidla** $A \to aB, A \to \epsilon$

*Example* 6.5.

| P | $P^\|$ |
|---|---|
| $B \to a_1$ | $B \to a_1 H_1, H_1 \to \epsilon$ |
| | $U(A) = \{A, B\}$, proto |
| $A \to B$ | $A \to a_1 H_2, H_2 \to \epsilon$ |
| $A \to a_2$ | $A \to a_2 H_3, H_3 \to \epsilon$ |

### Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

**Theorem 6.2** (ϵ–NFA pro gramatiku typu 3 rozpoznávající stejný jazyk)**.** *Pro každý jazyk $L$ generovaný gramatikou typu 3 existuje ϵ–NFA rozpoznávající $L$.*

Proof: Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

- Vezmeme $G = (V, T, P, S)$ obsahující jen pravidla tvaru $A \to aB$, $A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$ generující $L$ (předchozí lemma)
- definujeme nedeterministický ϵ–NFA $A = (V, T, \delta, S, F)$, kde:

  $F = \{A | (A \to \epsilon) \in P\}$

  $\delta(A, a) = \{B | (A \to aB) \in P\}$
- $L(G) = L(A)$
  - $\epsilon \in L(G) \Leftrightarrow (S \to \epsilon) \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \epsilon \in L(A)$
  - $a_1 \dots a_n \in L(G) \Leftrightarrow$ existuje derivace $(S \Rightarrow a_1 H_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_n H_n \Rightarrow a_1 \dots a_n)$

  $\Leftrightarrow \exists H_0, \dots, H_n \in V$ tak že $H_0 = S, H_n \in F$
  $H_{i+1} \in \delta(H_i, a_k)$ pro krok $a_1 \dots a_{k-1} H_i \Rightarrow a_1 \dots a_{k-1} a_k H_{i+1}$

  $\Leftrightarrow a_1 \dots a_n \in L(A)$

□

### Levé (a pravé) lineání gramatiky

**Definition 6.5** (Levé (a pravé) lineání gramatiky)**.** Gramatiky typu 3 nazýváme také **pravé lineární** (neterminál je vždy vpravo).

Gramatika $G$ je **levá lineání**, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \to Bw, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

*Lemma.* Jazyky generované levou lineání gramatikou jsou právě regulární jazyky.

Proof:

⇒ 'otočením' pravidel levé lineární gramatiky dostaneme pravou lineární

$A \to Bw, A \to w$ převedeme na $A \to w^R B, A \to w^R$

- získaná gramatika generuje jazyk $L^R$, najdeme automat
- víme, že regulární jazyky jsou uzavřené na reverzi,

  $L^R$ je regulární, tudíž i $L = (L^R)^R$ je regulární

⇐ takto lze získat všechny regulární jazyky

  - (FA⇒reverze⇒ pravá lineární gramatika⇒ levá lineární gramatika)

□

### Lineární gramatiky (a jazyky)

- Levá a pravá lineární pravidla dohromady jsou už silnější.

**Definition 6.6** (lineární gramatika, jazyk)**. Gramatika je lineární**, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \to uBw, A \to w, A, B \in V, u, w \in T^*$ (na pravé straně vždy maximálně jeden neterminál).

**Lineární jazyky** jsou právě jazyky generované lineáními gramatikami.

- Zřejmě platí: regulární jazyky $\subseteq$ lineární jazyky.

- Jde o vlastní podmnožinu $\subsetneq$.

*Example* 6.6 (lineární, neregulární jazyk). Jazyk $L = \{0^i 1^i | i \geq 1\}$ není regulární jazyk, ale je lineární, generovaný gramatikou s pravidly $S \to 0S1|01$.

Pozorování:

- lineární pravidla lze rozložit na levě a pravě lineání pravidla: $S \to 0A, A \to S1$.

**Bezkontextová gramatika pro jednoduché výrazy**

**Definition** (Bezkontextová gramatika)**.** Bezkontextová gramatika je gramatika, kde všechna pravidla jsou tvaru $A \to \omega, \omega \in (V \cup T)^*$.

*Example* 6.7 (CFG pro jednoduché výrazy). Gramatika pro jednoduché výrazy $G = (\{E, I\}, \{+, *, (, ), a, b, 0, 1\}, P, E)$, $P$ jsou pravidla vypsaná vpravo.

- Pravidla 1–4 definují výraz.
- Pravidla 5–10 definují identifikátor $I$, odpovídající regulárnímu výrazu $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*$.

CFG pro jednoduché výrazy

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$

5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

**Derivační strom**

**Definition 6.7** (Derivační strom)**.** Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$. **Derivační strom** pro $G$ je strom, kde:

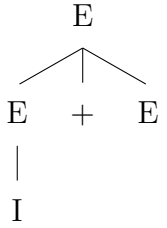
- Kořen (kreslíme nahoře) je označen startovním symbolem $S$,
- každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem $V$.
- Každý uzel je ohodnocen prvkem $\in V \cup T \cup \{\epsilon\}$.
- Je–li uzel ohodnocen $\epsilon$, je jediným dítětem svého rodiče.
- Je–li $A$ ohodnocení vrcholu a jeho děti *zleva pořadě* jsou ohodnoceny $X_1, \ldots, X_k$, pak $(A \to X_1 \ldots X_k) \in P$ je pravidlo gramatiky.

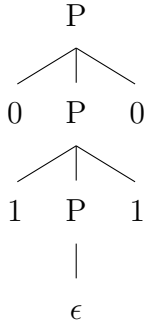
**Notation** 1 (Terminologie stromů). Uzly, rodiče, děti, kořen, vnitřní uzly, listy, následníci, předci.

- Stromová struktura reprezentuje zdrojový program v překladači. Struktura usnadňuje překlad do strojového kódu.

**Příklady stromů, Strom dává sentenciální formu, slovo**

Derivační strom $E \Rightarrow^* I + E$. Derivační strom $P \Rightarrow^* 0110$.




**Definition 6.8** (Strom dává slovo (yield))**.** Říkáme, že **derivanční strom dává sentenciální formu** $\alpha$ **(slovo** $w$**)**, jestliže je $\alpha$ ($w$) zřetězení listů bráno zleva doprava.

### Levá a pravá derivace

**Definition 6.9** (Levá a pravá derivace)**. Levá derivace** (leftmost) $\Rightarrow_{lm}$, $\Rightarrow_{lm}^*$ v každém kroku přepisuje nejlevnější neterminál.

**Pravá derivace** (rightmost) $\Rightarrow_{rm}$, $\Rightarrow_{rm}^*$ v každém kroku přepisuje nejpravější neterminál.

*Example* 6.8 (levá derivace). $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E \Rightarrow_{lm} a*(E) \Rightarrow_{lm} a*(E+E) \Rightarrow_{lm} a*(I+E) \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(a+E) \Rightarrow_{lm} a*(a+I) \Rightarrow_{lm} a*(a+I0) \Rightarrow_{lm} a*(a+I00) \Rightarrow_{lm} a*(a+b00)$

Pravá derivace používá stejné přepisy, jen je provádí v jiném pořadí.

*Example* 6.9 (rightmost derivation). $E \Rightarrow_{rm} E*E \Rightarrow_{rm} E*(E) \Rightarrow_{rm} E*(E+E) \Rightarrow_{rm} E*(E+I) \Rightarrow_{rm} \Rightarrow_{rm} E*(E+I0) \Rightarrow_{rm} E*(E+I00) \Rightarrow_{rm} E*(E+b00) \Rightarrow_{rm} \Rightarrow_{rm} E*(I+b00) \Rightarrow_{rm} E*(a+b00) \Rightarrow_{rm} I*(a+b00) \Rightarrow_{rm} a*(a+b00)$

### Derivace a derivační stromy

**Theorem 6.3.** *Pro danou gramatiku $G = (V, T, P, S)$ a $w \in T^*$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

*<+-> $A \Rightarrow_{lm}^* w$.*

*<+-> $A \Rightarrow^* w$.*

*<+-> Existuje derivační strom s kořenem $A$ dávající slovo $w$.*

$1 \Rightarrow 2$ Levá derivace je derivace, druhý bod z prvního plyne triviálně.

$2 \Rightarrow 3$ Z derivace vytvoříme strom tak, že kořen ohodnotíme počátečním neterminálem a každé pravidlo v derivaci 'zavěsíme' pod uzel odpovídající přepisovanému neterminálu.

$3 \Rightarrow 1$ Pro důkaz ekvivalence zbývá pro libovolný derivační strom najít levou derivaci.

### Od stromů k derivaci

*Lemma.* Mějme CFG $G = (V, T, P, S)$ a derivační strom s kořenem $A$ dávající slovo $w \in T^*$.
Pak existuje levá derivace $A \Rightarrow_{lm}^* w$ v $G$.

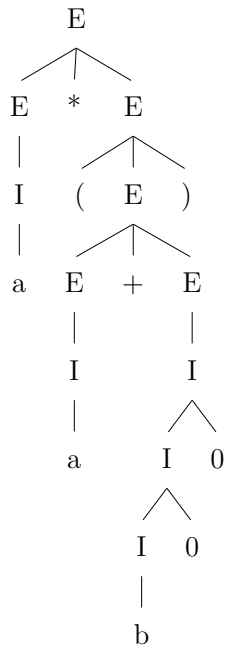
**Příprava důkazu: 'obalení derivace'**
Mějme následující derivaci:

$$E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \rightarrow ab.$$

Pro libovolná slova $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ je také derivace:

$$\alpha E \beta \Rightarrow \alpha I \beta \Rightarrow \alpha I b \beta \Rightarrow \alpha a b \beta.$$

### Příklad levé derivace z derivačního stromu




Je příjemnější zachytit derivaci stromem.

- Kořen: $E \Rightarrow_{lm} E*E$
- Levé dítě kořene: $E \Rightarrow_{lm} I \Rightarrow_{lm} a$
- Kořen a levé dítě: $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E$
- Pravé dítě kořene: $E \Rightarrow_{lm} (E) \Rightarrow_{lm} (E+E) \Rightarrow_{lm} (I+E) \Rightarrow_{lm} (a+E) \Rightarrow_{lm} (a+I) \Rightarrow_{lm} (a+I0) \Rightarrow_{lm} (a+I00) \Rightarrow_{lm} (a+b00)$
- Plná derivace:

  $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(E) \Rightarrow_{lm} a*(E+E) \Rightarrow_{lm} a*(I+E) \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(a+E) \Rightarrow_{lm} a*(a+I) \Rightarrow_{lm} a*(a+I0) \Rightarrow_{lm} \Rightarrow_{lm} a*(a+I00) \Rightarrow_{lm} a*(a+b00)$.

**Proof: ∃ derivační strom pak existuje levá derivace $\Rightarrow_{lm}$**

Indukcí podle výšky stomu.

- Základ: výška 1: Kořen $A$ s dětmi dávajícími $w$. Je to derivační strom, proto, $A \to w$ je pravidlo $\in P$, tedy $A \Rightarrow_{lm} w$ v jednom kroku.
- Indukce: výška $n > 1$. Kořen $A$ s dětmi $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
  - Je–li $X_i \in T$, definujeme $w_i \equiv X_i$.
  - Je–li $X_i \in V$, z indukčního předpokladu $X_i \Rightarrow^*_{lm} w_i$.

  Levou derivaci konstruujeme induktivně pro $i = 1, \ldots, k$ složíme $A \Rightarrow^*_{lm} w_1 w_2 \ldots w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k$.
  - Pro $X_i \in T$ jen zvedneme čítač $i++$.
  - Pro $X_i \in V$ přepíšeme derivaci: $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \ldots \Rightarrow_{lm} w_i$ na

$$\begin{aligned} &w_1 w_2 \ldots w_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k \Rightarrow_{lm} \\ &w_1 w_2 \ldots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k \Rightarrow_{lm} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ &\Rightarrow_{lm} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k. \end{aligned}$$

  Pro $i = k$ dostaneme levou derivaci $w$ z $A$.

□

### Ekvivalence gramatik

**Definition 6.10** (ekvivalence gramatik)**.** Gramatiky $G_1, G_2$ jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(G_1) = L(G_2)$, tj. generují stejný jazyk.

# 7 Chomského NF, Pumping Lemma pro CFL,CYK – náležení do CFL

### Bezkontextové gramatiky (CFG) v Chomského normální formě

- Chomského normální forma bezkontextové gramatiky:
  - neobsahuje zbytečné symboly
  - všechna pravidla tvaru $A \to BC$ nebo $A \to a$, $A, B, C$ jsou neterminály, $a$ terminál.
  - Pro každý bezkontextový jazyk $L$, kde $L \setminus \{\epsilon\} \neq \emptyset$ existuje gramatika v Chomského normálním tvaru, která generuje $L \setminus \{\epsilon\}$.

Postupně provedeme zjednodušení gramatiky, nejdřív:

- Eliminace *zbytečných symbolů*
- eliminace $\epsilon$*–pravidel* $A \to \epsilon$; $A \in V$
- eliminace *jednotkových pravidel* $A \to B$ pro $A, B \in V$.
- To vše potřebujeme k formulaci iteračního lemmatu pro bezkontextové jazyky.
- A ověření, zda zadaný řetězec patří do jazyka gramatiky pomocí Cocke-Younger-Kasami algoritmu.

### Eliminace zbytečných symbolů

**Definition 7.1** (zbytečný, užitečný, generující, dosažitelný symbol)**.**

- Symbol $X$ je **užitečný** v gramatice $G = (V, T, P, S)$ pokud existuje derivace tvaru $S \Rightarrow^* \alpha X \beta \Rightarrow^* w$ kde $w \in T^*, X \in (V \cup T)$, $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.
- Pokud $X$ není užitečný, říkáme, že je **zbytečný**.
- $X$ je **generující** pokud $X \Rightarrow^* w$ pro nějaké slovo $w \in T^*$. Vždy $w \Rightarrow^* w$ v nula krocích.
- $X$ je **dosažitelný** pokud $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$ pro nějaká $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$.

Chceme eliminovat ne–generující a ne–dosažitelné symboly.

*Example* 7.1. Uvažujme gramatiku: $S \to AB|a$ $A \to b$ Eliminujeme $B$ (ne–generující): $S \to a$ $A \to b$. Eliminujeme $A$ (nedosažitelný): $S \to a$.

*Lemma* 7.1 (Eliminace zbytečných symbolů). Nechť $G = (V, T, P, S)$ je CFG, předpokládejme $L(G) \neq \emptyset$. Zkonstruujeme $G_1 = (V_1, T_1, P_1, S)$ následovně:

- Eliminujeme ne–generující symboly a pravidla je obsahující
- poté eliminujeme všechny nedosažitelné symboly

Pak $G_1$ nemá zbytečné symboly a $L(G_1) = L(G)$.

**Algorithm: Generující symboly**

Základ Každý $a \in T$ je generující.

Indukce Pro každé pravidlo $A \to \alpha$, kde každý symbol v $\alpha$ je generující. Pak i $A$ je generující.
(Včetně $A \to \epsilon$).

**Algorithm: Dosažitelné symboly**

Základ $S$ je dosažitelný.

Indukce Je–li $A$ dosažitelný, pro všechna pravidla $A \to \alpha$ jsou všechny symboly v $\alpha$ dosažitelné.

*Lemma* 7.2 (generující/dosažitelné symboly). Výše uvedené algoritmy najdou právě všechny generující / dosažitelné symboly.

### Eliminace $\epsilon$ pravidel

**Definition 7.2** (nulovatelný neterminál)**.** Neterminál $A$ je **nulovatelný** pokud $A \Rightarrow^* \epsilon$.

Pro nulovatelné neterminály na pravé straně pravidla $B \to CAD$, vytvoříme dvě verze pravidla – s a bez nulovatelného neterminálu.

**Algorithm: Nalezení nulovatelných symbolů v $G$**

Základ Pokud $A \to \epsilon$ je pravidlo $G$, pak $A$ je nulovatelné.

Indukce Pokud $B \to C_1 \dots C_k$, kde jsou všechna $C_i$ nulovatelná, je i $B$ nulovatelné (terminály nejsou nulovatelné nikdy).

**Algorithm: Konstrukce gramatiky bez $\epsilon$–pravidel z $G$**

- Najdi nulovatelné symboly
- Pro každé pravidlo $A \to X_1 \dots X_k \in P, k \geq 1$, nechť $m$ z $X_i$ je nulovatelných. Nová gramatika $G_1$ bude mít $2^m$ verzí tohoto pravidla s/bez každého nulovatelného symbolu kromě $\epsilon$ v případě $m = k$.

### Příklad eliminace $\epsilon$–pravidel

*Example* 7.2. Mějme gramatiku: $S \to AB \; A \to aAA|\epsilon \; B \to bBB|\epsilon$ $S \to AB|A|B \; A \to aAA|aA|aA|a \; B \to bBB|bB|bB|b$ Výsledná gramatika:$S \to AB|A|B \; A \to aAA|aA|a \; B \to bBB|bB|b$.

### Eliminace jednotkových pravidel

**Definition 7.3** (jednotkové pravidlo)**. Jednotkové pravidlo** je $A \to B \in P$ kde $A, B$ jsou oba neterminály.

*Example* 7.3. $I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1 \; F \to I|(E) \; T \to F|T * F \; E \to T|E + T$ Expanze $T$ v $E \to T \; E \to F|T * F$ Expanze $E \to F \; E \to I|(E)$ Expanze $E \to I \; E \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$

Dohromady: $E \to a|b|Ia|Ib|I0|I1|(E)|T * F|E + T$.

Musíme se vyhnout možným cyklům.

**Definition 7.4** (jednotkový pár)**.** Dvojici $A, B \in V$ takovou, že $A \Rightarrow^* B$ pouze jednotkovými pravidly nazýváme **jednotkový pár** (jednotková dvojice).

**Algorithm: Nalezení jednotkových párů**

Základ $(A, A)$ pro každý $A \in V$ je jednotkový pár.

Indukce Je–li $(A, B)$ jednotkový pár a $(B \to C) \in P$, pak $(A, C)$ je jednotkový pár.

*Example* 7.4 (Jednotkové páry z předchozí gramatiky). $(E, E), (T, T), (F, F), (I, I), (E, T), (E, F), (E, I), (T, F)$,

**Algorithm: Eliminace jednotkových pravidel z $G$**

- najdi všechny jednotkové páry v $G$
- pro každý jednotkový pár $(A, B)$ dáme do nové gramatiky všechna pravidla $A \to \alpha$ kde $B \to \alpha \in P$ a $B \to \alpha$ není jednotkové pravidlo.

*Example* 7.5.

$I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$ $F \to I|(E)$ $T \to F|T * F$ $E \to T|E + T$

$I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$ $F \to (E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1$ $T \to T * F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1$ $E \to E + T|T * F|(E)|a|b|Ia|Ib|I0|I1$

### Gramatiky v normálním tvaru

*Lemma* 7.3 (Gramatika v normálním tvaru, redukovaná). Mějme bezkontextovou gramatiku $G$, $L(G) - \{\epsilon\} \neq \emptyset$. pak existuje CFG $G_1$ taková že $L(G_1) = L(G) - \{\epsilon\}$ a $G_1$ neobsahuje $\epsilon$–pravidla, jednotková pravidla ani zbytečné symboly. Gramatika $G_1$ se nazývá **redukovaná**.

*Redukce bezkontextové gramatiky.* Idea důkazu:

- Začneme eliminací $\epsilon$–pravidel.
- Eliminujeme jednotková pravidla. Tím nepřidáme $\epsilon$–pravidla.
- Eliminujeme zbytečné symboly. Tím nepřidáme žádná pravidla.
  - Nejdříve negenerující,
  - pak nedosažitelné.

□

**Definition 7.5** (Chomského normální tvar)**.** O bezkontextové gramatice $G = (V, T, P, S)$ bez zbytečných symbolů kde jsou všechna pravidla v jednom ze dvou tvarů

- $A \to BC$, $A, B, C \in V$,
- $A \to a$, $A \in V$, $a \in T$,

říkáme, že je v **Chomského normálním tvaru (ChNF)**.

Potřebujeme dva další kroky:

- pravé strany délky 2 a více předělat na samé neterminály
- rozdělit pravé strany délky 3 a více neterminálů na více pravidel

**Algorithm: neterminály**

- Pro každý terminál $a$ vytvoříme nový neterminál, řekněme $A$,
- přidáme pravidlo $A \to a$,
- použijeme $A$ místo $a$ na pravé straně pravidel délky 2 a více.

**Algorithm: rozdělení pravidel**

- Pro pravidlo $A \to B_1 \dots B_k$ zavedeme $k - 2$ neterminálů $C_i$
- Přidáme pravidla $A \to B_1C_1$,$C_1 \to B_2C_2$, …,$C_{k-2} \to B_{k-1}B_k$.

**Theorem 7.1** (Chomského normální tvar bezkontextové gramatiky)**.** *Mějme bezkontextovou gramatiku $G$, $L(G) - \{\epsilon\} \neq \emptyset$. Pak existuje CFG $G_1$ v Chomského normálním tvaru taková, že $L(G_1) = L(G) - \{\epsilon\}$.*

*Example* 7.6. $I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$ $F \to I|(E)$ $T \to F|T * F$ $E \to T|E + T$
$I \to a|b|IA|IB|IZ|IU$ $F \to LER|a|b|IA|IB|IZ|IU$ $T \to TMF|LER|a|b|IA|IB|IZ|IU$ $E \to EPT|TMF|L$
$A \to a$ $B \to b$ $Z \to 0$ $U \to 1$ $P \to +$ $M \to *$ $L \to ($ $R \to )$ $F \to LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU$
$T \to TC_2|LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU$ $E \to EC_1|TC_2|LC_3|a|b|IA|IB|IZ|IU$ $C_1 \to PT$ $C_2 \to MF$ $C_3 \to ER$
$I, A, B, Z, U, P, M, L, R$ jako vlevo

### Příprava na (pumping) lemma o vkládání

*Lemma* (Velikost derivačního stromu gramatiky v CNF). Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v Chomského normálním tvaru, který dává slovo $w$. Je–li délka nejdelší cesty $n$, pak $|w| \leq 2^{n-1}$.

*Proof.* Indukcí podle $n$,

Základ $|a| = 1 = 2^0$

Indukce $2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

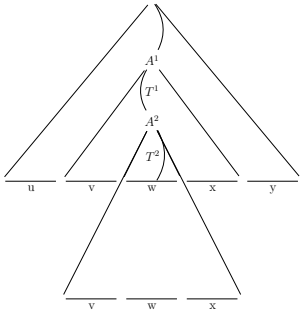
□

*Lemma* (Důsledek). Mějme derivační strom podle gramatiky $G = (V, T, P, S)$ v Chomského normální formě, který dává slovo $w$, $|w| > p = 2^{n-1}$. Pak ve stromě existuje cesta delší než $n$.

### Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky

**Theorem 7.2** (!!Lemma o vkládání (pumping) pro bezkontextové jazyky)**.** *Mějme bezkontextový jazyk $L$. Pak existuje přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že každé $z \in L, |z| > n$ lze rozložit na $z = uvwxy$ kde:*

- $|vwx| \leq n$
- $vx \neq \epsilon$
- $\forall i \geq 0$, $uv^iwx^iy \in L$.




**Idea důkazu:**

- vezmeme derivační strom pro $z$
- najdeme nejdelší cestu
- na ní dva stejné neterminály
- tyto neterminály určí dva podstromy
- podstromy definují rozklad slova
- nyní můžeme větší podstrom posunout ($i > 1$)
- nebo nahradit menším podstromem ($i = 0$)

Proof: $|z| > n : z = uvwxy, |vwx| \leq n, vx \neq \epsilon, \forall i \geq 0 uv^i wx^i y \in L$

- vezmeme gramatiku v Chomského NF (pro $L = \{\epsilon\}$ a $\emptyset$ zvol $n = 1$).
- Nechť $|V| = k$. Položíme $n = 2^k$.
- Pro $z \in L$,$|z| > 2^k$, má v derivačním stromu $z$ cestu délky $> k$
- vezmeme cestu maximální délky; terminál kam vede označíme $t$
- Aspoň dva z posledních $(k + 1)$ neterminálů na cestě do $t$ jsou stejné
- vezmeme dvojici $A^1, A^2$ nejblíže k $t$ (určuje podstromy $T^1, T^2$)
- cesta z $A^1$ do $t$ je nejdelší v podstromu $T^1$ a má délku maximálně $(k + 1)$

  tedy slovo dané stromem $T^1$ není delší než $2^k$ (tedy $|vwx| \leq n$)
- z $A^1$ vedou dvě cesty (ChNF), jedna do $T^2$ druhá do zbytku $vx$

  ChNF je nevypouštějící, tedy $vx \neq \epsilon$
- derivace slova $(A^1 \Rightarrow^* vA^2x, A^2 \Rightarrow^* w)$

  $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^2xy \Rightarrow^* uvwxy$
- posuneme–li $A^2$ do $A^1$ $(i = 0)$

  $S \Rightarrow^* uA^2y \Rightarrow^* uwy$
- posuneme–li $A^1$ do $A^2$ $(i = 2, 3, \ldots)$

  $S \Rightarrow^* uA^1y \Rightarrow^* uvA^1xy \Rightarrow^* uvvA^2xxy \Rightarrow^* uvvwxxy$. □

**Použití lemma o vkládání**

*Example* 7.7 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i 1^i 2^i | i \geq 1\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme $n$
- zvolme $z = |0^n 1^n 2^n| > n$

\# žádné dělení nesplňuje PL neboť

- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé symboly
- $vx \neq \epsilon$, iterací se slovo změní
- poruší se rovnost počtu symbolů – SPOR.

*Example* 7.8 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i 1^j 2^k | 0 \leq i \leq j \leq k\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme $n$
- zvolme $z = |0^n 1^n 2^n| > n$

\# žádné dělení nesplňuje PL neboť

- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé symboly
  - pokud 0 (nebo 1), pumpujeme nahoru – SPOR $i \leq j$ (nebo $j \leq k$)
  - pokud 2 (nebo 1), pumpujeme dolů – SPOR $j \leq k$ (nebo $i \leq j$)

**Použití lemma o vkládání**

*Example* 7.9 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{0^i1^j2^i3^j|i,j \geq 1\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme $n$
- zvolme $z = |0^n1^n2^n3^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé sousední symboly
- poruší se rovnost počtu symbolů 0 a 2 nebo 1 a 3 – SPOR.

*Example* 7.10 (ne–bezkontextový jazyk). Následující jazyk není bezkontextový

- $\{ww|w \in \{0,1\}^*\}$
- důkaz sporem: předpokládejme bezkontextovost
- z lemmatu o vkládání máme $n$
- zvolme $z = |0^n1^n0^n1^n| > n$
- pumpovací slovo $|vwx| \leq n$
- tj. vždy lze pumpovat maximálně dva různé sousední symboly
- poruší se buď rovnost nul či jedniček
  - rozeberete 4 případy, $vx$ obsahuje znak z prvních nul, prvních jedniček, druhých nul, druhých jedniček.

**Kdy lemma o vkládání nezabere**

- Lemma o vkládání je pouze implikace!

*Example* 7.11 (pumpovatelný, ne–bezkontextový jazyk). $L = \{a^ib^jc^kd^l|i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový jazyk, přesto lze pumpovat.

$i = 0 : b^jc^kd^l$ lze pumpovat v libovolném písmenu
$i > 0 : a^ib^nc^nd^n$ lze pumpovat v části obsahující $a$

Co s tím?

- zobecnění pumping lemmatu (Ogdenovo lemma)
  - pumpování vyznačených symbolů
- uzávěrové vlastnosti.

**Příklad gramatiky**

*Example* 7.12 (Uzávorkování v ChNF). Mějme gramatiku $G = (\{S, L, R\}, \{(,)\}, P, S)$, kde

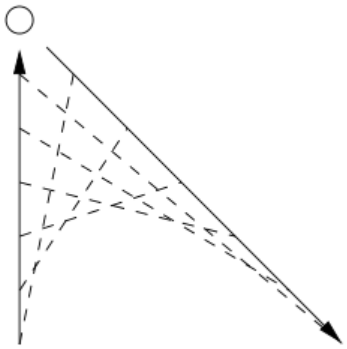
$$P = \begin{Bmatrix} S & \to & LR|SS|LA \\ A & \to & SR \\ L & \to & ( \\ R & \to & ) \end{Bmatrix}.$$

- $S \Rightarrow LR \Rightarrow (R \Rightarrow ()$
- $S \Rightarrow SS \Rightarrow LRS \Rightarrow (RS \Rightarrow ()S \Rightarrow ()LR \Rightarrow ()(R \Rightarrow ()()$
- $S \Rightarrow LA \Rightarrow (A \Rightarrow (SR \Rightarrow (LRR \Rightarrow ((RR \Rightarrow (()R \Rightarrow (())$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X_{15}$ | | | | |
| $X_{14}$ | $X_{25}$ | | | |
| $X_{13}$ | $X_{24}$ | $X_{35}$ | | |
| $X_{12}$ | $X_{23}$ | $X_{34}$ | $X_{45}$ | |
| $X_{11}$ | $X_{22}$ | $X_{33}$ | $X_{44}$ | $X_{55}$ |
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |

### Příklad CYK: pro slovo najít derivační strom

- Chceme rozhodnout, zda dané slovo $w$ patří do jazyka bezkontextové gramatiky
  - Vezmeme gramatiku v Chomského normální formě
  - exponenciální složitost: prozkoušíme všechny derivační stromy do hloubky $|n|$,
  - polynomiálně: Cocke-Younger-Kasami algoritmus.



*Example* 7.13 (CYK algoritmus).

Gramatika
$G = (\{S, A, L, R\}, \{(, )\}, P, S)$:

$$P = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & LR|SS|LA \\ A & \to & SR \\ L & \to & ( \\ R & \to & ) \end{array} \right\}$$

Tabulku vyplňujeme odspodu:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\{S\}$ | | | | | |
| $\{\}$ | $\{A\}$ | | | | |
| $\{\}$ | $\{S\}$ | $\{\}$ | | | |
| $\{\}$ | $\{\}$ | $\{\}$ | $\{A\}$ | | |
| $\{\}$ | $\{S\}$ | $\{\}$ | $\{S\}$ | $\{\}$ | |
| $\{L\}$ | $\{L\}$ | $\{R\}$ | $\{L\}$ | $\{R\}$ | $\{R$ |
| ( | ( | ) | ( | ) | ) |

### Cocke-Younger-Kasami algoritmus náležení slova do CFL

**Algorithm: CYK algoritmus, v čase $O(n^3)$**

- Mějme gramatiku v ChNF $G = (V, T, P, S)$ pro jazyk $L$ a slovo $w = a_1 a_2 \dots a_n \in T^*$.
- Vytvořme trojúhelníkovou tabulku (vpravo),
  - horizontální osa je $w$
  - $X_{ij}$ jsou množiny neterminálů $A$ takových, že $A \Rightarrow^* a_i a_{i+1} \dots a_j$.

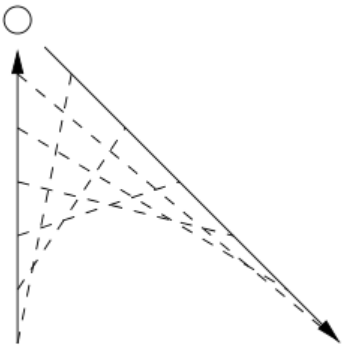
  Základ: $X_{ii} = \{A; A \to a_i \in P\}$

  Indukce: $X_{ij} = \{A \to BC; B \in X_{ik}, C \in X_{k+1,j}\}$
- Vyplňujeme tabulku zdola nahoru.

**Theorem 7.3** (CYK). *Slovo $w$ patří do jazyka gramatiky $G$ právě když je v CYK algoritmu $S \in X_{1,n}$.*

### Obecný příklad CYK

*Example* 7.14 (CYK algoritmus). Uvažujme gramatiku $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$: $P =$
$$\left\{\begin{array}{lll} S & \to & AB|BC \\ A & \to & BA|a \\ B & \to & CC|b \\ C & \to & AB|a \end{array}\right\}.$$



Pravidla pozpátku:

$$\begin{array}{rcl} AB & \to & \{S, C\} \\ BA & \to & \{A\} \\ BC & \to & \{S\} \\ CC & \to & \{B\} \\ b & \to & \{B\} \\ a & \to & \{A, C\} \end{array}$$

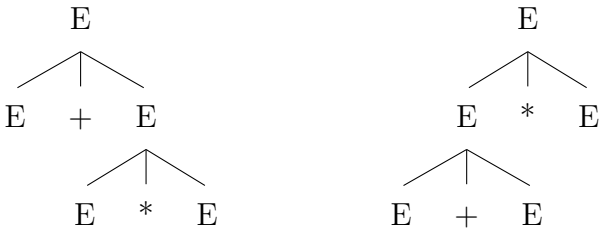
Tabulku vyplňujeme odspodu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\{S, A, C\}$ | | | | |
| - | $\{S, A, C\}$ | | | |
| - | $\{B\}$ | $\{B\}$ | | |
| $\{S, A\}$ | $\{B\}$ | $\{S, C\}$ | $\{S, A\}$ | |
| $\{B\}$ | $\{A, C\}$ | $\{A, C\}$ | $\{B\}$ | $\{A, C\}$ |
| $b$ | $a$ | $a$ | $b$ | $a$ |

**Víceznačnost gramatik**

$$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E \quad E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$$

Dvě derivace téhož výrazu:

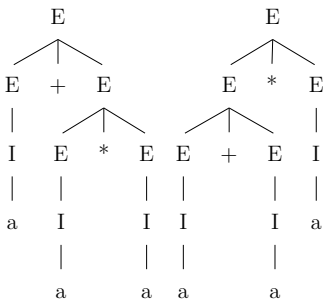



- Rozdíl je důležitý, vlevo $1 + (2 * 3) = 7$, vpravo $(1 + 2) * 3 = 9$.
- Tato gramatika může být modifikovaná na jednoznačnou.

*Example* 7.15. Různé derivace mohou reprezentovat stejný derivační strom, pak není problém.
1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow I + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + I \Rightarrow a + b$
2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + I \Rightarrow I + I \Rightarrow I + b \Rightarrow a + b$.

**Definition 7.6** (Jednoznačnost a víceznačnost CFG).
- Bezkontextová gramatika $G = (V, T, P, S)$ je **víceznačná** pokud existuje aspoň jeden řetězec $w \in T^*$ pro který můžeme najít dva různé derivační stromy, oba s kořenem $S$ dávající slovo $w$.
- V opačném případě nazýváme gramatiku **jednoznačnou**.
- Bezkontextový jazyk $L$ je **jednoznačný**, jestliže existuje jednoznačná CFG $G$ tak, že $L = L(G)$.
- **Bezkontextový jazyk $L$ je (podstatně) nejednoznačný**, jestliže každá CFG $G$ taková, že $L = L(G)$, je nejednoznačná. Takovému jazyku říkáme i **víceznačný**.

*Example* 7.16 (nejednoznačnost CFG). Dva derivační stromy dávající $a+a*a$ ukazující víceznačnost gramatiky.




**Příklad víceznačného jazyka**

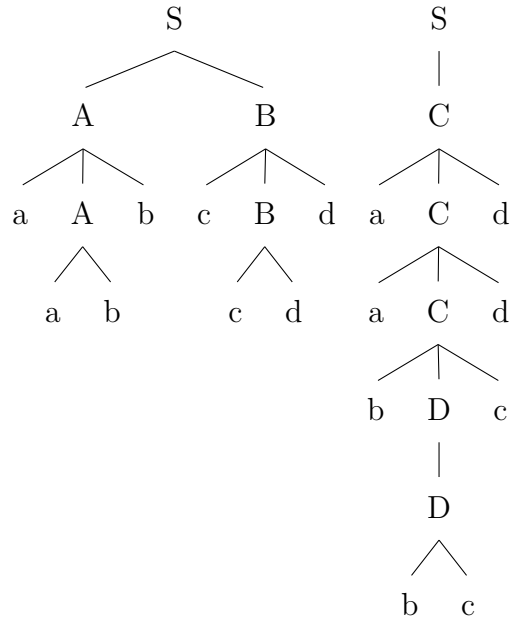
*Example* 7.17 (Víceznačný jazyk). Příklad víceznačného jazyka:

$$L = \{a^n b^n c^m d^m | n \geq 1, m \geq 1\} \cup \cup \{a^n b^m c^m d^n | n \geq 1, m \geq 1\}.$$

1. $S \to AB|C$
2. $A \to aAb|ab$
3. $B \to cBd|cd$
4. $C \to aCd|aDd$
5. $D \to bDc|bc$.

Jakákoli gramatika pro daný jazyk bude generovat pro některá slova typu $a^n b^n c^n d^n$ dva různé derivační stromy.

Dva derivační stromy pro *aabbccdd*.




**Odstanění víceznačnosti gramatiky**

- Neexistuje algoritmus, který nám řekne, zda je daná gramatika víceznačná.
- Existují bezkontextové jazyky, pro které neexistuje jednoznačná bezkontextová gramatika, pouze víceznačné CFG.
- Existují určitá doporučení pro odstranění víceznačnosti.

Víceznačnost má různé příčiny:

- Není respektovaná priorita operátorů.
- Posloupnost identických operátorů lze shlukovat zleva i zprava.
- $S \to$ if then $S$ else $S|$ if then $S|\epsilon$

  slovo 'if then if then else' má dva významy

  'if then (if then else)' nebo 'if then (if then) else'

  Řešení:

  – syntaktická chyba (Algol 60)
  – else patří k bližšímu if (preference pořadí pavidel)
  – závorky begin-end,odsazení v Python (asi nejčistší řešení).

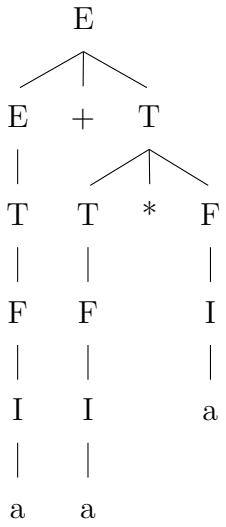
**Vynucení priority**

Řešením je zavést více různých proměnných, každou pro jednu úroveň 'priority'.
Konkrétně:

- **Faktor** je výraz který nesmí rozdělit žádný operátor.
  - identifikátory
  - výraz v závorkách
- **Term** je výraz, který nemůže rozdělit operátor +.
- **Výraz** může být rozdělen ∗ i +.

Jednoznačná gramatika pro výrazy:
1. $I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$
2. $F \to I|(E)$
3. $T \to F|T * F$
4. $E \to T|E + T$.

Jediný derivační strom pro $a + a * a$.




**Jednoznačnost a kompilátory**

Kompilace výrazu (zásobník na mezivýsledky + dva registry):

(1) $E \to E + T$ ... pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2
(2) $E \to T$
(3) $T \to T * F$ ... pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2
(4) $T \to F$
(5) $F \to (E)$
(6) $F \to a$ ... push a

- 'a+a*a' získáme postupnou aplikací pravidel 1,2,4,6,3,4,6,6
- posloupnost obrátíme a vybereme pouze pravidla generující kód

  6,6,3,6,1
- nyní nahradíme pravidla příslušným kódem

  push a; push a; pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2; push a; pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2

**Shrnutí**

- Gramatiky
  - obecné
  - kontextové
  - bezkontextové
  - regulární, pravé lineární
- jazyk gramatiky, derivace, derivace dává slovo, derivační strom (pro bezkontextové gramatiky), ekvivalentní gramatiky
- ne každá lineární gramatika má ekvivalentní pravou lineární
- bezkontextové gramatiky
- jednoznačné a (podstatně) víceznačné gramatiky.

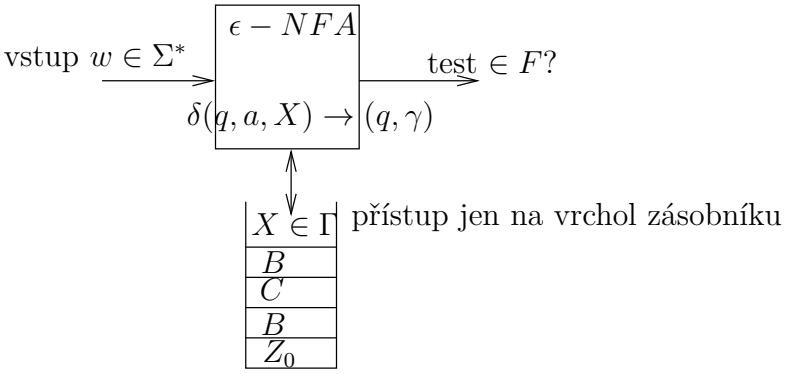



Figure 7: Zásobníkový automat.

# 8 Zásobníkové automaty, Deterministické PDA

### Zásobníkové automaty

- Zásobníkové automaty jsou rozšířením $\epsilon-$NFA nedeterministických konečných automatů s $\epsilon$ přechody.
- Přidanou věcí je **zásobník**. Má vlastní abecedu $\Gamma$.
- V každém kroku vidíme horní písmeno zásobníku (zde $X$), můžeme dát navrch libovolný konečný počet znaků $\gamma \in \Gamma^*$.
- Může si pamatovat neomezené množství informace.
- Deterministické zásobníkové automaty přijímají jen vlastní podmnožinu bezkontextových jazyků.

### Zásobníkový automat (PDA)

**Definition 8.1** (Zásobníkový automat (PDA))**.** Zásobníkový automat (PDA) je $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$, kde

$Q$ konečná množina stavů

$\Sigma$ neprázdná konečná množina vstupních symbolů

$\Gamma$ neprázdná konečná zásobníková abeceda

$\delta$ přechodová funkce $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \to P_{FIN}(Q \times \Gamma^*)$, $\delta(p, a, X) \ni (q, \gamma)$

kde $q$ je nový stav a $\gamma$ je řetězec zásobníkových symbolů, který nahradí $X$ na vrcholu zásobníku

$q_0 \in Q$ počáteční stav

$Z_0 \in \Gamma$ Počáteční zásobníkový symbol. Víc na začátku na zásobníku není.

$F$ Množina přijímajících (koncových) stavů; může být nedefinovaná.

V jednom časovém kroku zásobníkový automat:

- Přečte na vstupu žádný nebo jeden symbol. ($\epsilon$ přechody pro prázdný vstup.)
- Přejde do nového stavu.
- Nahradí symbol na vrchu zásobníku libovolným řetězcem ($\epsilon$ odpovídá samotnému pop, jinak následuje push jednoho nebo více symbolů).

*Example* 8.1. Zásobníkový automat pro jazyk: $L_{wwr} = \{ww^R | w \in (\mathbf{0}+\mathbf{1})^*\}$.

PDA přijímající $L_{wwr}$:

- Start $q_0$ reprezentuje odhad, že ještě nejsme uprostřed.
- V každém kroku nedeterministicky hádáme;
  - Zůstat $q_0$ (ještě nejsme uprostřed).
  - Přejít $\epsilon$ přechodem do $q_1$ (už jsme viděli střed).
- V $q_0$, přečte vstupní symbol a dá (push) ho na zásobník
- V $q_1$, srovná vstupní symbol s vrcholem zásobníku

  pokud se shodují, přečte vstupní symbol a umaže (pop) vrchol zásobníku
- Když vyprázdníme zásobník, přijmeme vstup, který jsme doteď přečetli.

**PDA pro $L_{wwr}$**

*Example* 8.2 (PDA pro $L_{wwr}$). PDA pro $L_{wwr}$ můžeme popsat $P_{da} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0,1\}, \{0,1,Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\})$

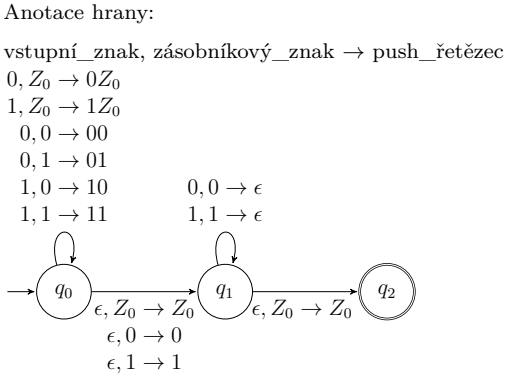
kde $\delta$ je definovaná:

| | |
|---|---|
| $\delta(q_0,0,Z_0) = \{(q_0,0Z_0)\}$<br>$\delta(q_0,1,Z_0) = \{(q_0,1Z_0)\}$ | Ulož vstup na zásobník, startovní symbol tam nech |
| $\delta(q_0,0,0) = \{(q_0,00)\}$<br>$\delta(q_0,0,1) = \{(q_0,01)\}$<br>$\delta(q_0,1,0) = \{(q_0,10)\}$<br>$\delta(q_0,1,1) = \{(q_0,11)\}$ | Zůstaň v $q_0$, přečti vstup a dej ho na zásobník |
| $\delta(q_0,\epsilon,Z_0) = \{(q_1,Z_0)\}$<br>$\delta(q_0,\epsilon,0) = \{(q_1,0)\}$<br>$\delta(q_0,\epsilon,1) = \{(q_1,1)\}$ | $\epsilon$ přechod $q_1$ bez změny zásobníku (a vstupu) |
| $\delta(q_1,0,0) = \{(q_1,\epsilon)\}$<br>$\delta(q_1,1,1) = \{(q_1,\epsilon)\}$ | stav $q_1$ srovná vstupní symbol a vrchol zásobníku |
| $\delta(q_1,\epsilon,Z_0) = \{(q_2,Z_0)\}$ | našli jsme $ww^R$ a jdeme do přijímajícího stavu |

**Grafická notace PDA's**

**Definition 8.2** (Přechodový diagram pro zásobníkový automat)**. Přechodový diagram pro zásobníkový automat** obsahuje:

- Uzly, které odpovídají stavům PDA.
- Šipka 'odnikud' ukazuje počáteční stav, dvojité kruhy označují přijímající stavy.
- hrana odpovídá přechodu PDA. Hrana označená $a, X \to \alpha$ ze stavu $p$ do $q$ znamená $\delta(p,a,X) \ni (q,\alpha)$
- Konvence je, že počáteční symbol zásobníku značíme $Z_0$.




**Notace zásobníkových automatů**

*Example* 8.3 (Notace).

| | |
|---|---|
| $a, b, c, *, +, 1, (, )$ | symboly vstupní abecedy |
| $p, q, r$ | stavy |
| $u, v, w, x, y, z$ | řetězce vstupní abecedy |
| $X, Y, E, I, S$ | zásobníkové symboly |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | řetězce zásobníkových symbolů |

- Narozdíl od gramatik může vstupní a zásobníková abeceda obsahovat stejné symboly.
- Vyhýbáme se stejným názvům stavů jako jsou písmena kterékoli z abeced.

**Definition 8.3** (Konfigurace zásobníkového automatu)**.** **Konfiguraci** zásobníkového automatu reprezentujeme trojicí $(q, w, \gamma)$, kde

$q$ je stav

$w$ je zbývající vstup a

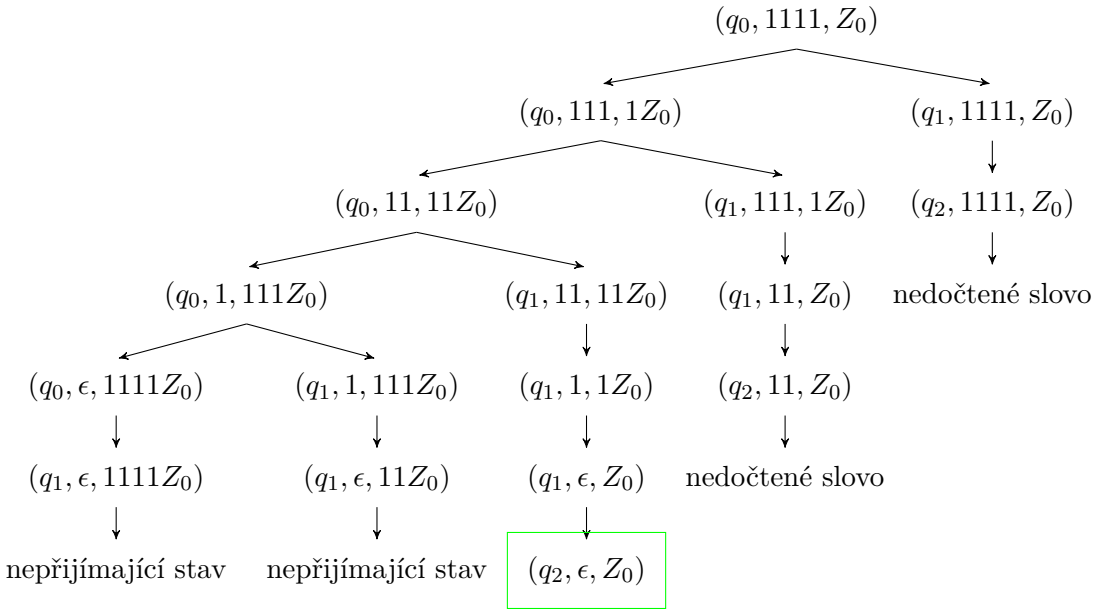
$\gamma$ je obsah zásobníku (vrch zásobníku je vlevo).

konfiguraci značíme zkratkou **(ID)** z anglického **instantaneous description (ID)**.

**Definition 8.4** ($\vdash, \vdash^*$ posloupnosti konfigurací)**.** Mějme PDA $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Mějme stavy $p, q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\epsilon\})$, $X \in \Gamma$, $\alpha \in \Gamma^*$ a instrukci $\delta(p, a, X) \ni (q, \alpha)$. Pak říkáme, že

- konfigurace $(p, aw, X\beta)$ **bezprostředně vede** na konfiguraci $(q, w, \alpha\beta)$,
  - Značíme $(p, aw, X\beta) \vdash (q, w, \alpha\beta)$.
- **konfigurace $I$ vede na konfiguraci $J$** $I \vdash_P^* J$ a $I \vdash^* J$ používáme na označení nuly a více kroků zásobníkového automatu, t.j.
  - $I \vdash^* I$ pro každou konfiguraci $I$
  - $I \vdash^* J$ pokud existuje konfigurace $K$ tak že $I \vdash K$ a $K \vdash^* J$.

**konfigurace zásobníkového automatu na vstup** 1111




### Jazyky zásobníkových automatů

**Definition 8.5** (Jazyk přijímaný koncovým stavem, prázdným zásobníkem)**.** Mějme zásobníkový automat $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$. Pak $L(P_{da})$, **jazyk přijímaný (akceptovaný) koncovým stavem** je

$$L(P_{da}) = \{w | (q_0, w, Z_0) \vdash_{P_{da}}^* (q, \epsilon, \alpha) \text{ pro nějaké } q \in F \text{ a libovolný řetězec } \alpha \in \Gamma^*; w \in \Sigma^*\}.$$

**jazyk přijímaný prázdným zásobníkem** $N(P_{da})$ definujeme

$N(P_{da}) = \{w | (q_0, w, Z_0) \vdash^*_{P_{da}} (q, \epsilon, \epsilon)$ pro libovolné $q \in Q; w \in \Sigma^*\}$.

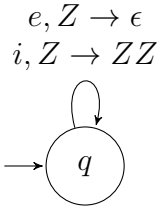
– Protože je množina přijímajících stavů $F$ nerelevantní, může se vynechat a PDA je šestice $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$.

*Example* 8.4. Zásobníkový automat z předchozího příkladu přijímá $L_{wwr}$ koncovným stavem.

*Example* 8.5. $P'_{da} \equiv P_{da}$ z předchozího příkladu, jen změníme instrukci, aby umazala poslední symbol $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$ nahradíme $\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, \epsilon)\}$ Nyní $L(P'_{da}) = N(P'_{da}) = L_{wwr}$.

**Příklad If-Else**

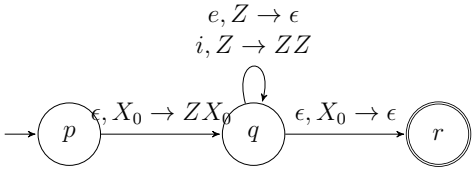
*Example* 8.6 (If-else přijímané prázdným zásobníkem). Následující zásobníkový automat zastaví při první chybě na if ($i$) a else ($e$), máme–li více else než if.




$P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ kde

- $\delta_N(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ push
- $\delta_N(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$ pop

*Example* 8.7 (Přijímání koncovým stavem). $P_F = (\{p, q, r\}, \{i, e\}, \{Z, X_0\}, \delta_F, p, X_0, \{r\})$ kde




- $\delta_F(p, \epsilon, X_0) = \{(q, ZX_0)\}$ start
- $\delta_F(q, i, Z) = \{(q, ZZ)\}$ push
- $\delta_F(q, e, Z) = \{(q, \epsilon)\}$ pop
- $\delta_F(q, \epsilon, X_0) = \{(r, \epsilon)\}$ přijmi

**Nečtený vstup a dno zásobníku $P$ neovlivní výpočet**

*Lemma* 8.1. Mějme PDA $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, u, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, v, \beta)$. Potom pro libovolné slovo $w \in \Sigma^*$ and $\gamma \in \Gamma^*$ platí: $(p, uw, \alpha\gamma) \vdash^*_{P_{da}} (q, vw, \beta\gamma)$.

Specielně pro $\gamma = \epsilon$ a/nebo $w = \epsilon$.

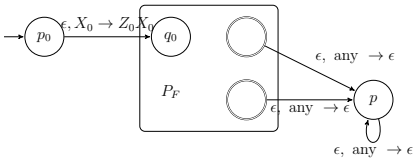
*Proof.* Indukcí podle počtu konfigurací mezi $(p, uw, \alpha\gamma)$ a $(q, vw, \beta\gamma)$. Každý krok $(p, u, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, v, \beta)$ je určen bez $w$ a/nebo $\gamma$. Proto je možný i se symboly na konci vstupu / dně zásobníku. □

*Lemma* 8.2. Pro PDA $P_{da} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ a $(p, uw, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, vw, \beta)$ platí $(p, u, \alpha) \vdash^*_{P_{da}} (q, v, \beta)$.

**Remark** Pro zásobník ale obdoba neplatí. PDA může zásobníkové symboly $\gamma$ použít a zase je tam naskládat (push). $L = \{0^i 1^i 0^j 1^j\}$, konfigurace $(p, 0^{i-j} 1^i 0^j 1^j, 0^j Z_0) \vdash^* (q, 1^j, 0^j Z_0)$, mezitím vyčištíme zásobník k $Z_0$.

**Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku**

*Lemma* 8.3 (Od přijímajícího stavu k prázdnému zásobníku). Mějme $L = L(P_F)$ pro nějaký PDA $P_F = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_F, q_0, Z_0, F)$. Pak existuje PDA $P_N$ takový, že $L = N(P_N)$.




Proof:

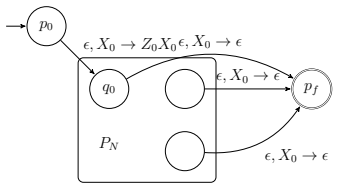
Nechť $P_N = (Q \cup \{p_0, p\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_N, p_0, X_0)$, kde

- $\delta_N(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$ start
- $\forall (q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Y \in \Gamma)\ \delta_N(q, a, Y) = \delta_F(q, a, Y)$ simulujeme
- $\forall (q \in F, Y \in \Gamma \cup \{X_0\})$, $\delta_N(q, \epsilon, Y) \ni (p, \epsilon)$ přijmout pokud $P_F$ přijímá,
- $\forall (Y \in \Gamma \cup \{X_0\})$, $\delta_N(p, \epsilon, Y) = \{(p, \epsilon)\}$ vyprázdnit zásobník.

Pak $w \in N(P_N)$ iff $w \in L(P_F)$. □

### Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu

*Lemma* 8.4 (Od prázdného zásobníku ke koncovému stavu). Pokud $L = N(P_N)$ pro nějaký PDA $P_N = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta_N, q_0, Z_0)$, pak existuje PDA $P_F$ takový, že $L = L(P_F)$.




**Proof:**

$$P_F = (Q \cup \{p_0, p_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{X_0\}, \delta_F, p_0, X_0, \{p_f\})$$

kde $\delta_F$ je

- $\delta_F(p_0, \epsilon, X_0) = \{(q_0, Z_0X_0)\}$ (start).
- $\forall(q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, Y \in \Gamma)$, $\delta_F(q, a, Y) = \delta_N(q, a, Y)$.
- Navíc, $\delta_F(q, \epsilon, X_0) \ni (p_f, \epsilon)$ pro každý $q \in Q$.

Chceme ukázat $w \in N(P_N)$ iff $w \in L(P_F)$.

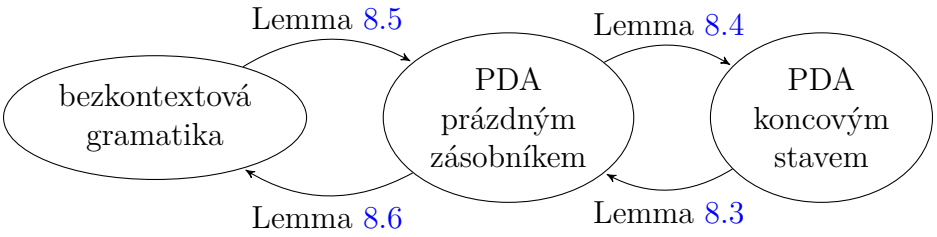
- (If) $P_F$ přijímá následovně: $(p_0, w, X_0) \vdash_{P_F} (q_0, w, Z_0X_0) \vdash^*_{P_F=N_F} (q, \epsilon, X_0) \vdash_{P_F} (p_f, \epsilon, \epsilon)$.
- (Only if) Do $p_f$ nelze dojít jinak než předchozím bodem. □

### Ekvivalence jazyků rozpoznávaných zásobníkovými automaty a bezkontextových jazyků

**Theorem 8.1** (!L(CFG), L(PDA), N(PDA)). *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *Jazyk $L$ je bezkontextový, tj. generovaný bezkontextovou gramatikou.*
- *Jazyk $L$ je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem koncovým stavem.*
- *Jazyk $L$ je přijímaný nějakým zásobníkovým automatem prázdným zásobníkem.*

Důkaz bude veden směry dle následujícího obrázku.




### Od bezkontextové gramatiky k zásobníkovému automatu

**Algorithm: Konstrukce PDA z CFG $G$**

Mějme CFG gramatiku $G = (V, T, P, S)$.
Konstruujeme PDA $P = (\{q\}, T, V \cup T, \delta, q, S)$.

(1) Pro neterminály $A \in V$, $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) | A \to \beta \text{ je pravidlo } G\}$.

(2) pro každý terminál $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$.

*Example* 8.8. Konvertujme gramatiku: $G = (\{E, I\}, \{a, b, 0, 1, (, ), +, *\}, \{I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1, E \to I|E*E|E+E|(E)\}, E)$.[0.2cm] Množina vstupních symbolů PDA je $\Sigma = \{a, b, 0, 1, (, ), +, *\}$, $\Gamma = \Sigma \cup \{I, E\}$, přechodová funkce $\delta$:

- $\delta(q, \epsilon, I) = \{(q, a), (q, b), (q, Ia), (q, Ib), (q, I0), (q, I1)\}$.
- $\delta(q, \epsilon, E) = \{(q, I), (q, E*E), (q, E+E), (q, (E))\}$.
- $\forall s \in \Sigma$ je $\delta(q, s, s) = \{(q, \epsilon)\}$, např. $\delta(q, +, +) = \{(q, \epsilon)\}$ .

Jinak je $\delta$ prázdná.

### CFG a PDA

*Lemma* 8.5 (Přijímání prázdným zásobníkem ze CFG). Pro PDA $P_{da}$ konstruovaný z CFG $G$ algoritmem výše je $N(P) = L(G)$.

(1) Pro neterminály $A \in V$, $\delta(q, \epsilon, A) = \{(q, \beta) | A \to \beta \text{ je pravidlo } G\}$.

(2) pro každý terminál $a \in T$, $\delta(q, a, a) = \{(q, \epsilon)\}$.

- Levá derivace: $E \Rightarrow E * E \Rightarrow I * E \Rightarrow a*E \Rightarrow a * I \Rightarrow a * b$
- Posloupnost konfigurací: $(q, a * b, E) \vdash (q, a * b, E * E) \vdash (q, a * b, I * E) \vdash (q, a * b, a * E) \vdash (q, *b, *E) \vdash (q, b, E) \vdash (q, b, I) \vdash (q, b, b) \vdash (q, \epsilon, \epsilon)$

Pozorování:

- Kroky derivace simuluje PDA $\epsilon$ přepisy zásobníku
- odmazávaný vstup u PDA v derivaci zůstává až do konce
- až PDA vymaže terminály, pokračuje v přepisech.

### CFG a PDA

$w \in N(P_{da}) \Leftarrow w \in L(G)$. Nechť $w \in L(G)$, $w$ má levou derivaci $S = \gamma_1 \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_2 \underset{lm}{\Rightarrow} \ldots \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_n = w$.
Indukcí podle $i$ dokážeme $(q, w, S) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, v_i, \alpha_i)$, kde $\gamma_i = u_i\alpha_i$ je levá sentenciální forma a $u_iv_i = w$.

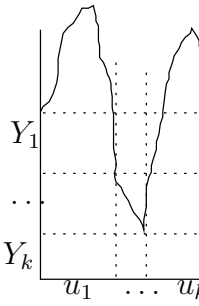
- Pokud $\gamma_i$ obsahuje pouze terminály, $\gamma_i = u_i\alpha_i = w = u_iv_i$, tedy $\alpha_i = v_i$ a pravidly typu (2) vyprázdníme vstup i zásobník.
- Každá nekoncová sentenciální forma $\gamma_i$ může být zapsaná $u_iA\alpha_i$,

  $A$ nejlevější neterminál, $u_i$ řetězec terminálů
- indukční předpoklad nás dovedl do konfigurace $(q, v_i, A\alpha_i)$, $w = u_iv_i$
- Pro $\gamma_i \underset{lm}{\Rightarrow} \gamma_{i+1}$ bylo použilo pravilo $(A \to \beta) \in P$
- PDA nahradí $A$ na zásobníku $\beta$, přejde na konfiguraci $(q, v_i, \beta\alpha_i)$.
- odstraňme všechny terminály $v \in \Sigma^*$ zleva $\beta\alpha$ porovnáváním se vstupem
  - $v_i = vv_{i+1}$ a zároveň $\beta\alpha = v\alpha_{i+1}$
- přešli jsme do nové konfigurace $(q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ a iterujeme.

□

Dokazujeme: Pokud $(q, u, A) \vdash_P^* (q, \epsilon, \epsilon)$, tak $A \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} u$.
Indukcí podle počtu kroků $P_{da}$.

- $n = 1$ kroků:
  - $a \in \Sigma$, přechod $\delta(q, a, a) \ni (q, \epsilon)$, v derivaci žádný krok,
  - $A \in \Gamma$, přechod $\delta(q, \epsilon, A) \ni (q, \epsilon)$ pro pravidlo gramatiky $(A \to \epsilon) \in G$.




$w \in N(P_{da}) \Rightarrow w \in L(G)$.

- $n > 1$ kroků;
  - První krok typu (2) – terminály, nerozšiřujeme derivaci.
  - První krok typu (1), $A$ nahrazeno $Y_1 Y_2 \dots Y_k$ z pravidla $A \to Y_1 Y_2 \dots Y_k$.
    Rozdělíme $u = u_1 u_2 \dots u_k$:
    - čtením symbolu $Y_i$ skončilo slovo $u_{i-1}$ a začíná $u_i$.

    Použijeme indukční hypotézu na každé $i = 1, \dots, k$: $(q, u_i u_{i+1} \dots u_k, Y_i) \vdash^* (q, u_{i+1} \dots u_k, \epsilon)$ a dostaneme $Y_i \Rightarrow^* u_i$.

Dohromady $A \Rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k \Rightarrow^* u_1 Y_2 \dots Y_k \Rightarrow^* \dots \Rightarrow^* u_1 u_2 \dots u_k$.

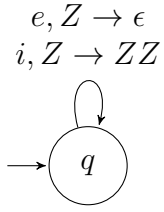
□

**Příklad: Od zásobníkového automatu ke gramatice**

*Example* 8.9. Převeďme PDA $P_N = (\{q\}, \{i, e\}, \{Z\}, \delta_N, q, Z)$ na obrázku na gramatiku.

- Neterminály gramatiky budou $V = \{S, [qZq]\}$ nový start a jediná trojice $P_N$.
- Pravidla:
  - $S \to [qZq]$.
  - $[qZq] \to e$
  - $[qZq] \to i[qZq][qZq]$.

  Můžeme nahradit trojici $[qZq]$ symbolem $A$ a dostaneme: $S \to A$ $A \to iAA|e$. Protože $A$ a $S$ odvozují přesně stejné řetězce, můžeme je ztotožnit: $G = (\{S\}, \{i, e\}, \{S \to iSS|e\}, S)$.

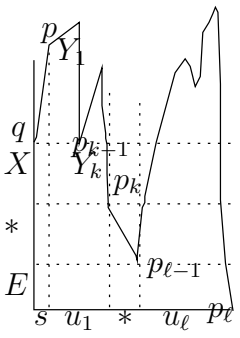



**Od zásobníkového automatu ke gramatice CFG**

- Zásobní automat bere *jeden* symbol ze zásobníku. Stav před a po kroku může být různý.
- Neterminály gramatiky budou složené symboly $[qXp]$, PDA vyšel z $q$, vzal $X$ a přešel do $p$;

  a zavedeme nový počáteční symbol $S$.

*Lemma* 8.6 (Gramatika pro PDA). Mějme PDA $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0)$. Pak existuje bezkontextová gramatika $G$ taková, že $L(G) = N(P)$.




Pravidla definujeme:

- $\forall p \in Q$: $S \to [q_0 Z_0 p]$, tj. uhodni koncový stav a spusť PDA na $(q_0, w, Z_0) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$.
- Pro všechny dvojice $(p, Y_1 Y_2 \dots Y_k) \in \delta(q, s, X), s \in \Sigma \cup \{\epsilon\}, \forall p_1, \dots, p_{k-1} \in Q$ vytvoř pravidlo

$$[qXp_k] \to s[pY_1p_1][p_1Y_2p_2]\dots[p_{k-1}Y_kp_k]$$

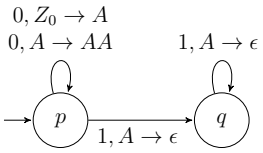
- spec. pro $(p, \epsilon) \in \delta(q, a, A)$ vytvoř $[qAp] \to a$.

*Proof.* Pro $w \in \Sigma^*$ dokazujeme $[qXp] \Rightarrow^* w$ právě když $(q, w, X) \vdash^* (p, \epsilon, \epsilon)$ indukcí v obou směrech (počet kroků PDA, počet kroků derivace.) □

*Example* 8.10 ($\{0^n 1^n; n > 0\}$).

| $\delta$ | Pravidla | |
|---|---|---|
| | $S \to [pZ_0p] \mid [pZ_0q]$ | (1) |
| $\delta(p, 0, Z_0) \ni (p, A)$ | $[pZ_0p] \to 0[pAp]$ | (2) |
| | $[pZ_0q] \to 0[pAq]$ | (3) |
| $\delta(p, 0, A) \ni (p, AA)$ | $[pAp] \to 0[pAp][pAp]$ | (4) |
| | $[pAp] \to 0[pAq][qAp]$ | (5) |
| | $[pAq] \to 0[pAp][pAq]$ | (6) |
| | $[pAq] \to 0[pAq][qAq]$ | (7) |
| $\delta(p, 1, A) \ni (q, \epsilon)$ | $[pAq] \to 1$ | (8) |
| $\delta(q, 1, A) \ni (q, \epsilon)$ | $[qAq] \to 1$ | (9) |

<article>




Derivace 0011 $S \Rightarrow^{(1)} [pZ_0q] \Rightarrow^{(3)} 0[pAq] \Rightarrow^{(7)} 00[pAq][qAq] \Rightarrow^{(8)} 001[qAq] \Rightarrow^{(9)} 0011$

**Shrnutí**

- Zásobníkový automat PDA je $\epsilon$–NFA automat rozšířený o zásobník, potenciálně nekonečnou paměť
  - a zásobníkovou abecedu, počáteční zásobníkový symbol, přechodová funkce čte a píše na zásobník, píše i řetězec
- Přijímání koncovým stavem a prázdným zásobníkem, pro nedeterministické PDA přijímají stejnou třídu jazyků
- a to bezkontextové jazyky, generované bezkontextovými gramatikami.

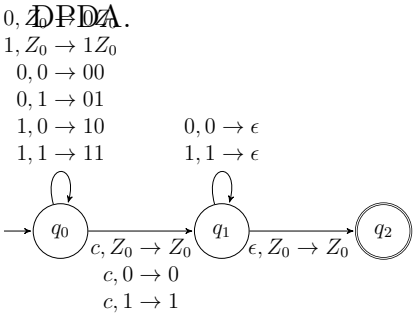
### Deterministický zásobníkový automat (DPDA)

**Definition 8.6** (Deterministický zásobníkový automat (DPDA))**.** Zásobníkový automat $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je **deterministický** PDA právě když platí zároveň:

- $\delta(q, a, X)$ je nejvýše jednoprvková $\forall (q, a, X) \in Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma$.
- Je–li $\delta(q, a, X)$ neprázdná pro nějaké $a \in \Sigma$, pak $\delta(q, \epsilon, X)$ musí být prázdná.

*Example* 8.11 (Det. PDA přijímající $L_{wcwr}$).

- Jazyk $L_{wwr}$ palindromů je bezkontextový, ale nemá přijímající deterministický zásobníkový automat.
- Druhá podmínka zaručuje, že nebude volba mezi $\epsilon$ přechodem a čtením vstupního symbolu.
- Vložením středové značky $c$ do $L_{wcwr} = \{wcw^R | w \in (\mathbf{0} + \mathbf{1})^*\}$ dostaneme jazyk rozpoznatelný DPDA.




### Regulární jazyky, DPDA's

$$RL \subsetneq L_{DPDA} \subsetneq L_{PDA} = CFL = N_{PDA} \supsetneq N_{DPDA}.$$

**Theorem 8.2.** *Nechť $L$ je regulární jazyk, pak $L = L(P)$ pro nějaký DPDA $P$.*

*Proof.* DPDA může simulovat deterministický konečný automat a ignorovat zásobník. (nechat tam $Z_0$). □

*Lemma.* Jazyk $L_{wcwr}$ je přijímaný DPDA ale není regulární.

Důkaz neregularity z pumping lemmatu na slovo $0^n c 0^n$.

*Example* 8.12. Jazyk $L_{abb} = \{a^i b^i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{a^i b^{2i} | i \in \mathbb{N}\}$ je bezkontextový, ale není přijímaný žádným deterministickým zásobníkovým automatem.

*Proof.*

- SPOREM: Předokládejme, že existuje deterministický PDA $M$ přijímající jazyk $L_{abb}$.
- Vytvořme dvě kopie, $M_1$ a $M_2$, odpovídající si uzly budeme nazývat sourozenci.
- Zkonstuujeme nový automat:
  - Počátečním stavem bude počáteční stav $M_1$
  - koncovými stavy budou koncové stavy $M_2$
  - přechody z koncových stavů $M_1$ $\delta(p, b, X) = (q, X)$
    - přesměrujeme do sourozenců $q$ v $M_2$ a přejmenujeme $b$ na $c$
  - v automatu $M_2$ hrany označené $b$ přeznačíme na $c$.
- Výsledný automat přijímá $\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$ protože
  - $M$ je deterministický, nemá jinou cestu, tj. i ve slově $a^i b^{2i}$ musel jít začátek stejně a pak číst $b^i$, nyní $c^i$,
- o $\{a^i b^i c^i | i \in \mathbb{N}\}$ víme, že není bezkontextový, tj. deterministický $M$ nemůže existovat.

□

### Bezprefixové jazyky

**Definition 8.7** (bezprefixové jazyky)**.** Říkáme, že jazyk $L \subset \Sigma^*$ je **bezprefixový** pokud neexistují slova $u, v \in L$ a $z \in \Sigma^+$ tak, že $u = vz$. Tj. pro žádná slova jazyka $u, v$ není vlastní $v$ **prefix** $u$.

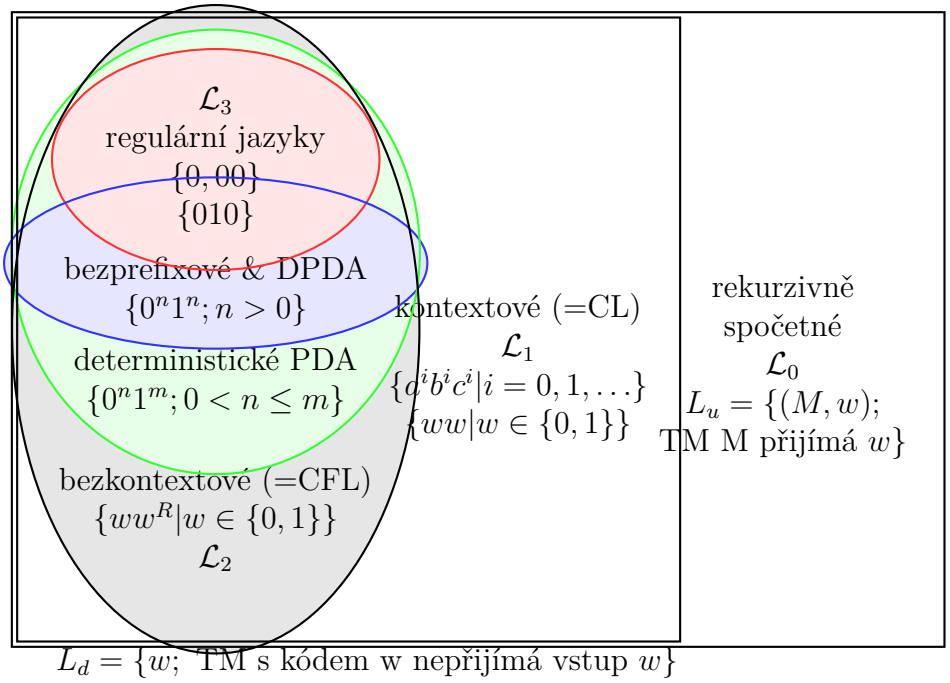
*Example* 8.13.
- Jazyk $L_{wcwr}$ je bezprefixový.
- Jazyk $L = \{0\}^*$ není bezprefixový.

**Theorem 8.3** ($L \in N(P_{DPDA})$ právě když $L$ bezprefixový a $L \in L(P'_{DPDA})$ )**.** *Jazyk $L$ je $N(P)$ pro nějaký DPDA $P$ právě když $L$ je bezprefixový a $L$ je $L(P')$ pro nějaký DPDA $P'$.*

*Proof.* $\Rightarrow$ Prefix přijmeme prázdným zásobníkem, pro prázdný zásobník neexistuje instrukce, tj. žádné prodloužení není v $N(P)$.

$\Leftarrow$ Převod $P^|$ na $P$ nepřidá nedeterminismus (první koncový -> smaž hrany z něj, přijmi).

□




# 9 Uzávěrové vlastnosti, Dykovy jazyky

### Uzávěrové vlastnosti

**Theorem 9.1** (CFL uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iteraci, reverzi)**.** *CFL jsou uzavřené na sjednocení, konkatenaci, iterace $(*)$, positivní iterace $(+)$, zrcadlový obraz $w^R$.*

Proof:

- Sjednocení:
  - pokud $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ přejmenujeme neterminály,
  - přidáme nový symbol $S_{new}$ a pravidlo $S_{new} \to S_1|S_2$
- zřetězení (=konkatenace) $L_1.L_2$

  $S_{new} \to S_1 S_2$ (pro $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, jinak přejmenujeme)
- iterace $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$

  $S_{new} \to S S_{new}|\epsilon$
- pozitivní iterace $L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$

  $S_{new} \to S S_{new}|S$
- zrcadlový obraz $L^R = \{w^R | w \in L\}$

  $X \to \omega^R$ obrátíme pravou stranu pravidel.

□

### Průnik bezkontextových jazyků

*Example* 9.1 (!CFL **nejsou** uzavřené na průnik).

- Jazyk $L = \{0^n 1^n 2^n | n \geq 1\} = \{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\} \cap \{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\}$

není CFL, i když oba členy průniku jsou bezkontextové, dokonce deterministické bezkontextové.

$\{0^n 1^n 2^i | n, i \geq 1\}$ $\{S \to AC, A \to 0A1|01, C \to 2C|2\}$
$\{0^i 1^n 2^n | n, i \geq 1\}$ $\{S \to AB, A \to 0A|0, B \to 1B2|12\}$

- průnik není CFL z pumping lemmatu.

paralelní běh dvou zásobníkových automatů

- řídící jednotky umíme spojit (viz konečné automaty)
- čtení umíme spojit (jeden automat může čekat)
- bohužel dva zásobníky nelze obecně spojit do jednoho

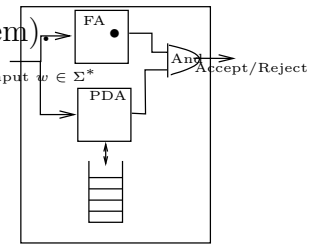
dva neomezené zásobníky =Turingův stroj
=rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$

### Průnik bezkontextového a regulárního jazyka

**Theorem 9.2** (CFL i DCFL jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem)

*Mějme $L$ bezkontextový jazyk a $R$ regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je bezkontextový jazyk.*

- *Mějme $L$ deterministický CFL a $R$ regulární jazyk. Pak $L \cap R$ je deterministický CFL.*



Proof:

- zásobníkový a konečný automat můžeme spojit
  - FA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$
  - PDA přijímání stavem $M_1 = (Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta_2, q_2, Z_0, F_2)$
- nový automat $M = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_1, q_2), Z_0, F_1 \times F_2)$
  - $((r,s),\alpha) \in \delta((p,q),a,Z)$ právě když
    $a \neq \epsilon$: $r = \delta_1(p,a) \& (s,\alpha) \in \delta_2(q,a,Z)$ ... automaty čtou
    $a = \epsilon$: $(s,\alpha) \in \delta_2(q,\epsilon,Z)$ PDA mění zásobn
    $r = p$ FA stojí
- zřejmě $L(M) = L(A_1) \cap L(M_2)$
  - paralelní běh automatů.

□

### Substituce a homomorfizmus

- Opakování definice:

**Definition** ((5.1,5.2)substituce, homomorfizmus, inverzní homomorfizmus)**.** Mějme jazyk $L$ nad abecedou $\Sigma$. **Substituce** $\sigma$; $\forall a \in \Sigma : \sigma(a) = L_a$ jazyk abecedy $\Sigma_a$, tj. $\sigma(a) \subseteq \Sigma_a^*$ převádí slova na jazyky:

- $\sigma(\epsilon) = \{\epsilon\}$,
- $\sigma(a_1 \dots a_n) = \sigma(a_1).\dots.\sigma(a_n)$ (konkatenace), tj. $\sigma : \Sigma^* \to P((\bigcup_{a\in\Sigma} \Sigma_a)^*)$
- $\sigma(L) = \bigcup_{w\in L} \sigma(w)$.

**homomorfizmus** $h$, $\forall a \in \Sigma : h(a) \in \Sigma_a^*$převádí slova na slova

- $h(\epsilon) = \epsilon$,
- $h(a_1 \dots a_n) = h(a_1).\dots.h(a_n)$ (konkatenace) tj. $h : \Sigma^* \to (\bigcup_{a\in\Sigma} \Sigma_a)^*$
- $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

**Inverzní homomorfizmus** převádí slova zpět

- $h^{-1}(L) = \{w | h(w) \in L\}$.

### Příklad: Substituce

*Example* 9.2. Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, (, )\}, \{E \to E + E | (E) | a\}, E)$. Mějme substituci:

- $\sigma(a) = L(G_a)$, $G_a = (\{I\}, \{a, b, 0, 1\}, \{I \to I0 | I1 | Ia | Ib | a | b\}, I)$,
- $\sigma(+) = \{-, *, :, div, mod\}$,
- $\sigma(() = \{(\}$,
- $\sigma()) = \{)\}$.
- $(a + a) + a \in L(G)$
- v $\sigma(+)$ chybí $+$ pro ukázku, že $(a + a) + a \notin \sigma(L(G))$.
- $(a001 - bba) * b1 \in \sigma((a + a) + a) \subset \sigma(L(G))$

Co se stane, když změníme definici:

- $\sigma(() = \{(, [\}$,
- $\sigma()) = \{), ]\}$?

### Příklad: Homomorfizmus

*Example* 9.3. Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, [, ]\}, \{E \to E + E|[E]|a\}, E)$. Mějme homomorfizmus:

- $h(a) = \epsilon$
- $h(+) = \epsilon$,
- $h([) = left$,
- $h(]) = right$.
- $h([a + a] + a) = leftright$,
- $h^{-1}(leftright) \ni [a + +]a$.

*Example* 9.4. Mějme gramatiku $G = (\{E\}, \{a, +, [, ]\}, \{E \to a + E|[E]|a\}, E)$. Mějme homomorfizmus:

- $h_2(a) = a$
- $h_2(+) = +$,
- $h([) = \epsilon$,
- $h(]) = \epsilon$.

1 Je jazyk $L(G)$ regulární?

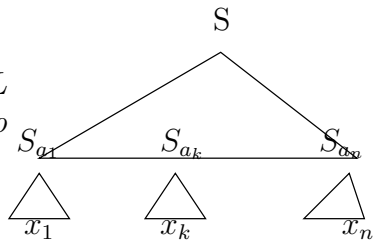
2 Je jazyk $h(L(G))$ regulární?

3 Je jazyk $h^{-1}(h(L(G)))$ regulární?

4 Je $h^{-1}(h(L(G))) = L(G)$?

### Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků

**Theorem 9.3** (CFL jsou uzavřené na substituci)**.** *Mějme CFL jazyk $L$ nad $\Sigma$ a substituci $\sigma$ na $\Sigma$ takovou, že $\sigma(a)$ je CFL pro každé $a \in \Sigma$. Pak je i $\sigma(L)$ bezkontextový (CFL).*




Proof:

- Idea: listy v derivačním stromu generují další stromy.
- Přejmenujeme neterminály na jednoznačné všude v $G = (V, \Sigma, P, S)$, $G_a = (V_a, T_a, P_a, S_a), a \in \Sigma$.
- Vytvoříme novou gramatiku $G = (V', T', P', S)$ pro $\sigma(L)$:
  - $V' = V \cup \bigcup_{a\in\Sigma} V_a$
  - $T' = \bigcup_{a\in\Sigma} T_a$
  - $P' = \bigcup_{a\in\Sigma} P_a \cup \{p \in P$ kde všechna $a \in \Sigma$ nahradíme $S_a\}$.

$G'$ generuje jazyk $\sigma(L)$. □

### Substituce bezkontextových jazyků

*Example* 9.5 (substituce).

| | |
|---|---|
| $L = \{a^i b^j \mid 0 \le i \le j\}$ | $S \to aSb\|Sb\|\epsilon$ |
| $\sigma(a) = L_1 = \{c^i d^i \mid i \ge 0\}$ | $S_1 \to cS_1d\|\epsilon$ |
| $\sigma(b) = L_2 = \{c^i \mid i \ge 0\}$ | $S_2 \to cS_2\|\epsilon$ |
| $\sigma(L)$: | $S \to S_1SS_2\|SS_2\|\epsilon$, $S_1 \to cS_1d\|\epsilon$, $S_2 \to cS_2\|\epsilon$ |

**Theorem 9.4** (homomorfismus)**.** *Bezkontextové jazyky jsou uzavřeny na homomorfismus.*

Proof:

- Přímý důsledek předchozí věty.
- Terminál $a$ v derivačním stromě nahradím slovem $h(a)$.

□

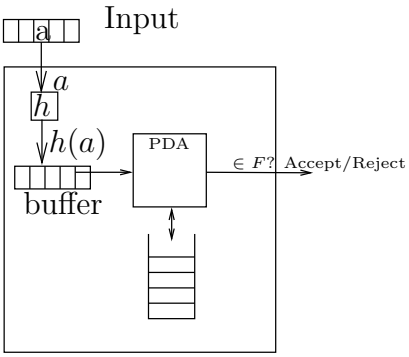
### CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfizmus

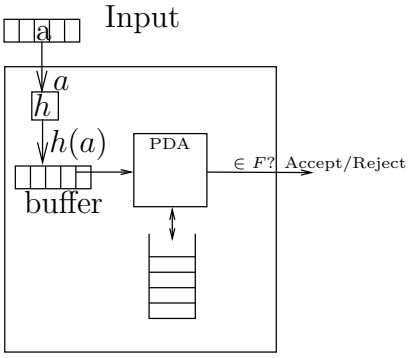
**Theorem 9.5** (CFL jsou uzavřené na inverzní homomorfizmus)**.** *Mějme CFL jazyk $L$ a homomorfizmus $h$. Pak $h^{-1}(L)$ je bezkontextový jazyk.*
*Je–li $L$ deterministický CFL, je i $h^{-1}(L)$ deterministický CFL.*

Idea

- přečteme písmeno $a$ a do vnitřního bufferu dáme $h(a)$
- simulujeme výpočet $M$, kdy vstup bereme z bufferu
- po vyprázdnění bufferu načteme další písmeno ze vstupu
- slovo je přijato, když je buffer prázdný a $M$ je v koncovém stavu

! buffer je konečný, můžeme ho tedy modelovat ve stavu




**Proof:**

- pro $L$ máme PDA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ (koncovým stavem)
- $h : T \to \Sigma^*$
- definujeme PDA $M' = (Q', T, \Gamma, \delta', [q_0, \epsilon], Z_0, F \times \{\epsilon\})$ kde

$$
\begin{array}{lll}
Q' = \{[q,u] \,|q \in Q, u \in \Sigma^*, \exists (a \in T) \exists (v \in \Sigma^*) h(a) = vu\} & & u \text{ je buffer} \\
\delta'([q,\epsilon], a, Z) & = \{([q, h(a)], Z)\} & \text{naplňuje buffer} \\
\delta'([q,u], \epsilon, Z) & = \{([p,u], \gamma) | (p,\gamma) \in \delta(q, \epsilon, Z)\} & \\
& \cup \{([p,v], \gamma) | (p,\gamma) \in \delta(q, x, Z), u = xv\} & \text{čte buffer, } x \in \Sigma
\end{array}
$$

Pro deterministický PDA $M$ je i $M'$ deterministický. □

### Použití uzavřenosti průniku CFL a RL

*Example* 9.6. Jazyk $L = \{0^i 1^j 2^k 3^l | i = 0 \vee j = k = l\}$ není bezkontextový.

**Proof:** Důkaz sporem:

- Nechť $L$ je bezkontextový jazyk
- $L_1 = \{01^j 2^k 3^l | j, k, l \geq 0\}$ je regulární jazyk
  - $\{S \to 0B, B \to 1B|C, C \to 2C|D, D \to 3D|\epsilon\}$
- $L \cap L_1 = \{01^i 2^i 3^i | i \geq 0\}$ není bezkontextový $\Rightarrow$ SPOR s uzavřeností na průnik s regulárním jazykem.

□

$L$ je kontextový jazyk

$S \to \epsilon|0|0A|B_1|C_1|D_1$
$B_1 \to 1|1B_1|C_1$, $C_1 \to 2|2C_1|D_1$, $D_1 \to 3|3D_1$
$A \to 0|0A|P$
$P \to 1PCD|1CD$
$DC \to CD$ přepíšeme $\{DC \to XC, XC \to XY, XY \to CY, CY \to CD\}$
$1C \to 12$, $2C \to 22$, $2D \to 23$, $3D \to 33$.

### Rozdíl a doplněk

**Theorem 9.6** (Odečtení regulárního jazyka)**.** *Mějme bezkontextový jazyk $L$ a regulární jazyk $R$. Pak:*

- *$L - R$ je CFL.*

*Proof.* $L - R = L \cap \overline{R}$, $\overline{R}$ je regulární. □

**Theorem 9.7** (CFL **nejsou** uzavřené na doplněk ani rozdíl)**.** *Třída bezkontextových jazyků není uzavřená na doplněk ani na rozdíl.*

*CFL* **nejsou** *uzavřené na doplněk ani rozdíl.* Mějme bezkontextové jazyky $L, L_1, L_2$, regulární jazyk $R$. Pak:

- $\overline{L}$ nemusí být CFL. $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.
- $L_1 - L_2$ nemusí být CFL. $\Sigma^* - L$ není vždy CFL.

□

- V PDA nestačí prohodit koncové a nekoncové stavy – nedeterminismus.

### Uzávěrové vlastnosti deterministických CFL

- Rozumné programovací jazyky jsou deterministické CFL.
- Deterministické bezkontextové jazyky
  - nejsou uzavřené na průnik
  - jsou uzavřené na průnik s regulárním jazykem
  - jsou uzavřené na inverzní homomorfismus.

*Lemma.* Doplněk deterministického CFL je opět deterministický CFL.

Proof:

- idea: prohodíme koncové a nekoncové stavy
- nedefinované kroky ošetříme 'podložkou' na zásobníku
- cyklus odhalíme pomocí čítače
- až po přečtení slova prochází koncové a nekoncové stavy

  stačí si pamatovat, zda prošel koncovým stavem.

□

### Ne–uzavřenost deterministických CFL

*Example* 9.7 (DCFL nejsou uzavřené na sjednocení). Jazyk $L = \{a^i b^j c^k | i \neq j \vee j \neq k \vee i \neq k\}$ je CFL, ale není DCFL.

*Proof.* Vzhledem k uzavřenosti DCFL na doplněk by byl DCFL i $\overline{L} \cap a^*b^*c^* = \{a^i b^j c^k | i = j = k\}$, o kterém víme, že není CFL (pumping lemma) □

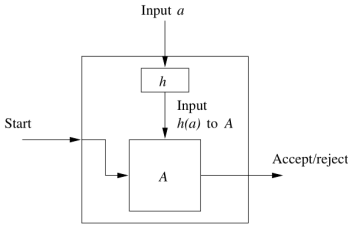
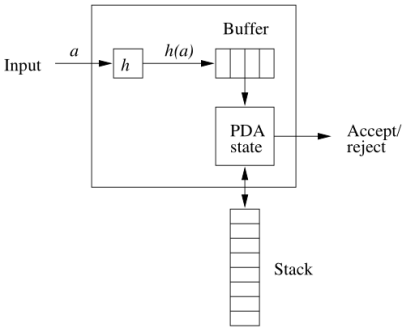
*Example* 9.8 (DCFL nejsou uzavřené na homomorfismus). Jazyky $L_1 = \{a^i b^j c^k | i \neq j\}$, $L_2 = \{a^i b^j c^k | j \neq k\}$ , $L_3 = \{a^i b^j c^k | i \neq k\}$ jsou deterministické bezkontextové.

- Jazyk $0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3$ je deterministický bezkontextový
- Jazyk $L_1 \cup L_2 \cup L_3$ není deterministický bezkontextový položme $h(0) = \epsilon,\ h(1) = \epsilon,,\ h(2) = \epsilon$ $h(x) = x$ pro ostatní symboly
  - $h(0L_1 \cup 1L_2 \cup 2L_3) = L_1 \cup L_2 \cup L_3$,
  - doplněk $\overline{L_1 \cup L_2 \cup L_3} \cap a^*b^*c^* = \{a^i b^j c^k | i = j = k\}$.

### Uzávěrové vlastnosti v kostce

| jazyk | regulární (RL) | bezkontextové | deterministické CFL |
|---|---|---|---|
| sjednocení | ANO | ANO | NE |
| průnik | ANO | NE | NE |
| ∩ s RL | ANO | ANO | ANO |
| doplněk | ANO | NE | ANO |
| homomorfizmus | ANO | ANO | NE |
| inverzní hom. | ANO | ANO | ANO |

### Uzávěrové vlastnosti v kostce

| jazyk | regulární (RL) | bezkontextové | deterministické CFL |
|---|---|---|---|
| sjednocení | $F = F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$ | $S \to S_1 \mid S_2$ | $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ |
| průnik | $F = F_1 \times F_2$ | $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \geq 1\} = \left\{ \begin{matrix} \{0^n 1^n 2^i \mid n, i \geq 1\} \\ \cap \{0^i 1^n 2^n \mid n, i \geq 1\} \end{matrix} \right\}$ | |
| ∩ s RL | $F = F_1 \times F_2$ | $F = F_1 \times F_2$ | $F = F_1 \times F_2$ |
| doplněk | $F = Q_1 - F_1$, $\delta$ tot. | $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ | $F = Q_1 - F_1$, $Z_0$, cykly, tot. |
| homom. | Kleene + RegExp + uz. | $a$ nahraď $S_a$ | $h(0) = h(1) = 0$ cca. ∪ |
| inverzní hom. |   |   | |

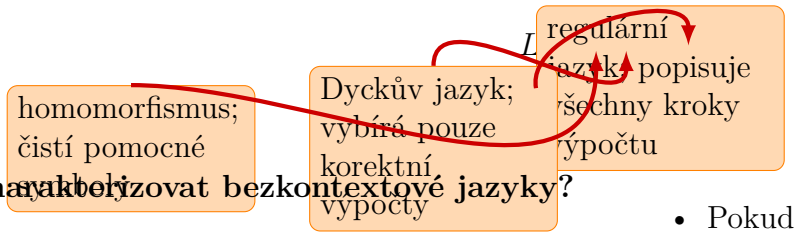
### Dyckovy jazyky

**Definition 9.1** (Dyckův jazyk). **Dyckův jazyk** $D_n$ je definován nad abecedou $Z_n = \{a_1, a_1^{\downarrow}, \ldots, a_n, a_n^{\downarrow}\}$ následující gramatikou: $S \to \epsilon | SS | a_1 S a_1^{\downarrow} | \ldots | a_n S a_n^{\downarrow}$.

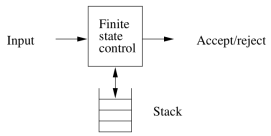
Úvodní pozorování:

- jedná se zřejmě o jazyk bezkontextový
- Dyckův jazyk $D_n$ popisuje správně uzávorkované výrazy s $n$ druhy závorek
- tímto jazykem lze popisovat výpočty libovolného zásobníkového automatu

- pomocí Dyckova jazyka lze popsat libovolný bezkontextový jazyk.




**Jak charakterizovat bezkontextové jazyky?**




- Pokud do zásobníku pouze přidáváme

  potom si stačí pamatovat poslední symbol

- stačí konečná paměť → konečný automat.

- potřebujeme ze zásobníku také odebírat (čtení symbolu)

  takový proces nelze zaznamenat v konečné struktuře

- přidávání a odebírání není zcela libovolné

  jedná se o zásobník, tj. LIFO (last in, first out) strukturu

- roztáhněme si výpočet se zásobníkem do lineární struktury

  $X$ symbol přidán do zásobníku
  $X^{-1}$ symbol odebrán do zásobníku

- přidávaný a odebíraný symbol tvoří pár $\underbrace{Z\underbrace{Z^{-1}}\,B\,\underbrace{A\underbrace{A^{-1}}\,\underbrace{C\underbrace{C^{-1}}\,B^{-1}}}}$

  který se v celé posloupnosti chová jako závorka

**Theorem 9.8** (Dyckovy jazyky)**.** *Pro každý bezkontextový jazyk $L$ existuje regulární jazyk $R$ tak, že $L = h(D \cap R)$ pro vhodný Dyckův jazyk $D$ a homomorfismus $h$.*

Proof:

- máme PDA přijímající $L$ prázdným zásobníkem
- převedeme na instrukce tvaru $\delta(q, a, Z) \in (p, w), |w| \leq 2$
  - delší psaní na zásobník rozdělíme zavedením nových stavů
- nechť $R^|$ obsahuje všechny výrazy
  - $q^{-1}aa^{-1}Z^{-1}BAp$ pro instrukci $\delta(q, a, Z) \ni (p, AB)$
  - podobně pro instrukce $\delta(q, a, Z) \in (p, A), \delta(q, a, Z) \in (p, \epsilon)$
  - je–li $a = \epsilon$, potom dvojici $aa^{-1}$ nezařazujeme
- definujeme $R$ takto: $Z_0q_0(R^|)^*Q^{-1}$
- Dyckův jazyk je definován nad abecedou $\Sigma \cup \Sigma^{-1} \cup Q \cup Q^{-1} \cup \Gamma \cup \Gamma^{-1}$
- $D \cap Z_0q_0(R^|)^*Q^{-1}$ popisuje korektní výpočty $\underbrace{Z_0\overbrace{q_0q_0^{-1}}aa^{-1}Z_0^{-1}}\,B\,\underbrace{A\overbrace{pp^{-1}}bb^{-1}A^{-1}\overbrace{qq^{-1}}cc^{-1}B^{-1}\overbrace{rr^{-1}}}$
- homomorfismus $h$ vydělí přečtené slovo, tj. $\begin{array}{ll} h(a) = a & \text{pro vstupní (čtené) symboly} \\ h(y) = \epsilon & \text{pro ostatní.} \end{array}$

□

# 10 Turingův stroj, rozšíření

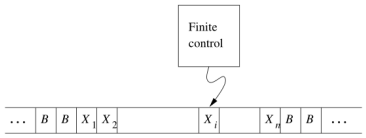
**Turingovy stroje – historie a motivace**

- 1931–1936 pokusy o formalizaci pojmu algoritmu

  Gödel, Kleene, Church, Turing

- **Turingův stroj**

  - zachycení práce matematika
    - nekonečná tabule
      lze z ní číst a lze na ni psát
    - mozek (řídící jednotka)
  - Formalizace TM:
    - místo tabule **nekonečná**
    - místo křídy **čtecí a zap**
    - místo mozku konečná říd

    **posunovat v obou směrech**
  - další formalizace:
    - $\lambda$–kalkul, částečně rekurzivní funkce, RAM

- Snažíme se definovat problémy nerozhodnutelné jakýmkoli počítačem.

**Definition 10.1.** **Turingův stroj (TM)** je sedmice $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ se složkami:

$Q$ konečná množina **stavů**

$\Sigma$ konečná neprázdná množina **vstupních symbolů**

$\Gamma$ konečná množina všech **symbolů pro pásku**. Vždy $\Gamma \supseteq \Sigma$, $Q \cap \Gamma = \emptyset$.

$\delta$ (částečná) **přechodová funkce**. $(Q - F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$, v $\delta(q, x) = (p, Y, D)$:

- $q \in (Q - F)$**!** aktuální stav
- $X \in \Gamma$ aktuální symbol na pásce
- $p$ nový stav, $p \in Q$.
- $Y \in \Gamma$ symbol pro zapsání do aktuální buňky, přepíše aktuální obsah.
- $D \in \{L, R\}$ je **směr** pohybu hlavy (doleva, doprava).

$q_0 \in Q$ **počáteční stav**.

$B \in \Gamma - \Sigma$. Blank. Symbol pro prázdné buňky, na začátku všude kromě konečného počtu buněk se vstupem.

$F \subseteq Q$ množina **koncových** neboli **přijímajících** stavů.

Pozn: někdy se nerozlišuje $\Gamma$ a $\Sigma$ a neuvádí se prázdný symbol $B$, tj. pětice.

**Definition 10.2** (Konfigurace Turingova stroje (Instantaneous Description ID))**.** **Konfigurace Turingova stroje** (Instantaneous Description ID) je řetězec $X_1X_2 \dots X_{i-1}qX_iX_{i+1} \dots X_n$ kde

- $q$ je stav Turingova stroje
- čtecí hlava je vlevo od $i$–tého symbolu

- $X_1 \dots X_n$ je část pásky mezi nejlevějším a nejpravějším symbolem různým od prázdného ($B$). S výjimkou v případě, že je hlava na kraji – pak na tom kraji vkládáme jeden $B$ navíc.

**Definition 10.3** (Krok Turingova stroje)**.** **Kroky** Turingova stroje $M$ značíme $\underset{M}{\vdash}, \underset{M}{\vdash^*}, \vdash^*$ jako u zásobníkových automatů. Pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$

- $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n \underset{M}{\vdash} X_1 X_2 \dots X_{i-1} \mathbf{Y} p X_{i+1} \dots X_n$.

Pro $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$

- $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_n \underset{M}{\vdash} X_1 X_2 \dots X_{i-2} p X_{i-1} \mathbf{Y} X_{i+1} \dots X_n$

Odvození v konečném počtu kroků $\underset{M}{\vdash^*}$ definuji rekurzivně pro $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}$ konfigurace Základ: $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash^*} \mathcal{I}$ Rekurze: Pokud $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash} \mathcal{J}$ a $\mathcal{J} \underset{M}{\vdash^*} \mathcal{K}$, tak i $\mathcal{I} \underset{M}{\vdash^*} \mathcal{K}$.

**A TM for** $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$

**Definition 10.4** (TM přijímá jazyk, rekurzivně spočetný jazyk)**.** Turingův stroj $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ **přijímá jazyk** $L(M) = \{w \in \Sigma^* : q_0 w \underset{M}{\vdash^*} \alpha p \beta, p \in F, \alpha, \beta \in \Gamma^*\}$, tj. množinu slov, po jejichž přečtení se dostane do koncového stavu. Pásku (u nás) nemusí uklízet.

Jazyk nazveme **rekurzivně spočetným**, pokud je přijímán nějakým Turingovým strojem $T$ (tj. $L = L(T)$).

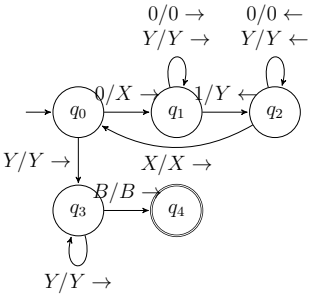
*Example* 10.1 (TM pro jazyk $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$). Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_0, B$

s $\delta$ v tabulce přijímá jazyk $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$.

| Stav | 0 | 1 | X | Y | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | – | – | $(q_3, Y, R)$ | – |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | – | $(q_1, Y, R)$ | – |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | – | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | – |
| $q_3$ | – | – | – | $(q_3, Y, R)$ | $(q_4, B, R)$ |
| $q_4$ | – | – | – | – | – |

**Přechodový diagram pro Turingův stroj**

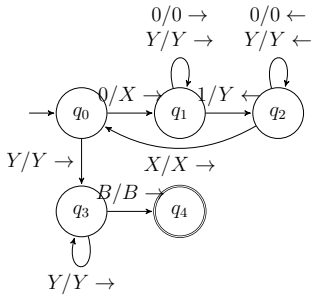
**Definition 10.5** (Přechodový diagram pro TM)**.** **Přechodový diagram** pro TM sestává z uzlů odpovídajícím stavům TM. Hrany $q \to p$ jsou označeny seznamem všech dvojic $X/YD$, kde $\delta(q, X) = (p, Y, D)$, $D \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$.
Pokud neuvedeme jinak, $B$ značí blank – prázdný symbol.



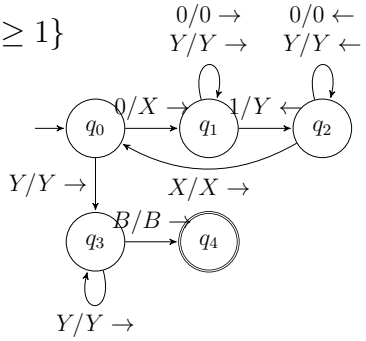

| State | 0 | 1 | X | Y | B |
|---|---|---|---|---|---|
| $q_0$ | $(q_1, X, R)$ | – | – | $(q_3, Y, R)$ | – |
| $q_1$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | – | $(q_1, Y, R)$ | – |
| $q_2$ | $(q_2, 0, L)$ | – | $(q_0, X, R)$ | $(q_2, Y, L)$ | – |
| $q_3$ | – | – | – | $(q_3, Y, R)$ | $(q_4, B, R)$ |
| $q_4$ | – | – | – | – | – |

**A TM for** $\{0^n 1^n; n \geq 1\}$

- Na pásce vždy výraz typu $\mathbf{X}^*\mathbf{0}^*\mathbf{Y}^*\mathbf{1}^*$
  - postupně přepisujeme 0 na $X$ a odpovídající 1 na $Y$
  - $q_0$ přepíše 0 na $X$ a předá řízení $q_1$
  - $q_1$ najde první 1, přepíše na $Y$ a předá řízení $q_2$
  - $q_2$ se vrátí k $X$, nechá ho být a předá řízení $q_0$
  - ...
  - pokud $q_0$ vidí $Y$, předá řízení $q_3$
  - $q_3$ dojde zkontrolovat, jestli na konci nezbyly 1
  - pokud $q_3$ našlo $B$, předá řízení $q_4$
  - $q_4$ skončí úspěchem (je přijímající)
  - ...
  - pokud $q_3$ narazilo na 1, tak skončí neúspěchem
    - nemá instrukci
    - není přijímající.




**TM pro** $\{0^n1^n; n \geq 1\}$




Slovo 0011

$$q_00011 \vdash Xq_1011 \vdash X0q_111 \vdash Xq_20Y1 \vdash q_2X0Y1 \vdash Xq_00Y1 \vdash XXq_1Y1 \vdash$$

$$\vdash XXYq_11 \vdash XXq_2YY \vdash Xq_2XYY \vdash XXq_0YY \vdash XXYq_3Y \vdash XXYYq_3B \vdash XXYYBq_4B$$

Slovo 0010

$$q_00010 \vdash Xq_1010 \vdash X0q_110 \vdash Xq_20Y0 \vdash q_2X0Y0 \vdash Xq_00Y0 \vdash XXq_1Y0 \vdash$$

$\vdash XXYq_10 \vdash XXY0q_1B$ a skončí neúspěchem, protože nemá instrukci.

**Ještě příklad, rekurzivně spočetné jazyky**

*Example* 10.2. Jazyk $L = \{a^{2n} | n \geq 0\}$
přijímá Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$ s $\delta$ v tabulce:

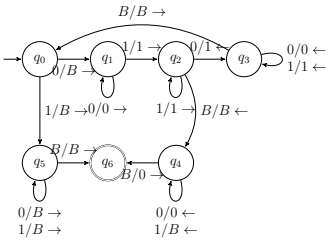
| $\delta$ | komentář |
|---|---|
| $\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$ | prázdné slovo, konec výpočtu |
| $\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$ | zvětší čítač ($2k + 1$ symbolů) |
| $\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$ | nuluje čítač ($2k$ symbolů). |

- Regulární jazyky:
  - simulujeme konečný automat, pohyb hlavy vždy vpravo,
  - vidím-li $B$, tj. konec vstupu. Pokud je stav DFA přijímající, přejdu do nového přijímajícího stavu $q_F$.
  - (Z $q_F$ nesmí být instrukce, z přijímajících stavů DFA potřebuji instrukce kopírovat.)
- Bezkontextové jazyky: nejsnáze s pomocnou páskou simulující zásobník, bude za chvíli.

### TM s výstupem

Turingův stoj počítající **monus** $m \dot{-} n = max(m - n, 0)$.

- $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_0, B, \{q_6\})$
- Počáteční páska $0^m 10^n$.
- M zastaví s páskou $0^{m \dot{-} n}$ obklopenou prázdnem B.
- Najdi nejlevější 0, přepiš na B.
- Jdi doprava a najdi 1; pokračuj, najdi 0 a přepiš na 1.
- Vrať se doleva.
- Pokud nenajdeš 0 (ukliď):
  - vpravo: přepiš všechny 1 na B.
  - vlevo: $m < n$: přepiš všechny 1 a 0 na B, nech pásku prázdnou.




### Rekurzivní jazyky

**Definition 10.6** (TM zastaví)**.** TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu $q$, s čteným symbolem $X$, a není instrukce pro tuto konfiguraci, t.j., $\delta(q, X)$ není definováno.

- Předpokládáme, že v přijímajícím stavu $q \in F$ TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

**Definition 10.7** (Rekurzivní jazyky)**.** Říkáme, že TM $M$ **rozhoduje jazyk** $L$, pokud $L = L(M)$ a pro každé $w \in \Sigma^*$ stroj nad $w$ zastaví.

Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

### Paměť v řídící jednotce, Pomocná stopa

*Example* 10.3 (Příklad paměti ve stavu TM). Pro jazyk $L(M) = (01^* + 10^*)$ si pamatujeme první znak, stav je dvojice (obecně $n$–tice). $M = (\{q_0, q_1\} \times \{0, 1, B\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, [q_0, B], B, \{[q_1, B]\})$

| $\delta$ | 0 | 1 | B |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow [q_0, B]$ | $([q_1, 0], 0, R)$ | $([q_1, 1], 1, R)$ | |
| $[q_1, 0]$ | | $([q_1, 0], 1, R)$ | $([q_1, B], B, R)$ |
| $[q_1, 1]$ | $([q_1, 1], 0, R)$ | | $([q_1, B], B, R)$ |
| $*[q_1, B]$ | | | |

*Example* 10.4 (Příprava pomocné stopy). Budeme potřebovat dvě stopy na pásce. Přepíšeme vstup na dvojice, nahoře budeme mít volno na poznámky. V definici $\delta$ používám zástupný znak pro vstupní písmeno $a \in \{0, 1\}$.

- $\delta([q_0, B], a) = ([q_0, B], [B, a], R)$
- $\delta([q_0, B], B) = ([q_{-1}, B], [B, B], L)$ jsem na konci, otáčím
- $\delta([q_{-1}, B], [B, a]) = ([q_{-1}, B], [B, a], L)$ jdi vlevo
- $\delta([q_{-1}, B], B) = ([q_1, B], B, R)$ dvě stopy připraveny pro další práci.

**Více stop na pásce**

- $L_{wcw} = \{wcw | w \in \{0,1\}^+\}$,
- $M = (\{q_1, \ldots, q_9\} \times \{0,1,B\}, \{[B,0],[B,1],[B,c]\}, \{B,*\} \times \{0,1,B,c\}, \delta, [q_1,B],[B,B],\{[q_9,B]\})$
- $\delta$ je definováno ($a, b \in \{0,1\}$):
  - $\delta([q_1,B],[B,a]) = ([q_2,a],[*,a],R)$ načti symbol $a$
  - $\delta([q_2,a],[B,b]) = ([q_2,a],[B,b],R)$ jdi vpravo, hledej střed $c$,
  - $\delta([q_2,a],[B,c]) = ([q_3,a],[B,c],R)$ pokračuj vpravo ve stavu $q_3$,
  - $\delta([q_3,a],[*,b]) = ([q_3,a],[*,b],R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_3,a],[B,a]) = ([q_4,B],[*,a],L)$ zkontroluj shodu, vymaž paměť a jdi vlevo,
  - $\delta([q_4,B],[*,a]) = ([q_4,B],[*,a],L)$ jdi vlevo,
  - $\delta([q_4,B],[B,c]) = ([q_5,B],[B,c],L)$ $c$ pokračuj za střed ve stavu $q_5$,
- rozeskok podle toho, jestli je ještě co kontrolovat
  - $\delta([q_5,B],[B,a]) = ([q_6,B],[B,a],L)$ ještě budeme kontolovat,
  - $\delta([q_6,B],[B,a]) = ([q_6,B],[B,a],L)$ jdi vlevo,
  - $\delta([q_6,B],[*,a]) = ([q_1,B],[*,a],R)$ znovu začni,
  - $\delta([q_5,B],[*,a]) = ([q_7,B],[*,a],R)$ už vše vlevo od $c$ porovnáno, jdi vpravo,
  - $\delta([q_7,B],[B,c]) = ([q_8,B],[B,c],R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_8,B],[*,a]) = ([q_8,B],[*,a],R)$ pokračuj vpravo,
  - $\delta([q_8,B],[B,B]) = ([q_9,B],[B,B],R)$ přijmi.

**TM rozšíření: Vícepáskový TM**

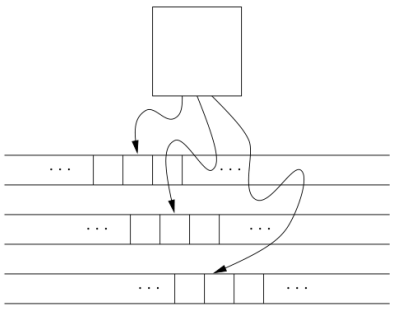
**Definition 10.8** (Vícepáskový Turingův stroj)**.** Počáteční pozice

- vstup na první pásce, ostatní zcela prázdné
- první hlava vlevo od vstupu, ostatní libovolně
- hlava v počátečním stavu

Jeden krok vícepáskového TM

- hlava přejde do nového stavu
- na každé pásce napíšeme nový symbol
- každá hlava se nezávisle posune vlevo, zůstane, vpravo.

Vícepáskový TM



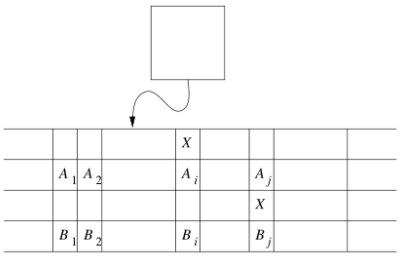
**Theorem 10.1** (Vícepáskový TM)**.** *Každý jazyk přijímaný vícepáskovým TM je přijímaný i nějakým (jednopáskovým) Turingovým strojem TM.*

**Proof: vícepáskový TM**

- konstruujeme Turingův stroj $M$
- pásku si představíme, že má $2k$ stop
  - liché stopy: pozice $k$–té hlavy
  - sudé stopy: znak na $k$–té pásce
- pro simulaci jednoho kroku navštívíme všechny hlavy
- ve stavu si pamatujeme
  - počet hlav vlevo
  - $\forall k$ symbol pod $k$–tou hlavou
- pak už umíme provést jeden krok (znovu běhat)

□

Simulace 2–páskového TM na jedné pásce




- Simulaci výpočtu $k$–páskového stroje o $n$ krocích lze provést v čase $O(n^2)$ (simulace jednoho kroku z prvních $n$ trvá $4n + 2k$, hlavy nejvýš $2n$ daleko, přečíst, zapsat, posunout značky).

**Rozšíření: Nedeterministické Turingovy stroje**

**Definition 10.9** (Nedeterministický TM)**.** **Nedeterministickým Turingovým strojem** nazýváme sedmici $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, kde $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, B, F$ jsou jako u TM a $\delta : (Q - F) \times \Gamma \to P(Q \times \Gamma \times \{L, R\})$.

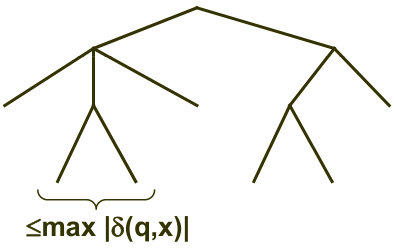
Slovo $w \in \Sigma^*$ **je přijímáno nedeterministickým TM** $M$, pokud existuje nějaký výpočet $q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$, $p \in F$.

**Theorem 10.2** (Nedeterministický TM)**.** *Pro každý $M_N$ nedeterministický TM existuje deterministický TM $M_D$ takový, že $L(M_N) = L(M_D)$.*

**Velmi stručně (příprava)**

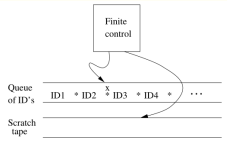
prohledáváme do šířky možné výpočty $M_N$

- odvozeno v $k$ krocích
- maximálně $m^k$ konfigurací
  - kde $m = max|\delta(q, x)|$ je max. počet voleb $M_N$



Proof: idea důkazu

- páska nekonečná – nelze použít podmnožinovou konstrukci
- prohledáváme do šířky všechny výpočty $M_N$
- modelujeme TM se dvěma páskami
  - první páska: posloupnost konfigurací
    - aktuální označena (křížkem na obrázku)
    - vlevo už prozkoumané, můžeme zapomenout
    - vpravo aktuální a pak další čekající
  - druhá páska: pomocný výpočet
- zpracování jedné konfigurace obnáší
  - přečti stav a symbol aktuální konfigu
  - je–li stav přijímající $\in F$, přijmi a sk
  - napiš konfiguraci ID na pomocnou pá
  - pro každý možný krok $\delta$ (uložený v hlavě $M_D$)
    - proveď krok a napiš novou ID na konec první pásky
  - vrať se k označené ID, značku vymaž a posuň o 1 doprava
  - opakuj




□

**Jednosměrná páska**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | ... |
| * | $X_{-1}$ | $X_{-2}$ | ... |

*Lemma* (Jednosměrná páska). Pro každý Turingův stroj $M_2$ existuje Turing. stroj $M_1$, který přijímá stejný jazyk a

- $M_1$ nikdy nejde vlevo od počáteční pozice
- $M_1$ nikdy nepíše blank B.

*Proof.*

- Místo $B$ blank zavedeme nový páskový symbol, $B_1$.
  - Místo každého psaní $B$ píšeme $B_1$ a všechny instrukce pro čtení $B$ zkopírujeme též pro čtení $B_1$.
  - Takto modifikovaný TM nikdy nepíše $B$ (píše $B_1$).
- Pro jednosměrnou pásku
  - Nejdřív přepíšeme vstup, aby byl v horní stopě dvoustopé pásky.
  - Pod nejlevější symbol dáme nový znak $*$, abychom věděli, že jsme na levém okraji, a máme přepnout z horní stopy do dolní. Ve stavu ('hlavě') si pamatujeme, jestli čteme horní stopu ('normálně') nebo spodní stopu (kde $L$ znamená doprava a $R$ doleva). Pokud vidíme $*$, odpovídající instrukce přepíšeme na změnu stopy (zhora vlevo přepnu na dolů, pokud jsem dole přešla na "*", mám rovnou číst horní symbol a směrovat dle horní pásky).

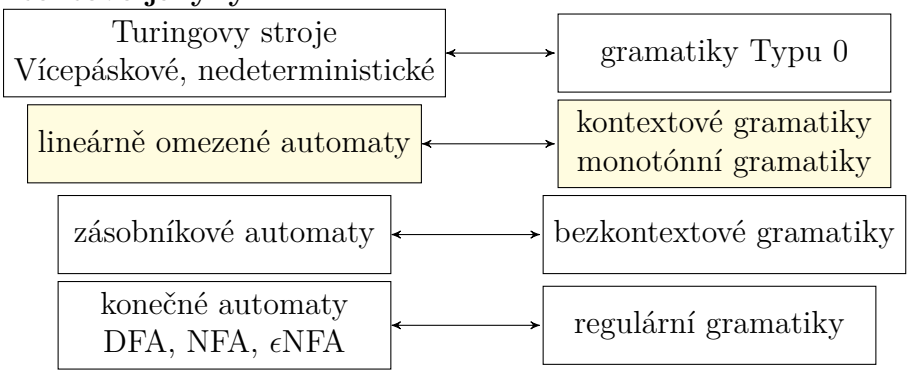
□

**Shrnutí**

- **Turingův stroj**: nekonečná oboustranná páska, může číst, psát, pohybovat hlavou.
- **Přijímání TM**: TM přijímá pokud vstoupí do koncového stavu. TM s výstupem: Hlava na prvním písmenu odpovědi, kromě odpovědi B.
- **Rekurzivně spočetné jazyky (RE)**: jazyky přijímané nějakým Turingovým strojem.
- **Konfigurace TM**: Všechny symboly pásky mezi nejlevějším a nejpravějším ne–B. Stav a pozice hlavy hned vlevo od právě čteného symbolu.
- modelovací triky
  - **Paměť v řídící jednotce**
  - **Více stop**
- Rozšíření TM bez rozšíření třídy přijímaných jazyků:
  - **Vícepáskové TM** Samostatný pohyb hlav na páskách (lze simulovat na přidaných stopách).
  - **Nedeterministický TM**: Má instrukce na výběr, na přijetí stačí jeden přijímající výpočet.
- Budou: **Lineárně omezené automaty LBA**
  - Vstupní slovo mezi levou a pravou značkou, hlava nesmí za tyto značky ani je přepsat.
  - LBA rozpoznávají právě kontextové jazyky.

# 11 Lineárně omezené automaty, Univerzální TM, Diagonální jazyk

**Kontextové jazyky**




- **gramatiky typu 1** (kontextové jazyky $\mathcal{L}_1$)
  - pouze pravidla ve tvaru $\alpha A\beta \to \alpha\omega\beta$

    $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$
  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \epsilon$, potom se ale $S$ nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla

### Chomského hierarchie

- **gramatiky typu 0** (rekurzivně spočetné jazyky $\mathcal{L}_0$)

  pravidla v obecné formě $\alpha \to \beta$, $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \alpha$ obsahuje neterminál

**gramatiky typu 1** (kontextové jazyky $\mathcal{L}_1$)

- pouze pravidla ve tvaru $\alpha A \beta \to \alpha \omega \beta$

  $A \in V, \alpha, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$

  – jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \epsilon$, potom se ale $S$ nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla

- **gramatiky typu 2** (bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$

- **gramatiky typu 3** (regulární/pravé lineární jazyky $\mathcal{L}_3$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega B, A \to \omega, A, B \in V, \omega \in T^*$

### Monotónní a kontextové gramatiky

*Example* 11.1 (kontextový jazyk). $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$ je kontextový jazyk, není bezkontextový.

| | | |
|---|---|---|
| | $S \to aSBC \mid abC$ | |
| | $CB \to BC$ | není kontextové, nutno rozepsat! |
| Monotónní gramatika: | $bB \to bb$ | |
| | $bC \to bc$ | |
| | $cC \to cc$ | |

- Je snažší napsat monotónní gramatiku

  a upravit ji na kontextovou.

- Vygeneruji stejný počet $a, B, C$.
- Přeuspořádám - proto potřebuji $B, C$ neterminály.
- Dovolím přepsat jen v abecedním pořadí

  – Začínám s malými $a$ s jedním $b$ za nimi.

  – $B$ se může přepsat, když je na řadě - vlevo od něj $b$.

  $\Rightarrow$ Především nedovolím přepsat $B$, pokud je před ním $c$.

### Separované gramatiky

**Definition 11.1** (Separovaná gramatika)**.** Gramatika je **separovaná**, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $\alpha \to \beta$, kde:

- buď $\alpha, \beta \in V^+$ (neprázdné posloupnosti neterminálů)
- nebo $\alpha \in V$ a $\beta \in T \cup \{\epsilon\}$.

*Lemma.* Ke každé gramatice $G$ lze sestrojit ekvivalentní separovanou gramatiku $G'$.

Proof:

- Nechť $G = (V, T, P, S)$
- pro každý terminál $a \in T$ zavedeme nový neterminál $A'$.
- v pravidlech z $P$
  - nahradíme terminály odpovídajícími neterminály
  - přidáme pravidla $A' \to a$
- Výsledná gramatika je separovaná a zřejmě $L(G) = L(G')$.

□

### Od monotonie ke kontextovosti

**Definition 11.2** (monotónní (nevypouštějící) gramatika)**.** Gramatika je **monotónní (nevypouštějící)**, jestliže pro každé pravidlo $(\alpha \to \beta) \in P$ platí $|\alpha| \leq |\beta|$. Monotónní gramatiky slovo v průběhu generování nezkracují.

*Lemma.* Ke každé monotónní gramatice lze nalézt ekvivalentní gramatiku kontextovou.

Proof:

- nejprve převedeme gramatiku na separovanou
  - tím se monotonie neporuší (a pravidla $A' \to a$ jsou kontextová)
- zbývající pravidla $A_1 \dots A_m \to B_1 \dots B_n$, $m \leq n$ převedeme na pravidla s novými neterminály $C$

$$
\begin{array}{llll}
A_1A_2 \dots A_m & \to C_1A_2 \dots A_m & C_1C_2 \dots C_m & \to B_1C_2 \dots C_m \\
C_1A_2 \dots A_m & \to C_1C_2 \dots A_m & B_1C_2 \dots C_m & \to B_1B_2 \dots C_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_1 \dots C_{m-1}A_m & \to C_1 \dots C_{m-1}C_m & B_1 \dots B_{m-1}C_m & \to B_1 \dots B_{m-1}B_m \dots B_n
\end{array}
$$

□

### Příklad kontextového jazyka

*Example* 11.2. Jazyk $L = \{a^i b^j c^k | 1 \leq i \leq j \leq k\}$ je kontextový jazyk, není bezkontextový.

Proof: (na jedničku povinné)

| | |
|---|---|
| $S \to aSBC \mid aBC$ | generování symbolů $a$ |
| $B \to BBC$ | množení symbolů $B$ |
| $C \to CC$ | množení symbolů $C$ |
| $CB \to BC$ | uspořádání symbolů $B$ a $C$ |
| $aB \to ab$ | začátek přepisu $B$ na $b$ |
| $bB \to bb$ | pokračování přepisu $B$ na $b$ |
| $bC \to bc$ | začátek přepisu $C$ na $c$ |
| $cC \to cc$ | pokračování přepisu $C$ na $c$ |

$CB \to BC$ není kontextové pravidlo, nahradíme ho

$CB \to XB$, $XB \to XY$, $XY \to BY$, $BY \to BC$

□

Dulezity je prepis, ktery chybi: $cB \to \times cb$.

### Lineárně omezené automaty

- Ještě potřebujeme ekvivalent pro kontextové gramatiky

- kontextovou gramatiku dostaneme z libovolné monotónní gramatiky

**Definition 11.3** (lineárně omezený automat (LBA))**. Lineárně omezený automat LBA** je nedeterministický TM, kde na pásce je označen levý a pravý konec $\underline{l}, \underline{r}$. Tyto symboly nelze při výpočtu přepsat a nesmí se jít nalevo od $\underline{l}$ a napravo od $\underline{r}$.

Slovo $w$ **je přijímáno lineárně omezeným automatem**, pokud existuje přijímající výpočet $q_0\underline{l}w\underline{r} \vdash^* \underline{l}\alpha p\beta\underline{r}$, $p \in F$.

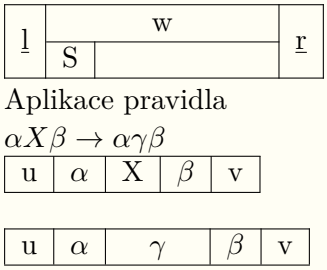
- Prostor výpočtu je definován vstupním slovem a automat při jeho přijímání nesmí překročit jeho délku
- u monotónních (kontextových) derivací to není problém – žádné slovo v derivaci není delší než vstupní slovo.

### Od kontextových jazyků k LBA

**Theorem 11.1.** *Každý kontextový jazyk lze přijímat pomocí LBA.*

Proof: z kontextové gramatiky k LBA

- prázdné slovo vyresíme zvlást
- derivaci gramatiky budeme simulovat pomocí LBA
- použijeme pásku se dvěma stopami
- slovo $w$ dáme nahoru, na začátek dolní stopy $S$
- přepisujeme slovo ve druhé stopě podle pravidel $G$
  - nedeterministicky vybereme část k přepsání
  - provedeme přepsání dle pravidla (pravá část se odsune)
- pokud jsou ve druhé stopě samé terminály, porovnáme ji s první stopou
  - slovo přijmeme nebo zamítneme




□

### Od LBA ke kontextovým jazykům

**Theorem 11.2.** *LBA přijímají pouze kontextové jazyky.*

**Proof: z LBA ke kontextovým gramatikám**

- potřebujeme převést LBA na monotónní gramatiku
  - tj. gramatika nesmí generovat nic navíc
- výpočet ukryjeme do 'dvoustopých' neterminálů
- generuj slovo ve tvaru $(a_0, [q_0, \underline{l}, a_0]), (a_1, a_1), \ldots, (a_n, [a_n, \underline{r}])$

| w | | |
|---|---|---|
| $q_0, \underline{l}, a_0$ | | $a_n, \underline{r}$ |

- simuluj práci LBA ve 'druhé' stopě (stejně jako u TM)
  - pro $\delta(p, x) = (q, x', R)$: $Px \to x'Q$
  - pro $\delta(p, x) = (q, x', L)$: $yPx \to Qyx'$
- pokud je stav koncový, smaž 'druhou' stop
- speciálně je třeba ošetřit přijímání prázdného slova
  - pokud LBA přijímá $\epsilon$, přidáme speciální startovací pravidlo.

□

Mějme lineárně omezený automat pro jazyk $L = \{a^{2n} | n \geq 1\}$, LBA $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_F\}, \{a\}, \{a, \underline{l}, \underline{r}\}, \delta, q_0, B,$ s $\delta$ v tabulce:

| $\delta$ | komentář |
|---|---|
| $\delta(q_0, \underline{l}) = (q_0, \underline{l}, R)$ | přeskočím prázdnou zarážku |
| $\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$ | zvětší čítač $(2k + 1$ symbolů) |
| $\delta(q_2, a) = (q_1, a, R)$ | zvětší čítač $(2k + 1$ symbolů) |
| $\delta(q_1, a) = (q_2, a, R)$ | nuluje čítač $(2k$ symbolů) |
| $\delta(q_2, \underline{r}) = (q_F, \underline{r}, L)$ | konec výpočtu, přijímám. |

*Example* 11.3 (Gramatika z lineárně omezeného automatu). Monotónní gramatika $G = (V, \{a\}, S, P_1 \cup P_2 \cup P_3)$

$$V = \left\{ S, L, C, R, \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ q_0 \underline{l} a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ \underline{l} q_0 a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ \underline{l} a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ q_2 a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ q_1 a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a \underline{r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ M_{\leftarrow} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ q_1 a \underline{r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ a q_2 \underline{r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ \underline{l} q_0 a \underline{r} \end{bmatrix} \right\}$$

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \to & LR | LCR \\ C & \to & CC | \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \\ L & \to & \begin{bmatrix} a \\ q_0 \underline{l} a \end{bmatrix} \\ R & \to & \begin{bmatrix} a \\ a \underline{r} \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Pravidla pro přechodovou funkci

$$P_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a \\ q_0\underline{l}a \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ \underline{l}q_0a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ \underline{l}q_0a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ \underline{l}a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ q_1a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ q_2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ q_1a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ q_1a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ q_2a \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ q_2a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a\underline{r} \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ q_1a\underline{r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ q_1a\underline{r} \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ aq_2\underline{r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a \\ aq_2\underline{r} \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ M_{\leftarrow} \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Pravidla mazání

$$P_3 = \left\{ \begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ M_{\leftarrow} \end{bmatrix} & \to & \begin{bmatrix} a \\ M_{\leftarrow} \end{bmatrix}a \\ \begin{bmatrix} a \\ \underline{l}a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ M_{\leftarrow} \end{bmatrix} & \to & aa \end{array} \right\}$$

Obecněji

- Při více písmenech bychom měli varianty (téměř) všech neterminálů pro každé písmeno.
- V pravidlech $P_1$ jen totéž písmeno nahoře i dole.
- Pokud skončíme uvnitř slova, musíme mazat do obou stran až k zarážkám.

**Theorem 11.3** (Rekurzivně spočetné jsou $\mathcal{L}_0$)**.** *Každý rekurzivně spočetný jazyk je typu* 0.

Proof: Od Turingova stroje ke gramatice

pro Turingův stroj $T$ najdeme gramatiku $G$, $L(T) = L(G)$

- $G = (\{S, C, D, E\} \cup \{\underline{X}\}_{x\in\Sigma\cup\Gamma} \cup \{Q_i\}_{q_i\in Q}, \Sigma, P, S)$, $P$ je:
- gramatika nejdříve vygeneruje pásku stroje a kopii slova

  $wB^n\underline{W}^RQ_0B^m$ , kde $B^i$ představují volný prostor pro výpočet
- potom simuluje výpočet (stavy jsou součástí slova)
- v koncovém stavu smažeme pásku, necháme pouze kopii slova

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $S \to DQ_0E$ | |
| | $D \to xD\underline{X}\|E$ | generuje slovo a jeho revizní kopii pro výpočet |
| | $E \to BE\|\epsilon$ | generuje volný prostor pro výpočet |
| 2) | $\underline{X}P \to Q\underline{X'}$ | pro $\delta(p, x) = (q, x', R)$ |
| | $\underline{X}P\underline{Y} \to \underline{X'}YQ$ | pro $\delta(p, x) = (q, x', L)$ |
| 3) | $P \to C$ | pro $p \in F$ |
| | $C\underline{A} \to C, \underline{A}C \to C$ | mazání pásky |
| | $C \to \epsilon$ | konec výpočtu |

□

**Příklad**

Turingův stroj pro jazyk $L = \{a^{2n}|n \geq 0\}$, TM $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_F\}, \{a\}, \{a\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$ s $\delta$ v tabulce:

| $\delta$ | komentář |
|---|---|
| $\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$ | první symbol |
| $\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$ | nuluje čítač ($2k$ symbolů) |
| $\delta(q_0, B) = (q_F, B, L)$ | přijme a zastaví |

Inicializace

*Example* 11.4. Gramatika $G = (\{S, C, D, E, Q_0, Q_1, Q_F, \underline{a}\}, \{a\}, S, P_1 \cup P_2 \cup P_3)$, $P_1 = \begin{Bmatrix} S & \to & DQ_0E \\ D & \to & aD\underline{a}|E \\ E & \to & BE|\epsilon \end{Bmatrix}$

Konkrétně pro $aa \in L(M)$ vygeneruji $aaB\underline{aa}Q_0$, mezivýsledek $aaB\underline{a}Q_F\underline{a}$ a výsledek $aa$.

**Od Turingova stroje ke gramatice**

Ještě $L(T) = L(G)$?

- $w \in L(T)$
  - existuje konečný výpočet stroje $T$ (konečný prostor)
  - gramatika vygeneruje dostatečně velký prostor pro výpočet
  - simuluje výpočet a smaže dvojníky.
- $w \in L(G)$
  - pravidla v derivaci nemusí být v pořadí, jakém chceme
  - derivaci můžeme přeuspořádat tak, že pořadí je 1),2),3).
  - podtržené symboly smazány, tj. vygenerován koncový stav.

*Example* 11.5. Turingův stroj $M = (\{q_0, q_1, q_F\}, \{a\}, \{a, B\}, \delta, q_0, B, \{q_F\})$
$\delta(q_0, B) = (q_F, B, R)$
$\delta(q_0, a) = (q_1, a, R)$
$\delta(q_1, a) = (q_0, a, R)$

**Gramatika po zjednodušení**

$G = (\{S, C, D, E, \underline{a}, Q_0, Q_1\}, \{a\}, P, S)$ $S \to DQ_0$
$D \to aD\underline{a}|B$
$BQ_0 \to C$
$\underline{a}Q_0 \to Q_1\underline{a}$
$\underline{a}Q_1 \to Q_0\underline{a}$
$C\underline{a} \to C$
$C \to \epsilon$

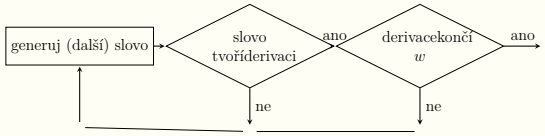
**Od gramatik k Turingově stroji**

**Theorem 11.4.** *Každý jazyk typu 0 je rekurzivně spočetný.*

Proof:

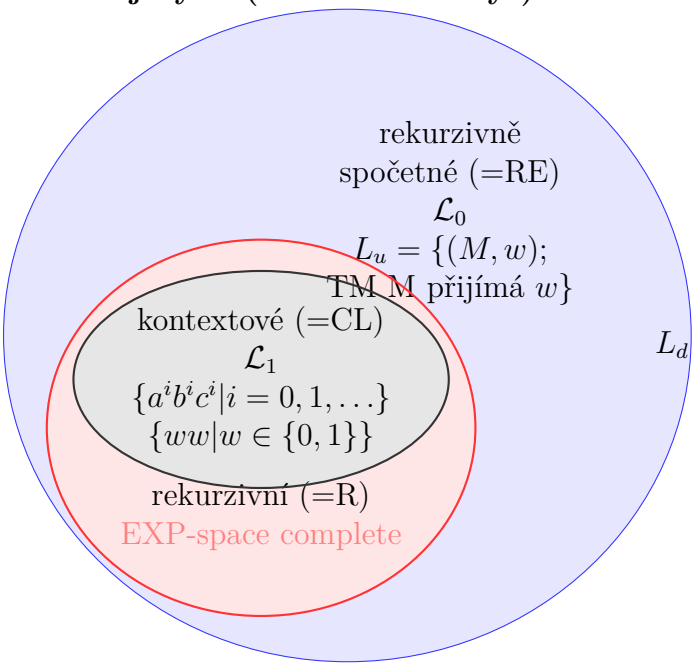
idea: TM postupně generuje všechny derivace

- derivaci $S \Rightarrow \omega_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \omega_n = w$ kódujeme jako slovo $\#S\#\omega_1\# \ldots \#w\#$
- umíme udělat TM, který přijímá slova $\#\alpha\#\beta\#$, kde $\alpha \Rightarrow \beta$
- umíme udělat TM, který přijímá slova $\#\omega_1\# \ldots \#\omega_k\#$, kde $\omega_1 \Rightarrow^* \omega_k$
- umíme udělat TM postupně generující všechna slova.




□

**Hierarchie jazyků (kontextové a výš)**




**Rekurzivní jazyky**

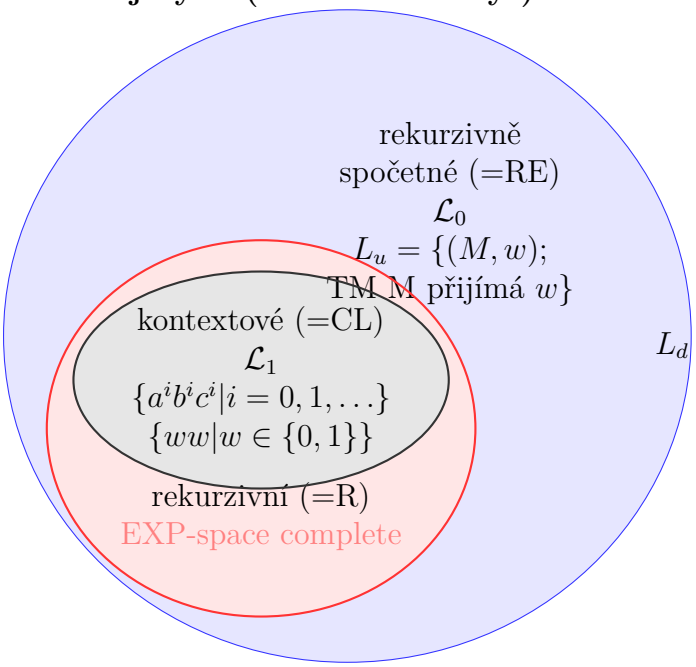
**Definition 11.4** (TM zastaví)**.** TM **zastaví** pokud vstoupí do stavu $q$, s čteným symbolem $X$, a není instrukce pro tuto konfiguraci, t.j., $\delta(q, X)$ není definováno.

- Z definice, v přijímajícím stavu $q \in F$ TM zastaví,
- dokud nezastaví, nevíme, jestli přijme nebo nepřijme slovo.

**Definition 11.5** (Rekurzivní jazyky)**.** Říkáme, že TM $M$ **rozhoduje jazyk** $L$, pokud $L = L(M)$ a pro každé $w \in \Sigma^*$ stroj nad $w$ zastaví.

Jazyky rozhodnutelné TM nazýváme **rekurzivní jazyky**.

**Hierarchie jazyků (kontextové a výš)**




**Jazyk který není rekurzivně spočetný**

Směřujeme k důkazu nerozhodnutelnosti jazyka dvojic $(M, w)$ takových, že:

- $M$ je binárně kódovaný Turingův stroj s abecedou $\{0, 1\}$,
- $w \in \{0, 1\}^*$ a
- $M$ nepřijímá vstup $w$.

Postup:

- Kódování TM binárním kódem pro libovolný počet stavů TM.
- Kód TM vezmeme TM jako binární řetězec.
- Pokud kód nedává smysl, reprezentuje TM bez transakcí. Tedy každý kód reprezentuje nějaký TM.
- **Diagonální jazyk** $L_d$; $L_d = \{w; \text{TM reprezentovaný jako } w \text{ takový, že } \textbf{nepřijímá}\ w\}$.
- Neexistuje TM přijímající jazyk $L_d$. Spuštění takového stroje na vlastním kódu by vedlo k paradoxu.

Jazyk $L_d$ není rekurzivně spočetný. Proto $\overline{L_d}$ není rekurzivní. Lze dokázat, že $\overline{L_d}$ je rekurzivně spočetný.

### Kódování

- Pro kódování TM $M = (Q, \{0, 1\}, \Gamma, \delta, q_1, B, \{q_2\})$ očíslujeme stavy, symboly a směry $L, R$.
- Předpokládejme:
  - Počáteční stav je vždy $q_1$.
  - Stav $q_2$ je vždy jediný koncový stav (nepotřebujeme víc, TM zastaví).
  - První symbol je vždy 0, druhý 1, třetí B, prázdný symbol. Ostatní symboly pásky očíslujeme libovolně.
  - Směr L je 1, směr R je 2.
- Jeden krok $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$ kódujeme: $0^i10^j10^k10^l10^m$. Všechna $i, j, k, l, m \geq 1$ takže se dvě jedničky za sebou nevyskytují.
- Celý TM se skládá z kódů všech přechodů v nějakém pořadí oddělených dvojicemi jedniček 11: $C_1 11 C_2 11 \ldots C_{n-1} 11 C_n$.

Budeme potřebovat uspořádat řetězce do posloupnosti:

- Řetězce bereme uspořádané podle délky, stejně dlouhé uspořádáme lexikograficky.
- První je $\epsilon$, druhý 0, třetí 1, čtvrtý 00 atd.
- $i$–tý řetězec označujeme $w_i$.

### Příklad kódování TM

**Turingův stroj**

$M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, B\}, \delta, q_1, B, \{q_2\})$

| $\delta$ | 0 | 1 | B |
|---|---|---|---|
| $\rightarrow q_1$ | | $(q_3, 0, R)$ | |
| $*q_2$ | | | |
| $q_3$ | $(q_1, 1, R)$ | $(q_2, 0, R)$ | $(q_3, 1, L)$. |

- Kód pro transakce:

| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|
| 0100100010100 | 0001010100100 | 00010010010100 | 0001000100010010 |

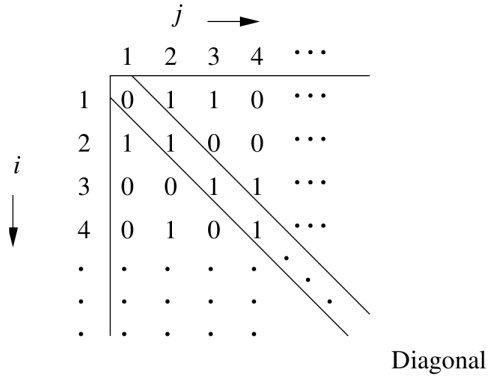
- Kód celého TM: 0100100010100110001010100100110001001001010011000100010001000 10.

**Definition 11.6** (Diagonální jazyk)**.** **Diagonální jazyk** $L_d$ je definovaný $L_d = \{w \in \{0,1\}^*; \text{TM reprezentovan}$

$L_d = \{w; \text{na diagonále je } 0\}$.

**Theorem 11.5.** *$L_d$ není rekurzivně spočetný jazyk, tj. neexistuje TM přijímající $L_d$.*

$i$ - kód TM
$j$ - vstup $w$
0/1 - prijima/neprijema




*Proof.*

- Předpokládejme $L_d$ je RE, $L_d = L(M_d)$ pro nějaký TM $M_d$.
- Jeho jazyk je $\{0,1\}$, tedy je v seznamu na obrázku: 'Přijímá TM $M_i$ vstupní slovo $w_j$?'
- Alespoň jeden řetězec ho kóduje, řekněme $code(M_d) = w_d$.
- Je $w_d \in L_d$
  - Pokud 'ano', na diagonále má být 0, tj. $w_d \notin L(M_d) = L_d$, spor.
  - Pokud 'ne', na diagonále má být 1, $w_d \in L(M_d) = L_d$, spor.

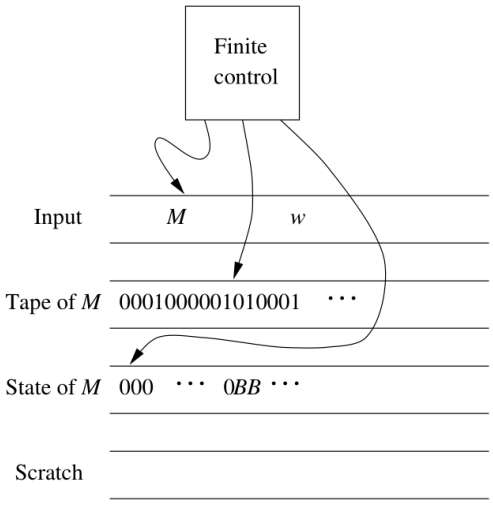
Proto takový $M_d$ neexistuje. Tedy $L_d$ není rekurzivně spočetný. □

### Univerzální Turingův stroj

**Definition 11.7** (Univerzální jazyk)**.** Definujeme **univerzální jazyk** $L_u$ jakožto množinu binárních řetězců které kódují pár $(M, w)$, kde $M$ je TM a $w \in L(M)$.

TM přijímající $L_u$ se nazývá **Univerzální Turingův stroj**.

**Theorem 11.6** (Existence Univerzálního Turingova stroje)**.** *Existuje Turingův stroj $U$, pro který $L_u = L(U)$.*



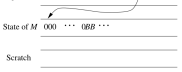

Popíšeme $U$ jako vícepáskový Turingův stroj.

- Přechody $M$ jsou napsány na první pásce spolu s řetězcem $w$.
- Na druhé pásce simulujeme výpočet $M$, používající formát jako kód $M$, tj. symboly $0^i$ oddělené jedničkou 1.
- Třetí páska obsahuje stav $M$ reprezentovaný $i$ nulami.

### Operace univerzálního Turingova stroje

Operace $U$ jsou následující:

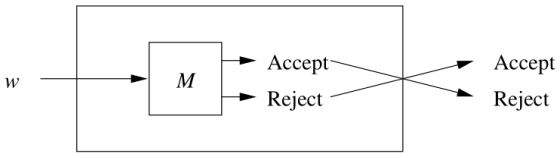
- Otestuj, zda je kód $M$ legitimní; pokud ne, $U$ zastav bez přijetí.
- Inicializuj druhou pásku kódovaným slovem $w$: 10 pro 0 ve $w$, 100 pro 1; blank jsou nechané prázdné a nahrazeny 1000 pouze 'v případě potřeby'.
- Napiš 0, počáteční stav $M$, na třetí pásku. Posuň hlavu druhé pásky na první simulované políčko.

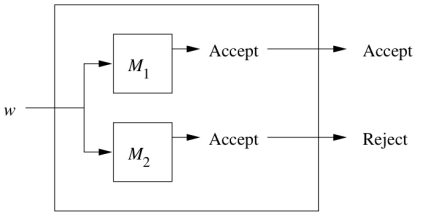



- Simuluj jednotlivé přechody $M$
  - Najdi na první pásce správnou transakci $0^i10^j10^k10^l10^m$, $0^i$ na pásce 3, $0^j$ na pásce 2.
  - Změň obsah pásky 3 na $0^k$.
  - Nahraď $0^j$ na 2. pásce řetězcem $0^l$. Použij čtvrtou 'scratch tape' pro správné mezery.
  - Posuň hlavu 2. pásky na pozici vedle 1 vlevo nebo vpravo, podle pohybu $m$.
- Pokud jsme nenašli instrukci pro $M$, zastavíme.
- Pokud $M$ přejde do přijímajícího stavu, pak $U$ také přijme. □

### $L\&\overline{L} \in RE \Rightarrow L, \overline{L}$ je rekurzivní

*Lemma.* Je–li $L$ rekurzivní jazyk, je rekurzivní i $\overline{L}$.




**Theorem 11.7** (Postova věta)**.** *Jazyk $L$ je rekurzivní, právě když $L$ i $\overline{L}$ (doplněk) jsou rekurzivně spočetné.*

Proof:

- Máme TM $L = L(M_1)$ a $\overline{L} = L(M_2)$.
- pro dané slovo $w$ naráz simulujeme $M_1$ i $M_2$ (dvě pásky, stav se dvěma komponentami).
- Pokud jeden z $M_i$ přijme, $M$ zastaví a odpoví.
- Jazyky jsou komplementární, jeden z $M_i$ vždy zastaví, $L$ je rekurzivní.

□

### Nerozhodnutelnost univerzálního jazyka

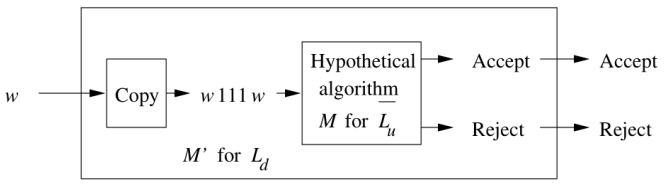
**Theorem 11.8** (Nerozhodnutelnost univerzálního jazyka)**.** *$L_u$ je rekurzivně spočetný, ale není rekurzivní.*

*Proof.*

- Máme TM přijímající $L_u$, tj. je RE.
- Předpokládejme, že je $L_u$ rekurzivní.
- Pak $\overline{L_u}$ by byl také rekurzivní.
- Pro TM přijímající $\overline{L_u}$ můžeme zkonstruovat TM přijímající $L_d$ (vpravo).
- Protože víme, že $L_d$ není RE, $\overline{L_u}$ není RE a $L_u$ není rekurzivní.

□

Modifikace TM pro $\overline{L_u}$ na TM pro $L_d$:




- Řetězec $w$ přepiš na $w111w$ (2–páskový, převeď na 1–páskový).
- Simuluj M na novém vstupu. Přijmi iff $M$ přijme.
- Stroj $M'$ přijímá $\overline{L_u}(w, w)$, tj. případy kdy $M_i$ nepřijímá $w_i$, tj. jazyk $L_d$.

# 12 Nerozhodnutelné problémy, Postův korespondenční p.

### Nerozhodnutelné problémy o automatech a gramatikách

**Definition 12.1** (Rozhodnutelný problém).

- **Problémem** $P$ myslíme matematicky/informaticky definovanou množinu otázek kódovatelnou řetězci nad abecedou $\Sigma$ s odpověďmi $\in \{ano, ne\}$.

  Pokud problém definuji jakožto množinu, jde o otázku, zda vstup kóduje prvek dané množiny (např. polynom s celočíselným kořenem).

- **Problém je (algoritmicky) rozhodnutelný**, pokud existuje Turingův stroj TM takový, že pro každý vstup $w \in P$ zastaví a navíc přijme právě když $P(w) = ano$ (tj. pro $P(w) = ne$ zastaví v ne–přijímacím stavu).
- Problém který není algoritmicky rozhodnutelný nazýváme **nerozhodnutelný problém**.

'Rozhodnutelný' mluví o problémech, 'rekurzivní' o jazycích, jinak jde o 'totéž'.

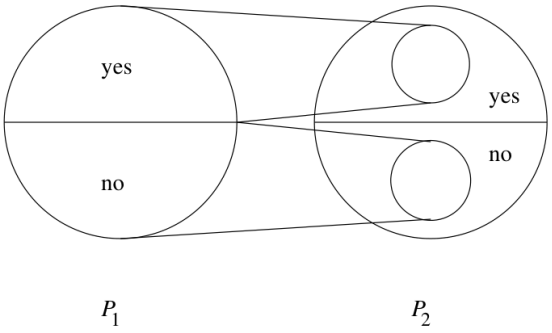
*Example* 12.1 ('Problémy').

- Obsahuje vstupní slovo pět nul?
- Je vstupní slovo korektně definovaným kódem Turingova stroje v kódování výše?
- Zastaví TM kódu $M$ nad slovem $w$?
- Zastaví TM kódu $w$ nad slovem $w$?

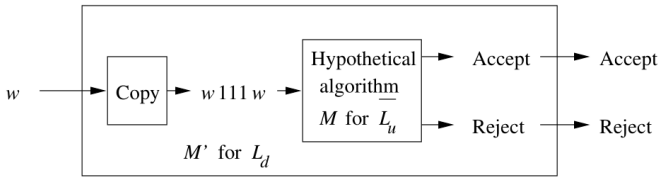
### Redukce

**Definition 12.2** (Redukce). **Redukcí problému** $P_1$ na $P_2$, nazýváme algoritmus $R$, který pro každou instanci $w \in P_1$ zastaví a vydá $R(w) \in P_2$ tak, že

- $P_1(w) = ano$ právě když $P_2(R(w)) = ano$
- tj. i $P_1(w) = ne$ právě když $P_2(R(w)) = ne$.




*Example* 12.2. Redukce TM pro $L_d$ na TM pro $\overline{L_u}$:

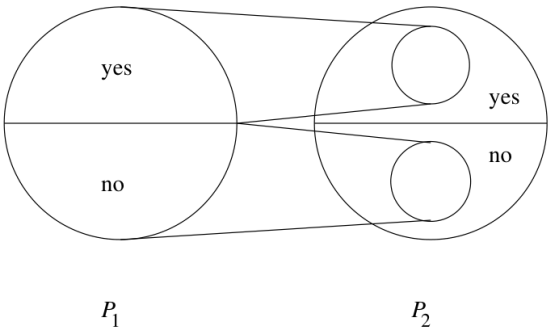



- $P_1$ = Nepřijímá TM reprezentovaný $w$ vstupní slovo $w$?
- $P_2$ = Nepřijímá TM reprezentovaný $M$ vstupní slovo $w$?

### Věta o (ne)rozhodnutelnosti díky redukci

**Theorem 12.1** (Redukce). *Pokud existuje redukce problému $P_1$ na $P_2$, pak:*

- *Pokud $P_1$ je nerozhodnutelný, pak je nerozhodnutelný i $P_2$.*
- *Pokud $P_1$ není rekurzivně spočetný, pak není RE ani $P_2$.*




*Proof.*

- Předpokládejme $P_1$ je nerozhodnutelný. Je–li možné rozhodnout $P_2$, pak můžeme zkombinovat redukci $P_1$ na $P_2$ s algoritmem rozhodujícím $P_2$ pro konstrukci algoritmu rozhodujícího $P_1$. Proto je $P_2$ nerozhodnutelný.

- Předpokládejme $P_1$ ne–RE, ale $P_2$ je RE. Podobně jako výše zkombinujeme redukci a výsledek $P_2$ k důkazu $P_1$ je RE; SPOR.

□

### Problém zastavení

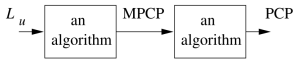
**Definition 12.3** (Problém zastavení)**.** **Instancí problému zastavení** je dvojice řetězců $M, w \in \{0,1\}^*$. **Problém zastavení** je najít alogritmus $Halt(M, w)$, který vydá 1 právě když stroj $M$ zastaví na vstupu $w$, jinak vydá 0.

**Theorem** (Problém zastavení)**.** *Problém zastavení není rozhodnutelný.*

*Proof.*
- Redukujeme $L_d$ na $Halt$.
- Předpokládejme, že máme algoritmus (Turingův stroj) pro $Halt()$.
- Modifikujeme ho na stroj $Halt_{no}(w)$; $w \in \{0,1\}^*$:
  - Pokud $Halt(w, w)$, spustíme nekonečný cyklus
  - jinak zastavíme.
- Otázka $Halt(Halt_{no}, Halt_{no})$ není řešitelná, proto algoritmus $Halt()$ nemůže existovat.

□

### Směřujeme k nerozhodnutelným problémům o bezkontextových gramatikách




- Ne-rozhodnutelnost univerzálního jazyka
- redukujeme na modifikovaný PCP (MPCP)
- což redukujeme na PCP
- což redukujeme na otázku $L(G_1) \cap L(G_2)$ pro dvě bezkontextové gramatiky
  - a další podobné otázky.

### Postův korespondenční problém

**Definition 12.4** (Postův korespondenční problém)**.** Instance **Postova korespondenčního problému (PCP)** jsou dva seznamy slov nad abecedou $\Sigma$ značené $A = w_1, w_2, \ldots, w_k$ a $B = x_1, x_2, \ldots, x_k$ stejné délky $k$. Pro každé $i$, dvojice $(w_i, x_i)$ se nazývá **odpovídající** dvojice.

Instance PCP **má řešení**, pokud existuje posloupnost jednoho či více přirozených čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tak že $w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_m} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$ tj. dostaneme stejné slovo. V tom případě říkáme, že posloupnost $i_1, i_2, \ldots, i_m$ **je řešení**.

**Postův korespondenční problém** je: Pro danou instanci PCP, rozhodněte, zda má řešení.

*Example* 12.3.

| | Seznam $A$ | Seznam $B$ |
|---|---|---|
| $i$ | $w_i$ | $x_i$ |
| 1 | 1 | 111 |
| 2 | 10111 | 10 |
| 3 | 10 | 0 |

- $\Sigma = \{0,1\}$, seznamy A,B v tabulce.
- Řešení $2, 1, 1, 3$ vytvoří slovo 101111110.
- Jiné řešení: 2,1,1,3,2,1,1,3.

### Částečná řešení

*Example* 12.4. $\Sigma = \{0, 1\}$. Neexistuje řešení pro seznamy:

| | List $A$ | List $B$ |
|---|---|---|
| $i$ | $w_i$ | $x_i$ |
| 1 | 10 | 101 |
| 2 | 011 | 11 |
| 3 | 101 | 011. |

Zdůvodnění:

- $i_1 = 1$, jinak by první symbol neodpovídal.
- Máme částečné řešení:
  A: $10\cdots$
  B: $101\cdots$

**Definition 12.5** (Částečné řešení)**.** **Částečným řešením** nazýváme posloupnost indexů $i_1, i_2, \ldots, i_r$ taková že jeden z řetězců $w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_r}$ a $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ je prefix druhého (i v případě, že řetězce nejsou totožné).

*Lemma.* Je–li posloupnost čísel řešením, pak je každý prefix částečným řešením.

- $i_2 = 1$, řetězce $\begin{matrix}1010\\101101\end{matrix}$ nesouhlasí na 4.pozici.
- $i_2 = 2$, $\begin{matrix}10011\\10111\end{matrix}$ nesouhlasí na 3.pozici.
- Je možné jen $i_2 = 3$.

A: $10101\cdots$
B: $101011\cdots$

- Jsme ve stejné pozici jako po volbě $i_1 = 1$.
- Nelze dostat oba řetězce na stejnou délku.

### Modifikovaný Postův korespondenční probém MPCP

**Definition 12.6** (Modifikovaný Postův korespondenční probém MPCP)**.** Mějme PCP, tj. seznamy $A = w_1, w_2, \ldots, w_k$ a $B = x_1, x_2, \ldots, x_k$. Hledáme seznam 0 nebo více přirozených čísel $i_1, i_2, \ldots, i_m$ tak že $\mathbf{w_1}, w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_m} = \mathbf{x_1}, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$. V tom případě říkáme, že PCP **má iniciální řešení**.
**Modifikovaný Postův korespondenční problém**: má PCP iniciální řešení?

*Example* 12.5. Tento PCP nemá iniciální řešení.

| | seznam $A$ | seznam $B$ |
|---|---|---|
| $i$ | $w_i$ | $x_i$ |
| 1 | 1 | 111 |
| 2 | 10111 | 10 |
| 3 | 10 | 0 |

Proof:

- Částečné instance $\begin{matrix}1\\111\end{matrix}$, $\begin{matrix}11\\111111\end{matrix}$ se nikdy nesrovnají na stejnou délku.
- Jiné volby vedou k různým písmenům abecedy.

□

### MPCP redukce na PCP

*Lemma* 12.1 (Red. MPCP na PCP). $w \in MPCP$ má iniciální řešení, právě když má $R(w)$ řešení.

| | List $A$ | List $B$ |
|---|---|---|
| $i$ | $w_i$ | $x_i$ |
| 1 | 1 | 111 |
| 2 | 10111 | 10 |
| 3 | 10 | 0 |

*Example* 12.6 (MPCP redukce na PCP.).

| | List $C$ | List $D$ |
|---|---|---|
| $i$ | $y_i$ | $z_i$ |
| 0 | *1* | *1*1*1 |
| 1 | 1* | *1*1*1 |
| 2 | 1*0*1*1*1* | *1*0 |
| 3 | 1*0* | *0 |
| 4 | $ | *$ |

Proof:

- Vezměme nové symboly $*, \$ \notin \Sigma$.
- $\forall i = 1, \ldots, k$ definujeme $y_i$ rozšířením $w_i$ s $*$ za každým písmenem $w_i$.
- $\forall i = 1, \ldots, k$ def. $z_i$ rozšířením $x_i$ s $*$ **před** každým písmenem $x_i$.
- $y_0 = *y_1$, $z_0 = z_1$.
- $y_{k+1} = \$$, $z_{k+1} = *\$$.
- $i_1, i_2, \ldots, i_m$ je iniciální řešení, iff $0, i_1, i_2, \ldots, i_m, (k+1)$ je řešení PCP.

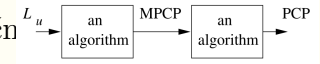
□

### Nerozhodnutelnost PCP

- Chceme dokázat, že PCP je algoritmicky nerozhodnutelný.
- Redukovali jsme MPCP na PCP (minulý slajd)
- a redukujeme $L_u$ na MPCP.

**Algorithm: Redukce $L_u$ na MPCP**

Konstruujeme MPCP pro TM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, který nikdy nepíše $B$ a nejde hlavou doleva od počátečn




$w \in \Sigma^*$ je vstupní slovo.

| seznam $A$ | seznam $B$ | |
|---|---|---|
| $\#$ | $\#q_0w\#$ | |
| $X$ | $X$ | $\forall\, X \in \Gamma$ |
| $\#$ | $\#$ | |
| $qX$ | $Yp$ | pro $\delta(q, X) = (p, Y, R)$ |
| $ZqX$ | $pZY$ | pro $\delta(q, X) = (p, Y, L), Z \in \Gamma$ symbol pásky |
| $q\#$ | $Yp\#$ | pro $\delta(q, B) = (p, Y, R)$ |
| $Zq\#$ | $pZY\#$ | pro $\delta(q, B) = (p, Y, L), Z \in \Gamma$ symbol pásky |
| $XqY$ | $q$ | $q \in F$, přijímající stav |
| $Xq$ | $q$ | $q \in F$ |
| $qY$ | $q$ | $q \in F$ |
| $q\#\#$ | $q\#$ | $q \in F$. |

*Example* 12.7. Konvertujme TM $M = (\{q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \{0, 1, X, Y, B\}, \delta, q_1, B, \{q_3\})$

| $q_i$ | $\delta(q_i, 0)$ | $\delta(q_i, 1)$ | $\delta(q_i, B)$ |
|---|---|---|---|
| $q_1$ | $(q_2, 1, R)$ | $(q_2, 0, L)$ | $(q_2, 1, L)$ |
| $q_2$ | $(q_3, 0, L)$ | $(q_1, 0, R)$ | $(q_2, 0, R)$ |
| $q_3$ | – | – | – |

a vstupní slovo $w = 01$ na instanci MPCP.

| seznam $A$ | seznam $B$ | zdroj |
|---|---|---|
| $q_10$ | $1q_2$ | z $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$ |
| $0q_11$ | $q_200$ | z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$ |
| $1q_11$ | $q_210$ | z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$ |
| $0q_1\#$ | $q_201\#$ | z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$ |
| $1q_1\#$ | $q_211\#$ | z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$ |
| $0q_20$ | $q_300$ | z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$ |
| $1q_20$ | $q_310$ | z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$ |
| $q_21$ | $0q_1$ | z $\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$ |
| $q_2\#$ | $0q_2\#$ | z $\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$ |

= Seznam dvojic bez $B$ symbolu (ve dvou tabulkách)

| seznam $A$ | seznam $B$ |
|---|---|
| $\#$ | $\#q_101\#$ |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| $\#$ | $\#$ |
| $0q_30$ | $q_3$ |
| $0q_31$ | $q_3$ |
| $1q_30$ | $q_3$ |
| $1q_31$ | $q_3$ |
| $0q_3$ | $q_3$ |
| $1q_3$ | $q_3$ |
| $q_30$ | $q_3$ |
| $q_31$ | $q_3$ |
| $q_3\#\#$ | $\#$ |

### MPCP simulace TM

| seznam $A$ | seznam $B$ | zdroj |
|---|---|---|
| $q_1 0$ | $1 q_2$ | z $\delta(q_1, 0) = (q_2, 1, R)$ |
| $0 q_1 1$ | $q_2 00$ | z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$ |
| $1 q_1 1$ | $q_2 10$ | z $\delta(q_1, 1) = (q_2, 0, L)$ |
| $0 q_1 \#$ | $q_2 01\#$ | z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$ |
| $1 q_1 \#$ | $q_2 11\#$ | z $\delta(q_1, B) = (q_2, 1, L)$ |
| $0 q_2 0$ | $q_3 00$ | z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$ |
| $1 q_2 0$ | $q_3 10$ | z $\delta(q_2, 0) = (q_3, 0, L)$ |
| $q_2 1$ | $0 q_1$ | z $\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$ |
| $q_2 \#$ | $0 q_2 \#$ | z $\delta(q_2, B) = (q_2, 0, R)$ |

| seznam $A$ | seznam $B$ |
|---|---|
| # | $\#q_1 01\#$ |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| # | # |
| $0 q_3 0$ | $q_3$ |
| $0 q_3 1$ | $q_3$ |
| $1 q_3 0$ | $q_3$ |
| $1 q_3 1$ | $q_3$ |
| $0 q_3$ | $q_3$ |
| $1 q_3$ | $q_3$ |
| $q_3 0$ | $q_3$ |
| $q_3 1$ | $q_3$ |
| $q_3 \#\#$ | # |

- $M$ přijímá posloupností $q_1 01 \vdash 1 q_2 1 \vdash 10 q_1 \vdash 1 q_2 01 \vdash q_3 101$.

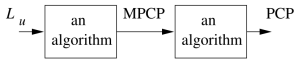
$A$ : $\#q_1 01\#1q_2 1\#10q_1\#1q_2 01\#q_3 101\#q_3 01\#q_3 1\#q_3\#\#$
$B$ : $\#q_1 01\#1q_2 1\#10q_1\#1q_2 01\#q_3 101\#q_3 01\#q_3 1\#q_3\#\#$

### PCP je algoritmicky nerozhodnutelný

**Theorem 12.2** (PCP je algoritmicky nerozhodnutelný)**.** *Postův korespondenční problém PCP je algoritmicky nerozhodnutelný.*

*Proof.* Předchozí algoritmus redukuje $L_u$ na MPCP. Chceme dokázat:

- $M$ přijímá $w$ právě když zkonstruovaný P




$\Rightarrow$ Pokud $w \in L(M)$, začneme iniciálním párem a simulujeme výpočet $M$ na $w$.

$\Leftarrow$ Máme–li iniciální řešení PCP, odpovídá přijímajícímu výpočtu $M$ nad $w$.

- MPCP musí začít první dvojicí.
- Dokud $q \notin F$, mazací pravidla se nepoužijí.
- Pokud $q \notin F$, částečné řešení je tvaru: $\begin{matrix} \text{A:}x \\ \text{B:}xy \end{matrix}$, t.j. B je delší než A
- tedy musel skončit v přijímajícím stavu.

□

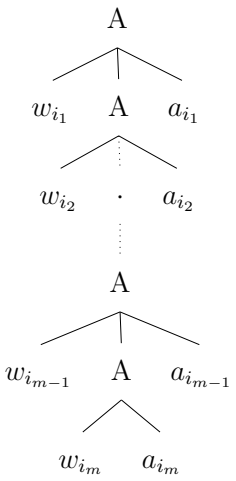
### Algoritmická rozhodnutelnost u CFL

Pro bezkontextové jazyky je algoritmicky rozhodnutelné

- zda dané slovo patří či nepatří do jazyka
  - prázdné slovo zvlášť
  - pak algoritmus CYK
  - nebo otestovat všechny derivace s $2|w| - 1$ pravidly,
- zda je jazyk prázdný
  - algoritmus redukce gramatiky (ne–nenerujících a nedosažitelných), zjistíme, zda lze z $S$ generovat terminální slovo

### Nerozhodnutelnost víceznačnosti CFG

**Theorem 12.3.** *Je algoritmicky nerozhodnutelné, zda je bezkontextová gramatika víceznačná (tj. existuje slovo jazyka gramatiky, které má dva různé derivační stomy).*




Redukujeme PKP na náš problém.
Mějme instanci PCP $(A = w_1, w_2, \ldots, w_k, B = x_1, x_2, \ldots, x_k)$, množinu indexů $a_1, a_2, \ldots, a_k \in N$ a tři gramatiky $G_A, G_B, G_{AB}$:

$$\begin{array}{lll} G_A & A \to & w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \ldots | w_k A a_k | \\ & & w_1 a_1 | w_2 a_2 | \ldots | w_k a_k \\ G_B & B \to & x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \ldots | x_k B a_k | \\ & & x_1 a_1 | x_2 a_2 | \ldots | x_k a_k \\ G_{AB} & \{S \to & A | B\} \cup G_A \cup G_B. \end{array}$$

Gramatika $G_{AB}$ je víceznačná právě když instance $(A, B)$ PCP má řešení.

- Každé slovo v $G_A$ má jednoznačnou derivaci (danou $a_i$ vpravo). Podobně pro $B$.

### Nerozhodnutelné problémy pro bezkontextové jazyky CFG

**Theorem 12.4** (Nerozhodnutelné problémy o CFG)**.** *Mějme $G_1, G_2$ bezkontextové gramatiky, $R$ regulární výraz. Následující problémy jsou algoritmicky nerozhodnutelné:*

1. *Je $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$?*
2. *Je $L(G_1) = T^*$ pro nějakou abecedu $T$?*
3. *Je $L(G_1) = L(G_2)$?*
4. *Je $L(G_1) = L(R)$?*
5. *Je $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?*
6. *Je $L(R) \subseteq L(G_1)$?*

**Průnik** $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Proof: 1 $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$

Převedeme PKP na (1)

- zvolíme nové terminály $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pro kódy indexů

$$\begin{array}{lll} G_1 & A \to & w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \ldots | w_k A a_k | \\ & & w_1 a_1 | w_2 a_2 | \ldots | w_k a_k \\ G_2 & B \to & x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \ldots | x_k B a_k | \\ & & x_1 a_1 | x_2 a_2 | \ldots | x_k a_k \end{array}$$

- PKP má řešení právě když $L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset$
- první část se musí rovnat, druhá $(a_i)$ zajišťuje stejné pořadí.

□

**Vše** $L(G) = T^*$

**Proof: 2** $L(G) = T^*$

Převedeme PKP na (2):

- zvolíme nové terminály $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ pro kódy indexů

$$\begin{array}{lll} G_1 & A \to & w_1 A a_1 | w_2 A a_2 | \ldots | w_k A a_k | \\ & & w_1 a_1 | w_2 a_2 | \ldots | w_k a_k \\ G_2 & B \to & x_1 B a_1 | x_2 B a_2 | \ldots | x_k B a_k | \\ & & x_1 a_1 | x_2 a_2 | \ldots | x_k a_k \end{array}$$

- jazyky $L(G_1), L(G_2)$ jsou deterministické,
- tedy $\overline{L(G_1)}, \overline{L(G_2)}$ jsou deterministické CFL a $\overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$ je CFL
- máme CFG $G$ gramatiku s $L(G) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)}$
- PKP má řešení $\Leftrightarrow L(G_1) \cap L(G_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow L(G) = \overline{L(G_1)} \cup \overline{L(G_2)} \neq \Sigma^*$.

□

- Poznámka: $L(G) = \emptyset$ je algoritmicky rozhodnutelné.
- CFL nejsou uzavřené na doplněk, pouze deterministické CFL ano.

**Proof: 3-6**

Zbylé algoritmicky nerozhodnutelné problémy.

3 Je $L(G_1) = L(G_2)$?

- Důkaz: ať $G_1$ generuje $\Sigma^*$.

4 Je $L(G_1) = L(R)$?

- Důkaz: za $R$ zvolíme $\Sigma^*$.

5 Je $L(G_1) \subseteq L(G_2)$?

- Důkaz: ať $G_1$ generuje $\Sigma^*$.

6 Je $L(R) \subseteq L(G_1)$?

- Důkaz: za $R$ zvolíme $\Sigma^*$.

□

- Poznámka: $L(G) \subseteq L(R)$ je algoritmicky rozhodnutelné

  $L(G) \subseteq L(R) \Leftrightarrow L(G) \cap \overline{L(R)} = \emptyset$ a zároveň $(L(G) \cap \overline{L(R)})$ je CFL (uzavřenost operací)

**Shrnutí**

Popis nekonečných objektů konečnými prostředky

- regulární jazyky
  - konečné automaty (NFA, 2FA)
  - Nerode (rozklad), Kleene (elementární operace), pumpování
- bezkontextové jazyky

  - zásobníkové automaty (DPDA≠ PDA)
  - pumpování
- kontextové jazyky
  - lineárně omezené automaty
  - monotonie
- rekurzivně spočetné jazyky
  - Turingovy stroje
  - algoritmická nerozhodnutelnost

použití nejen pro práci s jazyky.

# 13 Časová složitost

### Časová složitost

**Definition 13.1** (časová složitost)**.** Mějme Turingův stroj $M$, který zastaví na každém vstupu. **Časová složitost** $M$ je funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet kroků výpočtu $M$ nad vstupy délky $n$.

**Definition 13.2** ((Asymptotická) horní hranice $O(g(n))$)**.** Mějme funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Říkáme, že $f(n) \in O(g(n))$, pokud existují $c, n_0 \in \mathbb{N}^+$ taková, že:

$$\forall n \geq n_0 \text{ platí } f(n) \leq c \cdot g(n).$$

V takovém případě říkáme, že $g(n)$ je (asymptotická) **horní hranice** pro $f(n)$. (Slovo asymptotická vyjadřující ignorování prvních $n_0$ i konstanty $c$ se zpravidla vynechává.)

- Reálná čísla jsou tam kvůli logaritmu.
- Např. $f(5n^3 + 2n^2 + 22n + 6) \in O(n^3)$ s $n_0 = 10$, $c = 6$.

**Definition 13.3** (třída časové složitosti)**.** Mějme funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definujeme **třídu časové složitosti** $TIME(t(n))$ jakožto množinu všech jazyků, které jsou rozhodnutelné jednopáskový Turingovým strojem v čase $O(t(n))$ tj. vždy zastaví, pro vstup délky $n$ nejpozději po $O(t(n))$ krocích, a vydá správnou odpověď.

*Example* 13.1 ($\{0^i1^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n^2)$)**.** Jazyk $\{0^i1^i | i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n^2)$

1. Zkontroluj vstup $0^i1^j$, pokud za 1 je 0, nepřijmi (čas $O(n)$)
2. návrat na začátek se schová v konstantě, $O(2n) = O(n)$
3. procházej postupně 0 v čase $O(n^2)$

   <+-> přepiš 0 na $X$

   <+-> najdi 1 a přepiš na $X$

   <+-> vrať se na začátek
4. Když už není 0, ověř že není ani 1 a přijmi (s 1 nepřijmi). (čas $O(n)$)

### Jde to rychleji?

*Example* 13.2 ($\{0^i1^i|i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n \log n)$). Jazyk $\{0^i1^i|i \in \mathbb{N}_0\}$ je $O(n \log n)$

<+-> Zkontroluj vstup $0^i1^j$, zkontroluj sudou délku (čas $O(n)$)

<+-> procházej dokud najdeš 0 v čase $(O(n \log n))$

(a) přepiš každou druhou 0 na $X$

(b) přepiš každou druhou 1 na $X$

(c) zkontroluj sudost počtu nul a jedniček dohromady, pokud ne, nepřijmi.

(d) a vrať se na začátek

<+-> Když už není 0, ověř že není ani 1 a přijmi (s 1 nepřijmi). (čas $O(n)$)

### Regulární jazyky - jen pro zajímavost

- O moc rychleji to nejde.

**Definition** ($o()$)**.** Mějme funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Říkáme, že $f(n) = o(g(n))$, pokud

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Tj. pro každé $c > 0$ existuje $n_0$ takové, že $(\forall n > n_0)$ $(f(n) < cg(n))$.

- Malé $o$ má význam 'ostře menší', velké $O$ menší nebo rovno.

**Theorem** (just for info)**.** *Každý jazyk rozhodnutelný v čase $o(n \log n)$ na jednopáskovém Turingově stroji je regulární.*

### Vícepáskový Turingův stroj

**Vícepáskový Turingův stroj pro $\{0^n1^n\}$**

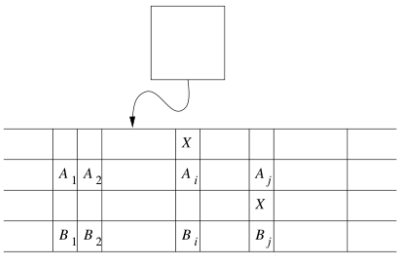
```
1: procedure 0N1N( w ∈ {0,1}* )
2:     Kopíruj nuly na pomocnou pásku.
3:     Na první jedničce přepni do nového stavu, maž nulu i jedničku.
4:     return Vymazaly se zároveň nuly i vstupní páska?
5: end procedure
```

*Lemma.* Mějme funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $t(n) \geq n$. Každý vícepáskový Turingův stroj s časem $t(n)$ má jednopáskový ekvivalent $O(t^2(n))$.

**Proof: opakování**

- Simulaci výpočtu $k$–páskového stroje o $n$ krocích lze provést v čase $O(n^2)$ (simulace jednoho kroku z prvních $n$ trvá $4n+2k$, hlavy nejvýš $2n$ daleko, přečíst, zapsat, posunout značky). □

Simulace 2–páskového TM na jedné pásce



### Nedeterministický Turingův stroj

**Definition 13.4** (doba běhu nedeterministického TM)**.** Mějme **nedeterministický** Turingův stroj $M$, který zastaví na každém vstupu. **Doba běhu** $M$ je funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet kroků který $M$ potřebuje v jakékoli větvi výpočtu nad jakýmkoli vstupem délky $n$.

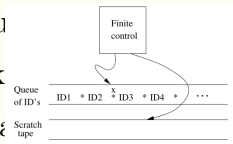
O takovém nedeterministickém Turingovu stroji $M$ říkáme, že **rozhoduje** jazyk $L(M)$ v čase $f(n)$.

**Theorem 13.1.** *Mějme funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, $t(n) \geq n$. Každý nedeterministický Turingův stroj s časem $t(n)$ má deterministický ekvivalent $2^{O(t(n))}$.*

- Pokud pro dvojici $Q \times \Gamma$ máme maximálně $d$ variant, pak po $k$ krocích se TM může dostat maximálně do $d^k$ konfigurací.
- Jeden krok zvládneme 'schovat do konstanty' k $t(n)$, logaritmus $d$ pro převod také, proto simulace je v čase $O(t(n)d^{t(n)}) = 2^{O(t(n))}$.
- Máme přidat převod simulace více pásek, ale $(2^{O(t(n))})^2 = 2^{O(2t(n))} = 2^{O(t(n))}$.

**Proof:** opakování - idea důkazu

- páska nekonečná – nelze použít podmnožinovou konstrukci
- prohledáváme do šířky všechny výpočty $M_N$
- modelujeme TM se dvěma páskami
  - první páska: posloupnost konfigurací
    - aktuální označena (křížkem na obrázku)
    - vlevo už prozkoumané, můžeme zapomenout
    - vpravo aktuální a pak další čekající
  - druhá páska: pomocný výpočet
- zpracování jedné konfigurace obnáší
  - přečti stav a symbol aktuální konfigu
  - je–li stav přijímající $\in F$, přijmi a sk
  - napiš konfiguraci ID na pomocnou pá
  - pro každý možný krok $\delta$ (uložený v hlavě $M_D$)
    - proveď krok a napiš novou ID na konec první pásky
  - vrať se k označené ID, značku vymaž a posuň o 1 doprava
  - opakuj




□

### Opakování - Jednosměrná páska

| | | | |
|---|---|---|---|
| $X_0$ | $X_1$ | $X_2$ | $\ldots$ |
| $*$ | $X_{-1}$ | $X_{-2}$ | $\ldots$ |

*Lemma* (Jednosměrná páska). Pro každý Turingův stroj $M_2$ existuje Turing. stroj $M_1$, který přijímá stejný jazyk a

- $M_1$ nikdy nejde vlevo od počáteční pozice

- $M_1$ nikdy nepíše blank B.

*Proof.*
- Místo $B$ blank zavedeme nový páskový symbol, $B_1$.
  - Místo každého psaní $B$ píšeme $B_1$ a všechny instrukce pro čtení $B$ zkopírujeme též pro čtení $B_1$.
  - Takto modifikovaný TM nikdy nepíše $B$ (píše $B_1$).
- Pro jednosměrnou pásku
  - Nejdřív přepíšeme vstup, aby byl v horní stopě dvoustopé pásky.
  - Pod nejlevější symbol dáme nový znak $*$, abychom věděli, že jsme na levém okraji, a máme přepnout z horní stopy do dolní. Ve stavu ('hlavě') si pamatujeme, jestli čteme horní stopu ('normálně') nebo spodní stopu (kde $L$ znamená doprava a $R$ doleva). Pokud vidíme $*$, odpovídající instrukce přepíšeme na změnu stopy (zhora vlevo přepnu na dolů, pokud jsem dole přešla na "*", mám rovnou číst horní symbol a směrovat dle horní pásky).

□

**Definition 13.5** (třída $P$)**.** Definujeme **$P$ ($PTIME$) třídu jazyků rozhodnutelných v polynomiálním čase** jednopáskovým deterministickým Turingovým strojem. Tedy:

$$P = \bigcup_k TIME(n^k).$$

**Theorem 13.2** ($CFL \subseteq P$)**.** *Každý bezkontextový jazyk patří to $P$.*

*Proof.*
- Gramatiku převedeme do ChNF (velikost nezávisí na $n$),
- CYK algorithmus je polynomiální ($O(n^3)$).

□

*Example* 13.3.
- Cesta v grafu $PATH$
- Nesoudělná čísla $RELPRIME$
  - Repeat until $y = 0$
  - $x \leftarrow x \mod y$
  - exchange $x$ and $y$
  - Return $x$.

**Verifikátory, třída $NP$**

**Definition 13.6** (Verifikátor)**.**
- **Verifikátor** jazyka $L$ je algoritmus $V$, kde:

$$L = \{w \mid V \text{ pro nějaký řetězec } c \text{ přijímá } \langle w, c\rangle\}.$$

- Nápověda $c$ pro snadné ověření se nazývá **certifikát**.
- Časová složitost verifikátoru se měří pouze vzhledem k délce $w$, **polynomiální verifikátor** rozhoduje v čase polynomiálním vzhledem k $|w|$.
- Jazyk $L$ je **polynomiálně verifikovatelný**, pokud má polynomiální verifikátor. Pak i certifikát vždy existuje i polynomiální, delší by verifikátor nestihl ani přečíst.

**Definition 13.7** (NP)**. Třída jazyků rozhodnutelných v polynomiálním čase $NP$** je tvořena jazyky s polynomiálním verifikátorem.

**Hamiltonovská cesta**

*Example* 13.4.

$$HAMPATH = \{\langle G, s, t\rangle | G \text{ je orientovaný graf s hamiltonovskou cestou z } s \text{ do } t\}.$$

Hamiltonovská cesta je taková (orientovaná) cesta, která obsahuje každý vrchol grafu právě jednou.

- Složitost u grafů bereme vůči počtu uzlů, počet hran je max. kvadratický, tj. polynomiální.
- Náš certifikát je posloupnost vrcholů cesty.
- Algoritmus v polynomiálním čase ověří, že jde o hamiltonovskou cestu.
- Pro $\overline{HAMPATH}$, neznáme verifikátor (jen umíme ověřit v exponenciálním čase).

  ($\overline{HAMPATH}$ je množina (neplatných vstupů $HAMPATH$ a) orientovaných grafů s dvojicí vrcholů $s$,$t$, pro které neexistuje hamiltonovská cesta z $s$ do $t$.)

**Třídy** $NTIME$

**Definition 13.8** ($NP$)**.** Mějme funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definujeme třídu

$$NTIME(t(n)) = \{L \mid L \text{ jazyk rozhodnutelný nedeterminist. TM v čase } O(t(n)).\}$$

**Definition** (definice)**. Třída jazyků rozhodnutelných v polynomiálním čase** (značíme $NP$) je tvořena jazyky s polynomiálním verifikátorem.

**Theorem 13.3.**

$$NP = \bigcup_k NTIME(n^k).$$

- Idea důkazu: převedeme verifikátor na NTM a opačně.
- NTM uhodne certifikát a simuluje verifikátor.
- Verifikátor bere přijímající větev NTM jakožto certifikát.

*verif.* $\Rightarrow \bigcup$ .

- Předpokládáme $L \in NP$.
- Hledáme nedeterministický TM $M$.
- Vezmeme verifikátor $V$ z definice $NP$. Nechť rozhoduje $L$ v čase $n^k$.
- $M$ na vstupu $w$ délky $n$:
  - Nedeterministicky uhodne řetězec $c$ délky nanejvýš $n^k$.
  - Spustí $V$ na vstupu $\langle w, c\rangle$.
  - Pokud $V$ přijme, $M$ také přijme.

□

$\bigcup \Rightarrow$ *verifikátor* .

- Předpokládáme $L = L(M)$ rozhodnutelný nějakým NTM $M$ v polynomiálním čase.
- Hledáme verifikátor $V$.
- $V$ na vstupu $\langle w, c\rangle$:
  - Simuluje $M$ na vstupu $w$, v bodech větvení vybere větev podle $c$.
  - Pokud tato větev NTM přijme, $V$ přijme.

- Pokud všechny větve selhaly, NTM nepřijímá.

□

*Example* 13.5 ($CLIQUE$ je NP). Problém $k$-kliky $CLIQUE$ je v daném grafu $G$ určit, jestli existuje klika velikosti $k$, tj.

$$CLIQUE = \{\langle G, k\rangle | G \text{ je neorientovaný graf s klikou velikosti } k\}.$$

**Verifikátor pro $CLIQUE$**

```
1: procedure CLIQUE_VERIFIER( ⟨⟨G, k⟩, c⟩ )
2:     Otestuj, jestli c je podgraf G o k uzlech.
3:     Otestuj, jestli je c klika, tj. úplný podgraf, má všechny hrany.
4:     return Oba předchozí testy TRUE?
5: end procedure
```

**Nedeterministický Turingův stroj pro $CLIQUE$**

```
1: procedure CLIQUE_NTM( ⟨G, k⟩ )
2:     Nedeterministicky vyber k prvkovou podmnožinu c vrcholů G.
3:     return Je c klika? tj. úplný podgraf, má všechny hrany.
4: end procedure
```

### Převoditelnost v polynomiálním čase

**Definition 13.9** (). Funkci $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ nazveme **polynomiálně vyčíslitelnou**, pokud existuje Turingův stroj $M$, který pro každý vstup $w$ v polynomiálním čase zastaví s $f(w)$ na pásce.

Jazyk $A$ je **převoditelný v polynomiálním čase** na jazyk $B$, $A \leq_P B$, pokud existuje funkce $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ vyčíslitelná v polynomiálním čase a pro každé $w \in \Sigma^*$

$$w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B.$$

Funkci $f$ pak nazýváme **polynomiální redukcí $A$ do $B$**.

**Definition 13.10** (SAT, 3SAT)**.** Formuli $\phi$ nazveme **3-cnf formule**, pokud je formule výrokové logiky v CNF, kde v každé klauzuli jsou nejvýše tři literály.

Formule **je splnitelná**, pokud existuje takové ohodnocení výrokových proměnných, že je hodnota formule TRUE.

Problém **3SAT** je pro každou 3-cnf formuli rozhodnout, zda je splnitelná, tj.

$$3SAT = \{\phi \mid \phi \text{ je splnitelná 3-cnf formule}\}.$$

Problém **SAT** je pro každou booleovskou formuli v rozhodnout, zda je splnitelná

$$SAT = \{\phi \mid \phi \text{ je splnitelná formule}\}.$$

**Theorem 13.4.** *$3SAT$ je polynomiálně převoditelný na $CLIQUE$.*

*Proof.*
- Každý výskyt proměnné - uzel grafu.
- Hrany všude, jen ne:
  - mezi uzly z téže klauzule
  - mezi proměnnou a její negací $x$ a $\neg x$.

□

### $NP$ úplnost

**Definition 13.11** ($NP$ úplnost)**.** Jazyk $B$ je $NP$ **úplný**, pokud je $NP$ a každý jazyk $A \in NP$ je na $B$ polynomiálně převeditelný.

**Theorem 13.5.** *Pokud $B$ je NP-úplný a $B \in P$, pak $P = NP$.*

*Proof.* Přímý důsledek definice polynomiální převoditelnosti a $NP$. □

**Theorem 13.6.** *Pokud $B$ je NP-úplný a $B \leq_P C$ pro nějaké $C \in NP$, pak $C$ je NP-úplný.*

*Proof.* Převod problému na $B$ dále převedeme na $C$, stačí polynomiální čas. □

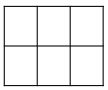
### Cook-Levin-ova věta

**Theorem 13.7** (Cook-Levin-ova věta)**.** *SAT je NP-úplný.*

- idea důkazu úplnosti: převedeme výpočet nedetrministického Turingova stroje na SAT.

- SAT is NP
  - Nedeterministický TM uhodne správné ohodnocení a v polynomiálním čase ověří, je je pro něj formule pravdivá.
- SAT je NP-úplný
  - Vezmeme libovolný $L \in NP$
  - nechť $M$ je nedeterministický TM který rozhoduje jazyk $L$ v čase $n^k - 3$ pro nějaké $k$
  - (zde pro jednoduchost NTM s jednostrannou páskou)
  - Vytvoříme tabulku (tableau) $n^k \times n^k$, každý řádek odpovídá konfiguraci $M$ na vstupu $w$
  - můžeme předpokládat (opatřit) každou konfiguraci ohraničenou zarážkami #.

| # | $q_0$ | $w_1$ | $w_2$ | $\ldots$ | $w_n$ | _ | _ | $\ldots$ | # |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | | | | | | | | | # |
| # | $\vdots$ | | | | | | | | # |
| # | $\vdots$ | | | | | | | | # |
| # | | | | | | | | | # |

  - Výpočet budeme skládat po okýnkách $2 \times 3$. 

Proof:

- Vybraná dovolená okénka, $(a, b, c, d \in \Gamma)$

$\delta(q_1, b) \ni (q_2, c, L)$

| | | |
|---|---|---|
| a | $q_1$ | b |
| $q_2$ | a | c |

$\delta(q_1, b) \ni (q_2, c, R)$

| | | |
|---|---|---|
| a | $q_1$ | b |
| a | c | $q_2$ |

$\delta(q_1, b) \ni (q_2, c, R)$

| | | |
|---|---|---|
| d | a | $q_1$ |
| d | a | c |

přenos beze změny

| | | |
|---|---|---|
| # | a | b |
| # | a | b |

$\delta(\_, \_) \ni (q_2, \_, L)$

| | | |
|---|---|---|
| a | b | c |
| a | b | $q_2$ |

$\delta(\_, \_) \ni (\_, c, L)$

| | | |
|---|---|---|
| a | b | d |
| c | b | d |

  - Přenos beze změny všude, kde není v okolí stav (hlava)
  - přenos beze změny pokud stav je přijímající
  - na každém řádku nejvýše jeden stav
  - okénko musí být částí povoleného přechodu
  - rozbor technický, udělali za nás jiní.
  - **Tvrzení:** Pokud je první řádek tabulky počáteční konfigurace a každé okénko je legální, pak každý řádek odpovídá legální konfiguraci dosažitelné jedním krokem z předchozího řádku.
    * V horním řádku není stav, pak se prostřední symbol musí opsat beze změny.
    * V horním řádku stav vprostřed: okénko garantuje korektnost přepisu obou stran.

□

*Proof.*

- Z tabulky vytvoříme formuli $\phi = \phi_{cell}\ \&\ \phi_{start}\ \&\ \phi_{move}\ \&\ \phi_{accept}$.
- pro každé políčko tabulky $(i, j)$ a písmeno $a \in \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$ vytvoříme výrokovou proměnnou $x_{i,j,a}$

$$\phi_{cell} = \bigwedge_{1 \le i,j \le n^k} \left[ \left( \bigvee_{a \in \Gamma \cup Q \cup \{\#\}} x_{i,j,a} \right) \ \&\ \bigwedge_{s \ne t \in \Gamma \cup Q \cup \{\#\}} (\overline{x_{i,j,s}} \vee \overline{x_{i,j,t}}) \right] \quad \#\text{právě jedno } a$$

$$\phi_{start} = x_{1,1,\#} \& x_{1,2,q_0} \& x_{1,3,w_1} \& x_{1,4,w_2} \& \ldots \& x_{1,n+2,w_n} \& x_{1,n+3,\_} \& \ldots \& x_{1,n^k,\#}$$

$\phi_{accept} = \bigvee_{1 \le i,j \le n^k} x_{i,j,q_{accept}}$

- Celková formule $\phi_{move}$ bude konjunkce, že každé okénko s horním středem na pozici $i, j$ je legální

$$\phi_{move} = \bigwedge_{1 \le i < n^k, 1 < j < n^k} \phi_{i,j} \qquad \#\text{ okénko } (i,j) \text{ je legální}$$

- legálnost okénka $(i, j)$ zajistíme disjunkcí legálních okének

$$\phi_{i,j} = \bigvee_{(a_1,\ldots,a_6) \in LEGAL} (x_{i,j-1,a_1} \& x_{i,j,a_2} \& x_{i,j+1,a_3} \& x_{i+1,j-1,a_4} \& x_{i+1,j,a_5} \& x_{i+1,j+1,a_6})$$

□

*Proof.*
- **Tvrzení:** Převod má polynomiální složitost, konkrétně $O(n^{2k} \log n)$.
  - $\phi_{cell} \in O(n^{2k} \log n)$, procházíme dvojice buněk
  - $\phi_{start} \in O(n^2 \log n)$, procházíme první řádek
  - $\phi_{move}, \phi_{accept} \in O(n^{2k} \log n)$,
    - počet buněk $n^{2k}$, pro každou konstantní velikost formule.
- pro šťouraly $\log n$ pro zápis indexu proměnných, jehož délka závisí na $n$.

□

**$3SAT$ je $NP$-úplný.**

**Theorem 13.8.** *$3SAT$ je $NP$-úplný.*

*Proof.*
- Upravíme předchozí převod na formuli $3SAT$.
- V CNF je skoro vše, kromě disjunkce okének pohybu, která jsou konjunkcí,
  - převedeme do CNF
  - stačí polynomiální (konstantní) čas - velikost podformule závisí jen na stroji $N$, nikoli na délce vstupu
- v krátkých klauzulích zkopírujeme proměnnou
- dlouhé rozdělíme zavedením nových proměnných.

□

# 14 co-NP, Prostorová složitost

**co-NP, Tautologičnost**

**Definition 14.1** (co-NP)**.** Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ patří do třídy **co-NP** právě když jeho doplněk $\Sigma^* - L$ patří do NP.

- P je částí NP i co-NP.
- Domníváme se, že NP-úplné problémy nejsou v co-NP.
  - pokud $P = NP$, tak jsou.

**Definition 14.2** (tautologičnost)**.** Problém, zda je daná formule výrokové logiky tautologie, nazýváme **tautologičnost TAUT**.

**Theorem 14.1.** *Problém tautologičnosti TAUT je co-NP.*

- Důkaz z pozorování, že doplněk TAUT (do množiny korektních formulí VL) je snadno převoditelný na SAT a SAT je v NP.
- Doplněk SAT je otázka, jestli negace dané formule je tautologie.
- Doplněk SAT je co-NP.
- SAT rozhoduje všechny formule, tedy i jejich negace.

### NP ∩ co-NP×

*Example* 14.1 (Celočíselné dělení). Mějme dvě přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}_+$. Existuje $d$ dělitel $m$ který je $1 < d \leq n$?

*Lemma.* Problém celočíselného dělení je $NP$ i $co - NP$.

NP Dělitel je certifikátem, vydělíme a zkontrolujeme nulový zbytek v polynomiálním čase, tj. poblém je $NP$.

co-NP Za certifikát vezmeme seznam prvočíselných dělitelů (faktorů) $m$ větších než $n$. Vynásobením ověříme rovnost $m$, AKS (Agrawal–Kayal–Saxena) testem ověříme prvočíselnost dělitelů v polynomiálním čase.

### Prostorová složitost

- Podobně jako časovou složitost měříme prostor potřebný k výpočtu.

**Definition 14.3** (prostorová složitost)**.**

- Pro deterministický Turingův stroj $M$, který zastaví na každém vstupu, je **prostorová složitost** $M$ funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet buněk pásky, které $M$ přečte při jakémkoli vstupu délky $n$.
- Pro nedeterministický Turingův stroj $M$, který všechy větve výpočtu zastaví na každém vstupu, je **prostorová složitost** $M$ je funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n)$ je maximální počet buněk pásky, které $M$ přečte při jakémkoli vstupu délky $n$ na libovolné větvi výpočtu.
- Pro logaritmickou složitost musíme modifikovat výpočetní model:
- vstupní páska je pouze na čtení
- pracovní páska na psaní i čtení, na ní měříme prostorovou složitost.

### Třídy prostorové složitosti

**Definition 14.4** (třídy prostorové složitosti)**.** Mějme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Definujeme **třídy prostorové složitosti** $SPACE(f(n))$ a $NSPACE(f(n))$:

- $SPACE(f(n)) = \{L \mid L$ je jazyk rozhodnutelný v prostoru $O(f(n))$ deterministickým TM$\}$,
- $NSPACE(f(n)) = \{L \mid L$ je jazyk rozhodnutelný v prostoru $O(f(n))$ nedeterministickým TM$\}$.

### Přijímá NFA vše?

*Example* 14.2 (Přijímá NFA vše?). Mějme nedeterministický konečný automat $NFA$. Přijímá všechny řetězce?

$$ALL_{NFA} = \{\langle A \rangle \mid A \text{ je } NFA \text{ a } L(A) = \Sigma^*\}.$$

- Označme $q$ počet stavů $M$. Pokud $M$ nepřijímá nějaký řetězec, musí nepřijímat i nějaký délky nanejvýš $2^q$
  - Po přečtení písmene si pamatujeme, v jakých stavech se $M$ může nacházet.
  - pokud se nachází ve stejné podmnožině stavů, v jaké už byl, můžeme 'smyčku' mezi těmito stavy vynechat.
  - počet možných podmnožin stavů $M$ je $2^q$.
  - Potřebujeme prostor pro pamatování *ano*/*ne* každého uzlu, jestli je dosažitelný aktuálním slovem, a čítač cyklu do $2^q$ - stačí lineární prostor.
    - protože čísla zapisujeme v binárním tvaru
  - nedeterministicky ověříme každý řetězec do $2^q$ délky; pokud při nějakém není *ano* pro žádný z přijímajících stavů, máme svědka $L(A) \neq \Sigma^*$.

### Savitch-ova věta

**Theorem 14.2** (Savitch-ova věta)**.** *Pro libovolnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, pro kterou $f(n) \geq n$ platí:*

$$NSPACE(f(n)) \subseteq SPACE(f^2(n)).$$

- Kdybychom simulovali NTM přímo:
  - musíme si pamatovat aktuální větev výpočtu
  - větev s $f(n)$ prostorem může běžet $2^{O(f(n))}$ kroků, v každém z nich může mít nedeterministickou volbu.
  - potřebovali bychom $2^{O(f(n))}$ prostor si volby pamatovat.
  - Máme dovoleno jen $O(f^2(n)) < 2^{O(f(n))}$ (asymptoticky).

*Důkaz Savitch-ovy věta přes $CANYIELD(c_1, c_2, t)$.* V kvadratickém čase vyřešíme **problém dosažitelnosti (yieldability)**

- Pro dvě dané konfigurace NTM $c_1, c_2$ a číslo $t \in \mathbb{N}$,
- Je v NTN z konfigurace $c_1$ dosažitelná konfigurace $c_2$ v maximálně $t$ krocích a maximálně používající $f(n)$ prostor?
- Pak $c_1$ počáteční konfigurace, $c_2$ přijímající, $t$ naximální počet kroků NTM.

□

Mějme nedeterministický NTM $N$.

dosažitelnost konfigurací NTM

```
1:  procedure CANYIELD( ⟨N, c1, c2, t⟩ )
2:      if t = 1 then
3:          return c1 = c2 nebo dosažitelné N v jednom kroku?
4:      end if
5:      if t > 1 then
6:          for každou konfiguraci cm stroje N na prostoru f(n) do
7:              prvni ← CANYEALD(c1, cm, t/2)
8:              druha ← CANYEALD(cm, c2, t/2)
9:              if (prvni & druha) = TRUE then
10:                 return Accept
11:             end if
12:         end for
13:         if pokud dosud nepřijato then
14:             return Reject
15:         end if
16:     end if
17: end procedure
```

### TM $M$ simulující NTM $N$ v kvadratickém prostoru

- Mějme nedeterministický NTM $N$.
- Modifikujeme ho, aby před přijetím smazal pásku a posunul se na nejlevější políčko (při jednostranné pásce).

- Všechny přijímající stavy sloučíme do jednoho, pak stejně víc nedělá.
- Tím je přijímající konfigurace $c_{accept}$ jednoznačná.
- Najdeme $d$ maximální počet štěpení konfigurace v jednom kroku, tj. horní odhad pro počet konfigurací $2^{d \cdot f(n)}$ (kde $n = |w|$).
- Tím je $2^{d \cdot f(n)}$ i horní odhad času běhu libovolné větve $N$.

Savitch_Simulace

```
1: procedure SAVITCH_SIMULACE( ⟨w⟩ )
2:     return CANYIELD(c_start, c_accept, 2^{d·f(n)})
3: end procedure
```

*Proof.* Složitost simulace

- CANYIELD potřebuje ukládat konfigurace a $t$, tj. $O(f(n))$ prostoru.
- Počet volání CANYIELD je logaritmický vzhledem k $t = 2^{d \cdot f(n)}$
- Hloubka rekurze je $O(\log(2^{d \cdot f(n)}))$ tedy $O(f(n))$.
- Celkem $O(f(n)) \cdot O(f(n)) = O(f^2(n))$ prostoru.

- Zamlčeli jsme, že $M$ potřebuje znát $f(n)$
  - buď zkouší postupně $f(n) = 1, 2, 3, \ldots$
  - nebo přidáme do předpokladu že $N$ rozhoduje jazyk v prostoru $f(n)$.

□

### PSPACE

**Definition 14.5** (PSPACE)**.** **PSPACE** je třída jazyků rozhodnutelých v polynomiálním prostoru deterministickým Turingovým strojem, tj.

$$PSPACE = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} SPACE(n^k).$$

- **NSPACE** ani nedefinujeme,
  - protože $NPSACE = PSPACE$, protože máme Savich-ovu větu a polynom na druhou je také polynom.
- SAT is $SPACE(n)$, tj. $PSPACE$.
- $ALL_{NFA}$ je $coNSPACE(n)$
  - dle Savitchovy věty i $SPACE(n^2)$
  - protože deterministické prostorové třídy jsou uzavřené na doplněk (stroj vždy zastaví - my jen obrátíme odpověď).

**Prostorové a časové třídy**

**Theorem 14.3.**

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE = NPSPACE \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k}).$$

$P \subseteq PSPACE$ Stroj v čase $t(n)$ navštíví maximálně $t(n)$ políček, proto pro $t(n) \geq n$ stačí prostor $t(n)$.

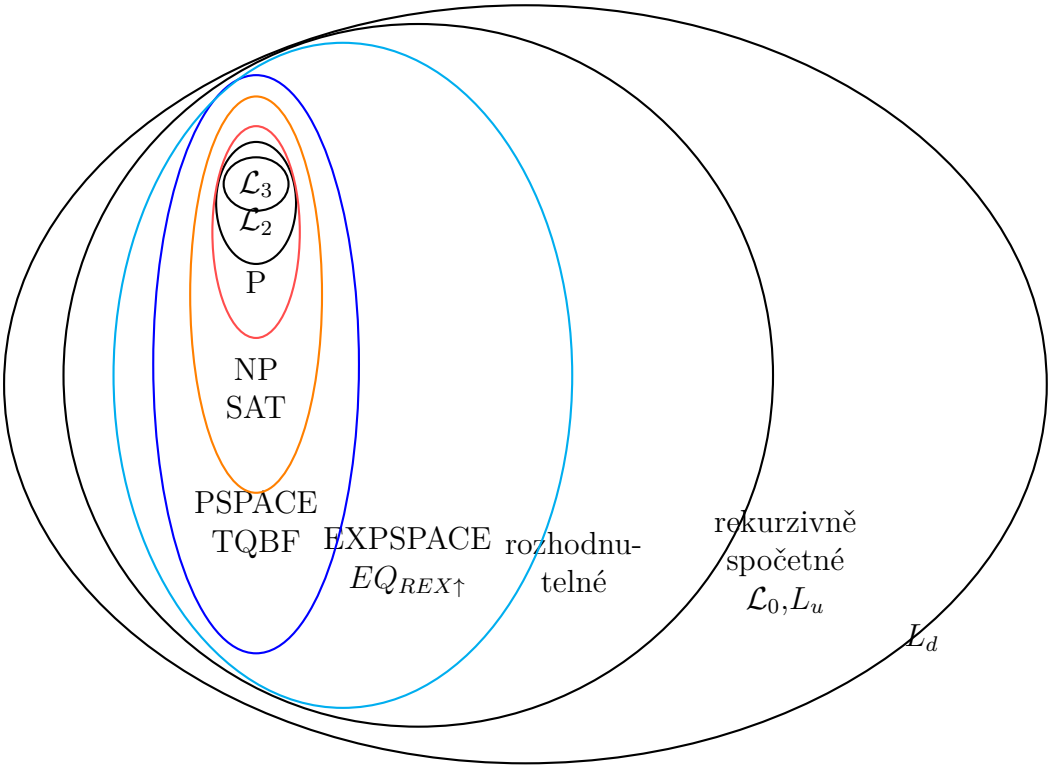
$NP \subseteq NPSPACE = PSPACE$ stejně jako výše.

$PSPACE \subseteq EXPTIME$ Pro $f(n) \geq n$ dosáhne TM $M$ pracující v prostoru $f(n)$ maximálně $f(n) \cdot 2^{O(f(n))}$ různých konfigurací,

v konečném deterministickém výpočtu se žádná konfigurace neopakuje

proto existuje TM $M_2$ simulující TM $M$ v čase $f(n) \cdot 2^{O(f(n))}$, tedy $PSPACE \subseteq EXPTIME$.

- Jediná nerovnost, co víme, je $P \neq EXPTIME$.
- Většina vědců si myslí, že všechny inkluze jsou neostré.




*$PSPACE$ – complete*
Toto už není třeba ke zkoušce.

**Definition 14.6.**

- Problém je **PSPACE-těžký**, pokud je každý $PSPACE$ problém na něj převoditelný v polynomiálním čase.
- Problém je **PSPACE-úplný**, pokud je PSACE-těžký a zároveň PSPACE.
- Jde o polynomiální časovou převoditelnost, chceme 'jednoduchou'.

*Example* 14.3.

- *$TQBF$* **true quantified boolean formulas** Mějme plně kvantifikovanou booleovskou formuli v prenexním tvaru. Rozhodnout její pravdivost je $PSPACE$-úplný problém.
- Booleovská znamená, že univerzum pro proměnné je dvohodnotové $\{TRUE, FALSE\}$.

$$TQBF = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ je pravdivá plně kvantifikovaná booleovská formule}\}$$

$TQBF \in PSPACE$

**$TQBF \in PSPACE$**

```
1: procedure TQBF( ⟨φ⟩ )
2:     if φ neobsahuje kvantifikátory then
3:         ověř dosazenou formuli vhodně accept/reject
4:     end if
5:     if první kvantifikátor je existenční φ = ∃xψ then
6:         zkus dosadit 0, pokud FALSE, dosaď, 1, pokud TRUE, přijmi
7:     end if
8:     if první kvantifikátor je univerzální φ = ∀xψ then
9:         zkus dosadit 0 i 1, pokud oba TRUE, přijmi
10:    end if
11:    return reject
12: end procedure
```

$TQBF \in PSPACE$**-těžká**

- Jazyk $A$ rozhodovaný TM $M$ v prostoru $f(n) = n^k$ redukujeme na TQBF.
- Vytváříme formule $\phi_{c_1,c_2,t}$ dosažitelnosti konfigurace v čase $t$.
- Stačí $t \leq 2^{d \cdot f(n)} = 2^{dn^k}$ pro štěpící konstantu $d$. Pro jednoduchost předpokládáme $t$ je mocnina dvojky.
- Formule pro jeden krok obdobná jako v důkazu Cook-Levin-ovy věty.
- Obecně by byla $\phi_{c_1,c_2,t} \leftarrow \exists m_1[\phi_{c_1,m_1,\frac{t}{2}} \& \phi_{m_1,c_2,\frac{t}{2}}]$ moc dlouhá.
- Formule zdvojnásobí délku, tj. prostor potřebujeme $O(t) = O(2^{df(n)}$.
- Pomůžeme si univerzálním kvantifikátorem:

$$\exists m_1 \forall (c_3, c_4) \in \{(c_1, m_1), (m_1, c_2)\}[\phi_{c_3,c_4,\frac{t}{2}}]\}$$

- Kde $\exists m_1 \forall (c_3, c_4) \in \{(c_1, m_1), (m_1, c_2)\}$ je zkratka přes kvantifikaci proměnných reprezentující konfigurace a $c_3 = c_1 \vee c_3 = m_1 \rightarrow \ldots$.
- Formule zůstává $O(f(n))$, počet vnoření je $O(\log h) = O(\log 2^{df(n)}) = O(f(n))$, potřebný prostor je tedy $O(f^2(n))$.

**Hra dvou hráčů**

$$FORMULA - GAME = \{\langle \phi \rangle \mid \text{ hráč } E \text{ má vyhrávající strategii pro } \phi\}.$$

- $FORMULA - GAME$ je $PSPACE$-úplná. Je to převlečená TQBF.
  - Existenční kvantifikátor jsou moje tahy
  - univerzální jsou tahy oponenta.

### EXPSPACE úplnost

- Uvažujme regulární výrazy.
- Přidáme funkci $\uparrow k$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}_+$ ve významu (přesně) **$k$-násobná konkatenace**. Číslo $k$ je zapsané v binárním tvaru.

  **Definition 14.7.** Problém $EQ_{REX\uparrow}$ pro dané dva regulární výrazy s možností $\uparrow$ rozhodne, zda reprezentují stejný jazyk, tj.

$$EQ_{REX\uparrow} = \{\langle Q, R\rangle \mid Q \text{ a } R \text{ jsou ekvivalentní regulární výrazy s operací } \uparrow k\}$$

**Definition 14.8.**
- Problém je **EXPSPACE-těžký**, pokud je každý $EXPSPACE$ problém na něj převoditelný v polynomiálním čase.
- Problém je **EXPSPACE-úplný**, pokud je EXPSACE-těžký a zároveň EXPSPACE.

*Lemma.* Problém $EQ_{REX\uparrow}$ je EXPSPACE-úplný.

Mějme dva NFA o $q_1$ a $q_2$ stavech.

**NTM pro dva ne-ekvivalentí NFA**

```
1: procedure NTM_≠NFA( ⟨N1, N2⟩ )
2:     Polož značky na počáteční stavy N1 a N2
3:     for opakuj 2^(q1+q2) krát do
4:         nedeterministicky vyber vstupní symbol a posuň značky dle simulace N1 a N2
5:         if Pokud je značka na přijímajícím stavu jednoho automatu a u druhého jen na nepřijímajících stavech then
6:             return Accept
7:         end if
8:     end for
9:     if dosud nenalezen rozdíl then
10:        return Reject
11:    end if
12: end procedure
```

Pokud existuje rozlišující slovo, musí existovat i dlouhé max. $2^{q_1+q_2}$, delší lze zkrátit, protože se nějaká pozice značek opakuje.

- $NTM_{\neq NFA}$ algoritmus běží nedeterministicky v lineárním prostoru.
- Dle Savitch-ovy věty lze simulovat deterministicky v $O(n^2)$ prostoru.
- Pro porovnání $EQ_{REX\uparrow}$ vezmeme tu deterministickou variantu.

$EQ_{REX\uparrow} \in EXPSPACE$

**$EQ_{REX\uparrow}$**

```
1: procedure EQ_REX↑( ⟨R1, R2⟩ regulární výrazy s ↑ )
2:     Ve výrazech R1 a R2 nahraď ↑ k rozepsáním konkatenace        ▷ O(2^(Σ k_i))
3:     Převeď B1 a B2 na NFA N1 a N2
4:     neq ←Použij deterministickou verzi NTM_≠NFA(N1, N2)
5:     return ¬neq
6: end procedure
```

- Nahrazení $\uparrow k$ může zvýšit prostor $O(2^{\Sigma k_i})$

- Převod dle důkazu Kleeneho věty je v lineárním čase i prostoru
- Deterministický $NTM_{\neq NFA}$ je v kvadratickém prostoru.
- Dohromady to dává exponenciální prostor $O((n2^n)^2) = O(n^2 2^{2n})$, tj. $EQ_{REX\uparrow} \in EXPSPACE$.

$EQ_{REX\uparrow} \in EXPSPACE$**-těžký**

- Mějme jazyk $A$ rozhodovaný TM $M$ v prostoru $2^{n^k}$ pro nějaké $k$.
- Převedeme ho na dva ↑regulární výrazy $R_1$, $R_2$.
- $R_1 \leftarrow \Delta^*$, kde $\Delta = \Gamma \cup Q \cup \{\#\}$.
- $R_2$ bude reprezentovat 'nezamítající výpočty'.
  - **Zamítající výpočet** je výpočet končící ve stavu $q_{reject}$, ze kterého nejsou žádné přechody (tj. jako $q_{accept}$, ale s opačnou sémantikou), tedy
    1. začíná v počáteční konfiguraci (délky $2^{n^k}$, doplněnou $B$)
    2. vždy provede platnou instrukci
    3. skončí v $q_{reject}$.
- Pro ne-zamítající výpočet musí být porušena některá z podmínek 1.-3.
- $R_2 = R_{bad\_start} \cup R_{bad\_window} \cup R_{bad\_repect}$.
- $R_{bad\_reject} = \Delta^*_{-q_{reject}}$.
- $R_{bad\_start} = S_0 \cup S_1 \ldots \cup S_n \cup S_b \cup S_\#$,
  - $S_k = \Delta^k \Delta_{-w_k} \Delta^*$
  - $S_b = \Delta^{n+1}(\Delta \cup \{\epsilon\})^{2^{n^k}-n-2}\Delta_{-B}\Delta^*$ % Ještě že exponenty kódujeme binárně
- $R_{bad\_window} = \bigcup_{bad(abc,def)} \Delta^* abc \Delta^{2^{n^k}-2} def \Delta^*$

  $abcdef$ podobně jako u Cook-Levin-ovy věty, ale 'za sebou'.

$EXPSPACE \subseteq DECICABLE$

- Všechny $EXPSPACE$ problémy jsou rozhodnutelné
  - z definice, požadujeme, aby TM zastavil na každém vstupu v čase omezeném $2^{O(n^k)}$.
  - Vrátíme se k hranici rozhodnutelných/nerozhodnutelných problémů.
  - Problém náležení slova do RE rekurzivně spočetného jazyka není rozhodnutelný.

**Nerozhodnutelné problémy o TM**

*Example* 14.4 (Univerzální jazyk). Problém Univerzálního jazyka (zde jinak zapsaný) není rozhodnutelný

$$A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ je kód } TM \text{ který přijímá } w\}.$$

- Kdyby rozdodoval, rozhoduje i diagonální jazyk $L_d$.

*Example* 14.5 (Prázdnost jazyka TM). Problém prázdnosti jazyka daného TM není rozhodnutelný

$$E_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ je kód } TM \text{ a } L(M) \neq \emptyset\}.$$

### Nerozhodnutelné problémy o TM

*Example* 14.6. Regulárnost jazyka TM Problém regulárnosti jazyka daného TM není rozhodnutelný

$$REGULAR_{TM} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je kód } TM \text{ a } L(M) \text{ je regulární}\}.$$

*Example* 14.7. Ekvivalence TM Problém ekvivalence jazyků dvou TM není rozhodnutelný

$$EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid M_1, M_2 \text{ jsou kódy } TM \text{ a } L(M_1) = L(M_2)\}.$$

### Lineárně omezené automaty

*Example* 14.8. Přijímání $LBA$ Problém náležení slova do jazyka $LBA$ **je** rozhodnutelný.

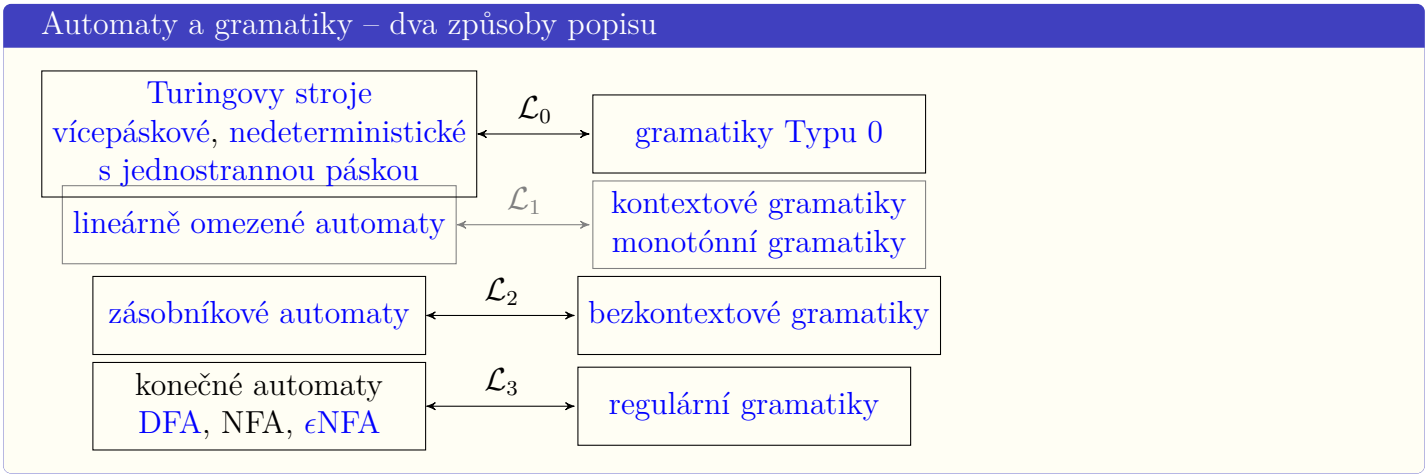
$$A_{LBA} = \{\langle M, w \rangle \mid M \text{ je kód } LBA \text{ a } w \in L(M)\}.$$

*Example* 14.9. Prázdnost jazyka LBA Problém prázdnosti jazyka daného LBA není rozhodnutelný

$$E_{LBA} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je kód } LBA \text{ a } L(M) \neq \emptyset\}.$$

# 15 Shrnutí na závěr

### Chomského Hierarchie




### Definice

- Pojmy z Figure Chomského hierarchie, jazyk rozpoznávaný automatem,jazyk generovaný gramatikou , a definice k tomu nutné.
- regulární výrazy, vztah k regulárním jazykům
- řetězcové operace, substituce, homomorfismus, inverzní homomorfizmus
- bezkontextové gramatiky (CFG, CFL): derivační strom, jednoznačnost/víceznačnost gramatiky a CFL jazyka, Chomského normální tvar gramatiky
- zásobníkové automaty PDA,L(P), N(P), deterministické zásobníkové automaty, bezprefixové jazyky

2024 ne Dvousměrné konečné automaty, Dyckovy jazyky,

- Turingův stroj, rekurzivní a rekurzivně spočetné jazyky, Diagonální jazyk $L_d = \{w;$ TM s kódem w nepřiji
  Univerzální jazyk (Univerzální Turingův stroj)
- SAT, 3SAT (2024 ne PCPa nerozhodnutelné problémy pro CFG).
- Třídy časové složitosti (TIME,NTIME,) $P$,verifikátor, $NP$,

  $co - NP$, $NP$-úplnost jazyka, třídy prostorové složitosti $PSPACE$
- Redukce a polynomiální redukce rozhodovacích problémů.

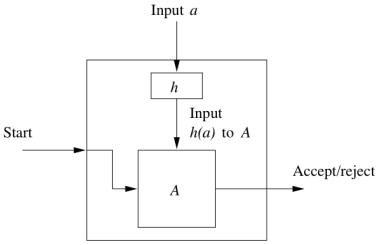
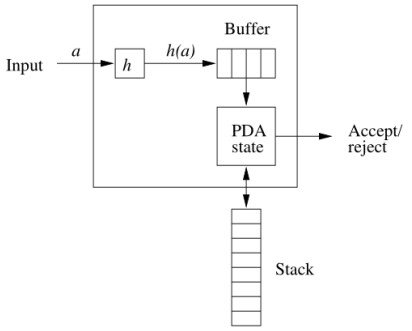
## Věty

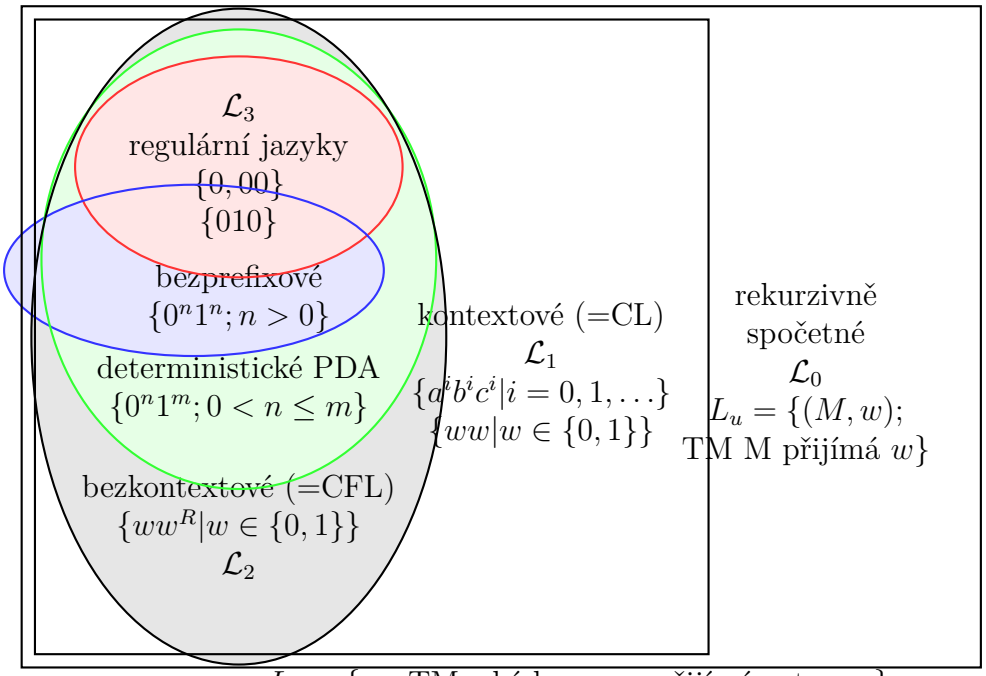
- Mihyll–Nerodova věta, Pumping lemma pro regulární jazyky, Pumping lemma pro bezkontextové jazyky, Kleeneho věta (algebraická definice regulárních jazyků),
- vztahy pojmů ve Figure Chomského hierarchie, i v rámci rámečku, i různých rámečků,
- nedeterminismus: nutný u zásobníkových automatů a lineárně omezených automatů, u konečných automatů a TM ne,
- Cook-Levin-ova věta (3SAT je NP-úplný), Postova věta
- uzávěrové vlastnosti – důkaz ANO, protipříklad NE k Tabulce níže, uzávěrové vlastnosti regulárních a CFL jazyků na řetězcové operace.

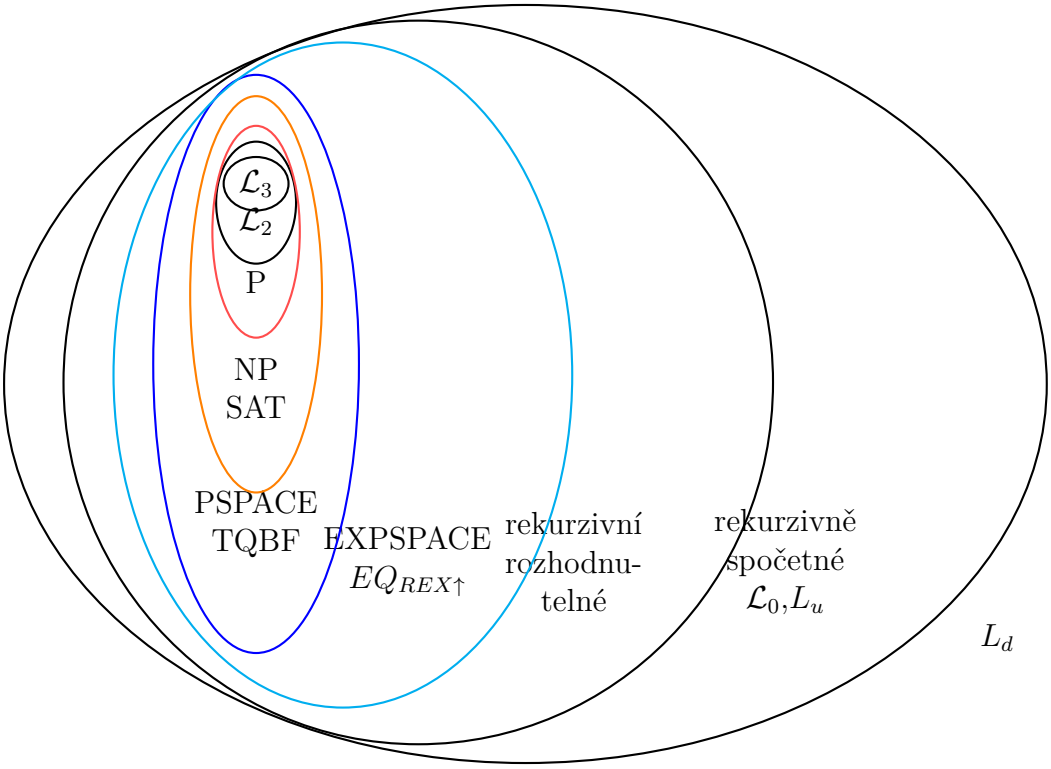
## Algoritmy

- Nedosažitelné a dosažitelné stavy konečného automatu (FA),
- Rozlišitelné a ekvivalentní stavy FA, Ekvivalence FA,
- Nalezení reduktu DFA,
- Podmnožinová konstrukce DFA z NFA
- Redukce bezkontextové gramatiky Převod CFG na gramatiku v Chomského normální formě, CYK (slovo v CFL).
- Převod CFG na zásobníkový automat.

# Uzávěrové vlastnosti v kostce

| jazyk | regulární (RL) | bezkontextové | deterministické CFL |
|---|---|---|---|
| sjednocení | $F_1 \times Q_2 \cup Q_1 \times F_2$ | $S \to S_1 \vert S_2$ | $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ |
| průnik | $F = F_1 \times F_2$ | $L = \{0^n 1^n 2^n \vert n \geq 1\}$ = $\{0^n 1^n 2^i \vert n, i \geq 1\}$ $\cap$ $\{0^i 1^n 2^n \vert n, i \geq 1\}$ | |
| $\cap$ s RL | $F = F_1 \times F_2$ | $F = F_1 \times F_2$ | $F = F_1 \times F_2$ |
| doplněk | $F = Q_1 - F_1$ | $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ | $F = Q_1 - F_1$, $Z_0$, cykly |
| homomorfismus | Kleene + elem. jazyky + uz. | $a$ nahraď $S_a$ | $h(0) = h(1) = 0$ cca. $\cup$ |
| inverzní hom. |  |  | |


$\mathcal{L}_3$
regulární jazyky
$\{0, 00\}$
$\{010\}$
bezprefixové
$\{0^n1^n; n > 0\}$
deterministické PDA
$\{0^n1^m; 0 < n \leq m\}$
bezkontextové (=CFL)
$\{ww^R|w \in \{0,1\}\}$
$\mathcal{L}_2$
kontextové (=CL)
$\mathcal{L}_1$
$\{a^ib^ic^i|i = 0, 1, \ldots\}$
$\{ww|w \in \{0,1\}\}$
rekurzivně
spočetné
$\mathcal{L}_0$
$L_u = \{(M, w);$
TM M přijímá $w\}$
$L_d = \{w;$ TM s kódem w nepřijímá vstup $w\}$


$\mathcal{L}_3$
$\mathcal{L}_2$
P
NP
SAT
PSPACE
TQBF
EXPSPACE
$EQ_{REX\uparrow}$
rekurzivní
rozhodnu-
telné
rekurzivně
spočetné
$\mathcal{L}_0$,$L_u$
$L_d$