Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

ALGEBRA A TEORETICKÁ ARITMETIKA

Sbírka příkladů
2. část – Polynomická algebra

doc. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.,
doc. RNDr. Milan Trch, CSc.

Praha 2000

Obsah

0. Úvod

O polynomech máme dosti dobrou představu jako o reálných funkcích jedné reálné proměnné. Polynomická funkce v oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ je dána pro dané $n \in \mathrm{N}$ a koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbf{R})\ f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Víme, že polynomické funkce lze spolu sčítat i násobit a výsledkem je opět polynomická funkce v oboru $\mathbf{R}$. Vlastnosti polynomických funkcí v oboru $\mathbf{R}$ jsou důsledkem známých vlastností sčítání a násobení reálných čísel. Obdobné vlastnosti jako obor $\mathbf{R}$ však mají i daleko obecnější matematické struktury – obory integrity a tělesa. To je důvod, proč v algebře studujeme polynomy z obecného hlediska. Obecně platné vlastnosti pak samozřejmě platí i pro reálné polynomické funkce.

Dříve než přejdeme ke studiu vlastností polynomů nad obory integrity, zastavíme se ještě krátce u rovnosti polynomických funkcí jedné reálné proměnné. Je třeba si uvědomit, že existují dva různé přístupy:

- Dvě polynomické funkce f, g jedné reálné proměnné jsou si rovny, právě když v každém bodě svého definičního oboru nabývají téže hodnoty, tj.

$$(\forall x \in \mathbf{R})\ f(x) = g(x).$$

- Při řadě praktických výpočtů však neověřujeme (a ani nemůžeme) rovnost v nekonečně mnoha bodech definičního oboru. Místo toho vycházíme z faktu, že dvě polynomické funkce

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,\quad g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k$$

  jsou si rovny, právě když platí

$$n = k, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n,$$

  tj. mají stejný předpis.

Tyto základní přístupy k pojetí rovnosti dvou polynomů vedou k tomu, že polynomy můžeme chápat jednak z hlediska práce s koeficienty (algebraická definice polynomu), jednak jako funkce v obecném oboru integrity dané příslušným předpisem.

V úvodu ještě připomeňme definice oboru integrity a tělesa, které jsou základem zobecnění.

0.1. Definice. (Komutativním) *oborem integrity* $(I, +, \cdot)$ rozumíme alespoň dvouprvkovou množinu I s operacemi $+$ a $\cdot$ takovou, že platí

(1) $(I, +)$ je komutativní grupa s nulovým prvkem 0.

(2) $(I, \cdot)$ je komutativní pologrupa s jednotkovým prvkem $1 \neq 0$.

(3) $(\forall a, b, c \in I)\ a(b + c) = ab + ac$.

(4) $(\forall a, b \in I)\ (a \neq 0 \neq b) \Rightarrow ab \neq 0$.

Poznámka. Pokud nemůže dojít k nedorozumění, vynecháváme znak $\cdot$ v zápisu operace.

Příkladem oboru integrity je např. obor celých čísel $\mathbf{Z}$, racionálních čísel $\mathbf{Q}$, reálných čísel $\mathbf{R}$ nebo komplexních čísel $\mathbf{C}$. Obor přirozených čísel $\mathbf{N}$ však obor integrity netvoří.

Poznámka. Pokud struktura $(\mathcal{O}, +, \cdot)$ splňuje pouze vlastnosti (1), (2), (3) z def. 0.1, hovoříme o *komutativním okruhu*.

0.2. Definice. *Tělesem* $(T, +, \cdot)$ rozumíme alespoň dvouprvkovou množinu T s prvky $0 \neq 1$ a operacemi $+$ a $\cdot$ takovou, že platí

(1) $(T, +)$ je komutativní grupa s neutrálním prvkem 0.

(2) $(T - \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa s neutrálním prvkem 1.

(3) $(\forall a, b, c \in T)\ a(b + c) = ab + ac$.

Tělesem není obor přirozených čísel ani obor celých čísel. Těleso ale tvoří např. čísla racionální, reálná či komplexní.

Z definice tělesa však plyne následující vlastnost:

0.3. Věta. *Každé těleso $(T, +, \cdot)$ je oborem integrity.*

Je dobré si však uvědomit, že vedle oborů integrity a těles, která mají nekonečně mnoho prvků, existují i tělesa konečná. Bez ověřování vlastností tělesa uvedeme aspoň některá z nich. Množiny jsou dány výčtem, operace tabulkou.

- Dvouprvkové těleso $\mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$, kde

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

- Tříprvkové těleso $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, kde

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Někdy používáme též zápis $\mathbf{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$, kde

$+$	-1	0	1
-1	1	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	-1

$\cdot$	-1	0	1
-1	1	0	-1
0	0	0	0
1	-1	0	1

- Čtyřprvkové těleso $\mathbf{T}_4 = \{0, 1, p, p^2\}$, kde

$+$	0	1	p	p^2
0	0	1	p	p^2
1	1	0	p^2	p
p	p	p^2	0	1
p^2	p^2	p	1	0

$\cdot$	0	1	p	p^2
0	0	0	0	0
1	0	1	p	p^2
p	0	p	p^2	1
p^2	0	p^2	1	p

- Pětiprvkové těleso $\mathbf{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, kde

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Někdy používáme též zápis $\mathbf{Z}_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, kde

$+$	-2	-1	0	1	2
-2	1	2	-2	-1	0
-1	2	-2	-1	0	1
0	-2	-1	0	1	2
1	-1	0	1	2	-2
2	0	1	2	-2	-1

$\cdot$	-2	-1	0	1	2
-2	-1	2	0	-2	1
-1	2	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0	0
1	-2	-1	0	1	2
2	1	-2	0	2	-1

0.4. <u>Poznámka.</u> V obecné algebře se ukazuje, že každý konečný obor integrity je už tělesem. V libovolném oboru integrity součet ani součin nezávisí na pořadí ani na uzávorkování prvků, ve výrazech lze libovolně vytýkat či naopak roznásobovat závorky. Důsledkem toho je, že polynom lze zapsat tak, že se každá mocnina proměnné v zápisu polynomu vyskytuje právě jednou.

0.5. Definice. *Charakteristikou oboru integrity* I s jednotkovým prvkem 1 rozumíme nejmenší přirozené číslo p (pokud existuje) takové, že platí $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p-\text{krát}} = 0$. Pokud takové číslo neexistuje, říkáme, že obor integrity je *charakteristiky* 0.

0.6. Poznámka. Každé konečné těleso má konečnou a dokonce prvočíselnou charakteristiku. Tělesa **Q**, **R**, **C** mají charakteristiku 0.

1. Algebraická a funkční definice polynomu, základní vlastnosti

1,1. ZÁKLADNÍ POJMY

1,1.1. Definice. (Funkční definice polynomu jedné proměnné nad I.) Nechť $(I,+,\cdot)$ je obor integrity. *Polynomickou funkcí jedné proměnné* nad oborem integrity I rozumíme každou funkci f danou předpisem

$$(\forall t \in I)\ f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n,$$

kde $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in I$. Množinu všech takových polynomických funkcí jedné proměnné nad I budeme značit $I\langle t \rangle$.

1,1.2. Definice. Pro libovolné dvě polynomické funkce $f, g \in I\langle t \rangle$ definujeme *součet* $f+g$ a *součin* fg:

$$(\forall t \in I)\ (f+g)(t) = f(t) + g(t),$$

$$(\forall t \in I)\ (fg)(t) = f(t)g(t).$$

1,1.3. Poznámka. Součet i součin dvou polynomických funkcí $f, g \in I\langle t \rangle$ je opět polynomická funkce (tedy $f + g \in I\langle t \rangle, fg \in I\langle t \rangle$). Polynomická funkce tedy může být dána přímo svým předpisem nebo výrazem s konečným počtem součtů a součinů polynomických funkcí. Konečně samotný předpis $f(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \ldots + a_n t^n$ je možné chápat jako součet součinů konstant a_i s mocninami proměnné t^i.

1,1.4. Definice. Řekneme, že polynomická funkce $f \in I\langle t \rangle$ je zapsána *v normálním tvaru*, jestliže v jejím předpisu je každá mocnina t^i obsažena nejvýše jednou. Je-li aspoň jeden z koeficientů u některé mocniny nenulový, pak exponent u nejvyšší z nich nazýváme *stupněm polynomické funkce* f.

1,1.5. Poznámka. Nad konečným oborem integrity $I = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ je pro libovolné $m_1, m_2, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} - \{0\}$ každý polynom

$$n(t) = (t - b_1)^{m_1}(t - b_2)^{m_2} \ldots (t - b_k)^{m_k},$$

neutrálním prvkem v grupě $(I\langle t \rangle, +)$. V duchu rovnosti funkcí pak platí:

$$(\forall t \in I)\ f(t) = f(t) + n(t).$$

Proto nad konečným oborem integrity má každá polynomická funkce f nekonečně mnoho různých vyjádření.

1,1.6. Věta. *Množina $I\langle t\rangle$ polynomických funkcí tvoří vzhledem ke sčítání a násobení polynomických funkcí okruh.*

1,1.7. Definice. (Algebraická definice polynomu jedné neurčité nad I.) *Polynomem f jedné neurčité* nad oborem integrity I rozumíme každou nekonečnou posloupnost

$$f = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$$

prvků z I, ve které je nejvýše konečný počet prvků $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ různých od nulového prvku 0 oboru integrity I. Množinu všech takových polynomů jedné neurčité značíme $I[x]$ (nebo též P_I). Přitom dva polynomy $f = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$, $g = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ jsou si rovny, právě když $a_i = b_i$ pro všechna $i \in \mathrm{N}$.

1,1.8. Definice. Polynom $o = \{0, 0, \dots, 0, \dots\}$ nazýváme *nulovým polynomem.* Polynom $i = \{1, 0, \dots, 0, \dots\}$ nazýváme *jednotkovým polynomem. Stupněm nenulového polynomu* $f = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ rozumíme nezáporné celé číslo n takové, že $a_n \neq 0$ a přitom pro všechna $k > n$ platí $a_k = 0$. Stupeň nenulového polynomu f značíme $\mathrm{st}(f)$.

1,1.9. Poznámka. Nulový polynom nemá stupeň. Jednotkový polynom má stupeň nula.

1,1.10. Definice. Jsou-li $f = \{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}, g = \{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ dva polynomy jedné neurčité nad týmž oborem integrity I, pak *součtem* polynomů f, g (v tomto pořadí) rozumíme polynom

$$f + g = \{c_0, c_1, \dots, c_n, \dots\}, \text{ kde } (\forall i \in \mathrm{N})\ c_i = a_i + b_i.$$

Podobně *součinem* polynomů f, g (v tomto pořadí) rozumíme polynom

$$fg = \{s_0, s_1, \dots, s_n, \dots\},$$
$$\text{kde } (\forall i \in \mathrm{N})\ s_j = a_j b_0 + a_{j-1} b_1 + \dots + a_1 b_{j-1} + a_0 b_j.$$

1,1.11. Věta. *Množina $I[x]$ spolu s operacemi sčítání a násobení definovanými v 1,1.10 tvoří (komutativní) obor integrity s nulovým prvkem o a jednotkovým prvkem i.*

1,1.12. Poznámka. $(I[x], +, \cdot)$ netvoří těleso, neboť k posloupnosti $\{0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$ neexistuje inverzní prvek (vzhledem k násobení).

1,1.13. Poznámka. Označíme-li $x = \{0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}$, plyne z definice násobení

$$x^2 = xx = \{0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots\},$$
$$x^3 = x^2 x = \{0, 0, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots\}, \ \dots .$$

Dodefinujeme-li $x^0 = \{1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ a násobení posloupnosti $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ konstantou $c \in I$ předpisem

$$c\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\} = \{ca_0, ca_1, \ldots, ca_n, \ldots\},$$

potom lze každý nenulový polynom stupně n jednoznačně zapsat ve tvaru

$$\{a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots\} = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n. \tag{1}$$

V tomto zápisu však x označuje jistou posloupnost. Není to tedy symbol pro proměnnou, za kterou bychom dosazovali prvky z I.

1,1.14. Definice. Posloupnost x zavedenou v odst. 1,1.13 nazýváme *neurčitou nad oborem integrity I*.

1,1.15. Věta. *Nechť f, g jsou dva nenulové polynomy. Potom platí*

(1) $\mathrm{st}(fg) = \mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(g)$.

(2) *Je-li $f + g$ nenulový polynom, potom*

$$\mathrm{st}(f + g) \leq \max\,\{\mathrm{st}(f), \mathrm{st}(g)\}.$$

(3) *Jestliže* $\mathrm{st}(fg) = 0$, *potom* $\mathrm{st}(f) = \mathrm{st}(g) = 0$.

(4) *Jestliže* $\mathrm{st}(fg) = 1$, *potom jeden polynom je stupně* 1 *a druhý stupně* 0.

1,1.16. Věta. *Označíme-li P_0 množinu všech polynomů stupně 0 nad oborem integrity I, potom existuje vzájemně jednoznačné zobrazení φ oboru integrity I na množinu $\{0\} \cup P_0$ dané předpisem*

$$(\forall a \in I)\ \varphi(a) = \{a, 0, \ldots, 0, \ldots\}.$$

1,1.17. Poznámka. Ztotožníme-li ve smyslu odst. 1,1.16 prvky z I s odpovídajícími polynomy množiny $\{0\} \cup P_0$, můžeme pokládat obor integrity I za podobor oboru integrity $(I[x], +, \cdot)$ polynomů jedné neurčité nad I. Přitom každý polynom je dán jednoznačně svým zápisem ve tvaru (1)

$$f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n,$$

kde $n \in \mathrm{N}$ a x je neurčitá nad I.

1,1.18. Věta. *Je-li I konečný obor integrity, potom $(I\langle t\rangle, +, \cdot)$ tvoří pouze okruh, který je konečný a má netriviální dělitele nuly. Navíc každá z těchto polynomických funkcí má dokonce nekonečně mnoho různých zápisů v normálním tvaru.*

Přitom $(I[x], +, \cdot)$ tvoří obor integrity polynomů jedné neurčité, který má nekonečně mnoho prvků.

1,1.19. Věta. *Je-li I nekonečný obor integrity, potom $(I\langle t\rangle, +, \cdot)$ tvoří obor integrity, který je izomorfní s oborem integrity $(I[x], +, \cdot)$.*

1,1.20. Poznámka. Důkaz věty 1,1.19 se opírá o větu o dělení se zbytkem a její důsledky.

1,1.21. Důsledek. V případě, že obor integrity I má nekonečně mnoho prvků, můžeme používat oba přístupy k polynomům a zaměňovat je.

1,1.22. Úmluva. Vzhledem k tomu, že cílem našeho studia jsou především vlastnosti a chování polynomů nad číselnými obory, omezíme se v dalším textu zejména na ty obory integrity, které jsou zároveň komutativními tělesy charakteristiky 0.

1,1.23. Věta. *Nechť T je těleso, $n \in \mathrm{N}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ jsou prvky z tělesa T. Nechť $k \in \mathrm{N}, 1 \leq k \leq n$. Potom polynomická funkce $\mathcal{L}_k$ daná předpisem*

$$\mathcal{L}_k(x) = \frac{(x-a_1)\ldots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\ldots(x-a_n)}{(a_k-a_1)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}$$

je stupně $n-1$ a platí

$$\mathcal{L}_k(a_1) = 0, \ldots, \mathcal{L}_k(a_{k-1}) = 0, \mathcal{L}_k(a_k) = 1, \mathcal{L}_k(a_{k+1}) = 0, \ldots, \mathcal{L}_k(a_n) = 0.$$

Polynomická funkce $\mathcal{L}$ daná předpisem

$$\mathcal{L}(x) = b_1\mathcal{L}_1(x) + b_2\mathcal{L}_2(x) + \ldots + b_n\mathcal{L}_n(x),$$

pokud má stupeň, je stupně nejvýše $n-1$ a přitom platí

$$\mathcal{L}(a_1) = b_1, \mathcal{L}(a_2) = b_2, \ldots, \mathcal{L}(a_n) = b_n.$$

1,1.24. Definice. Funkce $\mathcal{L}$ z věty 1,1.23 se nazývá *Lagrangeův interpolační polynom.*

1,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1,2.1. Zapišme v normálním tvaru polynom $f \in \mathbf{R}[x]$ a určeme jeho stupeň (pokud existuje), jestliže:

a) $f(x) = (x-2)(x^2+4) - (4x - 8 + x^3) + 2x^2$;
b) $f(x) = (x-2)^3(x+2) - (x+2)^3(x-2)$.

Řešení. a) Postupujeme tak, že nejprve roznásobíme závorky, potom seskupíme členy podle mocnin x a vytkneme ze sčítanců, které obsahují stejnou mocninu x:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x^2+4) - (4x - 8 + x^3) + 2x^2 = \\ &= (x^3 - 2x^2 + 4x - 8) - 4x + 8 - x^3 + 2x^2 = \\ &= (x^3 - x^3) + (-2x^2 + 2x^2) + (4x - 4x) + (-8 + 8) = 0. \end{aligned}$$

Polynom f je nulový polynom, a proto nemá stupeň.

b) Použijeme jinou úpravu než v a). Z obou sčítanců můžeme vytknout součin $(x-2)(x+2)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^3(x+2) - (x+2)^3(x-2) = \\ &= (x-2)(x+2)[(x-2)^2 - (x+2)^2]. \end{aligned}$$

Výraz v lomené závorce upravíme jako v a), rovněž vytknuté polynomy lze roznásobit:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4)[x^2 - 4x + 4 - (x^2 + 4x + 4)] = \\ &= (x^2-4)(-8x) = -8x^3 + 32x. \end{aligned}$$

Polynom f má zápis v normálním tvaru $-8x^3 + 32x$ a $\mathrm{st}(f) = 3$.

1,2.2. Nad konečným oborem integrity $Z_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, ve kterém jsou operace dány tabulkami na str. 5, nalezněme součet $f + g$, součin fg a rozdíl $fg - (f+g)$ polynomů $f, g \in Z_5[x]$, jestliže $f(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 1$, $g(x) = 2x^3 - x + 1$.

Řešení.

Součet nad Z_5:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= (2x^3 + x^2 - 2x + 1) + (2x^3 - x + 1) = \\ &= (2+2)x^3 + x^2 + (-2-1)x + (1+1) = \\ &= -x^3 + x^2 + 2x + 2. \end{aligned}$$

Součin nad Z_5:

$$\begin{aligned} (fg)(x) &= (2x^3 + x^2 - 2x + 1)(2x^3 - x + 1) = \\ &= (2.2)x^6 + 2.(-1)x^4 + 2.1x^3 + 1.2x^5 + 1.(-1)x^3 + \\ &+ 1.x^2 + (-2).2x^4 + (-2)(-1)x^2 + (-2).1x + 2x^3 - x + 1 = \\ &= (-1)x^6 + 2x^5 + (-2+1)x^4 + (2-1+2)x^3 + (1+2)x^2 + \\ &+ (-2-1)x + 1 = \\ &= -x^6 + 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Rozdíl $fg-(f+g)$ nad $\mathbf{Z}_5$:

$$\begin{aligned}(fg-(f+g))(x) &= -x^6+2x^5-x^4-2x^3-2x^2+2x+1-\\ &- (-x^3+x^2+2x+2)=\\ &= -x^6+2x^5-x^4-x^3+2x^2-1.\end{aligned}$$

1,2.3. Rozložme polynom

$$f(x)=x^5-2x^3+5x^2-10\in \mathbf{R}\langle x\rangle$$

v součin dvou polynomů a určeme všechna reálná čísla t, pro která $f(t)=0$.

Řešení. Pokusíme se v polynomu f vytvořit skupiny sčítanců, ze kterých lze vhodně vytýkat:

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^5-2x^3)+(5x^2-10)=x^3(x^2-2)+5(x^2-2)=\\ &= (x^3+5)(x^2-2).\end{aligned}$$

Je-li t hledaná hodnota, pro niž $f(t)=0$, platí

$$(t^3+5)(t^2-2)=0.$$

Ale $\mathbf{R}$ je obor integrity. Proto součin je roven 0, nabývá-li aspoň jeden činitel hodnoty 0. Odtud dostáváme dvě možnosti:

$$t^3+5=0 \text{ nebo } t^2-2=0.$$

Jedno řešení je proto $t_1=-\sqrt[3]{5}$, další dvě řešení jsou $t_2=\sqrt{2}$, resp. $t_3=-\sqrt{2}$.

1,2.4. Rozhodněme, které zápisy polynomu z $\mathbf{Z}_3\langle x\rangle$ ($\mathbf{Z}_3=\{-1,0,1\}$, viz str. 4) představují tytéž polynomické funkce nad $\mathbf{Z}_3$:

$$\begin{array}{lll} f_1=x^2+x, & f_2=x^3+x^2, & f_3=x^4-x-1,\\ f_4=1, & f_5=x^4-x^3-x^2+x-1, & f_6=x^3-x+1.\end{array}$$

Řešení. Vzhledem k tomu, že $\mathbf{Z}_3=\{-1,0,1\}$, určíme uvedené funkce pomocí tabulky funkčních hodnot:

f_1:

x	−1	0	1
y	0	0	−1

f_2:

x	−1	0	1
y	0	0	−1

f_3:

x	−1	0	1
y	−1	−1	−1

f_4:

x	−1	0	1
y	1	1	1

f_5:

x	−1	0	1
y	−1	−1	−1

f_6:

x	−1	0	1
y	1	1	1

Proto $f_1 = f_2$, $f_3 = f_5$ a $f_4 = f_6$.

1,2.5. Je dána polynomická funkce $f \in \mathrm{C}\langle y\rangle$ výrazem

$$f(y) = (2y + \mathrm{i}\sqrt{3})^2(3y - \mathrm{i}\sqrt{2})^2 - (2y - \mathrm{i}\sqrt{3})^2(3y + \mathrm{i}\sqrt{2})^2.$$

Určeme koeficient členu, který obsahuje první mocninu $y^1 = y$ proměnné y polynomické funkce f zapsané v normálním tvaru.

Řešení. Nejprve je třeba určit normální tvar polynomu f:

$$\begin{aligned}
&(2y + \mathrm{i}\sqrt{3})^2(3y - \mathrm{i}\sqrt{2})^2 - (2y - \mathrm{i}\sqrt{3})^2(3y + \mathrm{i}\sqrt{2})^2 = \\
&= (4y^2 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}y - 3)(9y^2 - 6\mathrm{i}\sqrt{2}y - 2) - \\
&-(4y^2 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}y - 3)(9y^2 + 6\mathrm{i}\sqrt{2}y - 2) = \\
&= (36y^4 - 24\mathrm{i}\sqrt{2}y^3 - 8y^2 + 36\mathrm{i}\sqrt{3}y^3 - 24\mathrm{i}^2\sqrt{6}y^2 - \\
&-8\mathrm{i}\sqrt{3}y - 27y^2 + 18\mathrm{i}\sqrt{2}y + 6) - \\
&-(36y^4 + 24\mathrm{i}\sqrt{2}y^3 - 8y^2 - 36\mathrm{i}\sqrt{3}y^3 - 24\mathrm{i}^2\sqrt{6}y^2 + \\
&+8\mathrm{i}\sqrt{3}y - 27y^2 - 18\mathrm{i}\sqrt{2}y + 6) = \\
&= -48\mathrm{i}\sqrt{2}y^3 + 72\mathrm{i}\sqrt{3}y^3 - 16\mathrm{i}\sqrt{3}y + 36\mathrm{i}\sqrt{2}y = \\
&= y^3(-48\mathrm{i}\sqrt{2} + 72\mathrm{i}\sqrt{3}) + y(36\mathrm{i}\sqrt{2} - 16\mathrm{i}\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Koeficient u první mocniny proměnné y je komplexní číslo $36\mathrm{i}\sqrt{2} - 16\mathrm{i}\sqrt{3}$; polynom f je stupně 3.

1,2.6. Nalezněme všechna komplexní čísla t, pro která polynom

$$f(x) = x^{10} - 16x^6 + 64x^4 - 1024$$

nabývá hodnoty 0.

Řešení. Polynom lze upravit do tvaru součinu dvou polynomů

$$x^{10} - 16x^6 + 64x^4 - 1024 = x^6(x^4 - 16) + 64(x^4 - 16) = (x^6 + 64)(x^4 - 16).$$

Protože $\mathrm{C}\langle x\rangle$ stejně jako $\mathrm{C}[x]$ tvoří obor integrity, hledáme taková komplexní čísla t, pro která buď $t^6 = -64$ nebo $t^4 = 16$. Řešení binomické rovnice známe již ze střední školy:

$$\begin{aligned}
&t_1 = 2(\cos 30^0 + \mathrm{i}\sin 30^0), && t_4 = 2(\cos 210^0 + \mathrm{i}\sin 210^0), && t_7 = 2,\\
&t_2 = 2(\cos 90^0 + \mathrm{i}\sin 90^0), && t_5 = 2(\cos 270^0 + \mathrm{i}\sin 270^0), && t_8 = -2,\\
&t_3 = 2(\cos 150^0 + \mathrm{i}\sin 150^0), && t_6 = 2(\cos 330^0 + \mathrm{i}\sin 330^0), && (t_9 = t_2, t_{10} = t_5).
\end{aligned}$$

1,2.7. Určeme reálnou polynomickou funkci minimálního stupně, jejíž graf prochází body [0, 9], [1, 1], [2, 1] a [4, 25].

Řešení. Naším úkolem je vlastně určit Lagrangeův interpolační polynom, který v bodech $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4$ nabývá po řadě funkčních hodnot $b_1 = 9$, $b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 25$. Při řešení nejprve určíme jednotlivé polynomy $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)} = \\
&= \frac{(x-1)(x^2-6x+8)}{-8} = \frac{x^3-7x^2+14x-8}{-8}, \\
\mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{x^3-6x^2+8x}{3}, \\
\mathcal{L}_3(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = \frac{x^3-5x^2+4x}{-4}, \\
\mathcal{L}_4(x) &= \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{24}.
\end{aligned}$$

Pro ilustraci uvedeme např. hodnoty $\mathcal{L}_1$ v daných bodech: $\mathcal{L}_1(a_1) = 1, \mathcal{L}_1(a_2) = 0$, $\mathcal{L}_1(a_3) = 0, \mathcal{L}_1(a_4) = 0$. Analogicky se chovají i $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$. Proto hledaný polynom lze nalézt jako lineární kombinaci polynomů $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$ po řadě s koeficienty b_1, b_2, b_3, b_4 (společný jmenovatel zlomků je 24):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) &= 9\frac{x^3-7x^2+14x-8}{-8}\cdot\frac{(-3)}{(-3)} + 1\frac{x^3-6x^2+8x}{3}\cdot\frac{8}{8} + \\
&+ 1\frac{x^3-5x^2+4x}{-4}\cdot\frac{(-6)}{(-6)} + 25\frac{x^3-3x^2+2x}{24} = \\
&= x^3\frac{-27+8-6+25}{24} + x^2\frac{189-48+30-75}{24} + \\
&+ x\frac{-378+64-24+50}{24} + \frac{216}{24} = \\
&= 0.x^3 + \frac{96}{24}x^2 - \frac{288}{24}x + \frac{216}{24} = 4x^2 - 12x + 9.
\end{aligned}$$

1,3. CVIČENÍ

1,3.1. Zapište polynom f v normálním tvaru a určete jeho stupeň, jestliže:

a) $f(x) = (x-1)^4 - (x+2)^3 + (x-3)^2 - (x+4)$;

b) $f(x) = (x^3 - 2^3)(x+3)^2 - (x^3 - 3^3)(x+2)^2$;

c) $f(x) = (x^3 - 2^3)(x+2)^2 - (x^3 + 2^3)(x-2)^2$;

d) $f(x) = (2x+3)^2(3x-2)^2 - (3x+2)^2(2x-3)^2$.

1,3.2. Určete koeficient u dané mocniny proměnné y reálného polynomu f zapsaného v normálním tvaru, jestliže:

a) $f(y) = (y^3 - 2^3)(y^3 + 3^3) - (y^3 - 3^3)(y^3 + 2^3)$, koeficient u y^3;
b) $f(y) = (y - 2)^3(y^2 - 3^2) - (y + 2)^3(y^2 + 3^2)$, koeficient u y^2;
c) $f(y) = (y - 1)^3(y + 2)^2 - (y + 1)^3(y - 2)^2$, koeficient u y^3;
d) $f(y) = (y - 1)(y + 2)(y - 3)(y + 4) - (y + 1)(y - 2)(y + 3)(y - 4)$, koeficient u y^2.

1,3.3. Zapište polynom f komplexní proměnné z v normálním tvaru a určete jeho stupeň, jestliže:
a) $f(z) = (z + \mathrm{i})^3(z^3 - \mathrm{i}) - (z - \mathrm{i})^3(z^3 + \mathrm{i})$;
b) $f(z) = (z + \mathrm{i})^2(z^2 + 1) - (z - \mathrm{i})^2(z^2 - 1)$;
c) $f(z) = (z + \mathrm{i})(z - 2\mathrm{i})(z + 3\mathrm{i}) - (z - \mathrm{i})(z + 2\mathrm{i})(z - 3\mathrm{i})$;
d) $f(z) = (2z + 3\mathrm{i})^2(3z - 2\mathrm{i})^2 - (2z - 3\mathrm{i})^2(3z + 2\mathrm{i})^2$.

1,3.4. Rozložte reálný polynom f proměnné y v součin dvou polynomů a pokuste se určit všechna reálná čísla t, pro která platí $f(t) = 0$, jestliže:
a) $f(y) = 2y^5 - y^3 - 4y^2 + 2$;
b) $f(y) = 6y^7 + 2y^4 - 9y^3 - 3$;
c) $f(y) = 15y^5 - 25y^3 + 6y^2 - 10$;
a) $f(y) = 14y^7 - 4y^5 - 49y^2 + 14$.

1,3.5. Vypište všechny polynomické funkce jedné proměnné nad konečným oborem integrity $(\mathrm{Z}_2, +, \cdot)$ (viz str. 4) stupně nejvýše 3. Ke všem těmto funkcím přiřaďte tabulku funkčních hodnot a rozhodněte, které zápisy představují stejnou funkci.

1,3.6. Nalezněte součet, rozdíl a součin polynomů $f, g \in \mathrm{Z}_3\langle t\rangle$ $(\mathrm{Z}_3 = \{-1, 0, 1\}$, viz str. 5) a určete tyto funkce tabulkou hodnot, jestliže:
a) $f(t) = t^2 - t, g(t) = t^2 + t - 1$;
b) $f(t) = t^3 + t^2 - t, g(t) = t^3 - t^2 + t - 1$;
c) $f(t) = t^4 + t^2, g(t) = -t^3 + t^2 - t$;
d) $f(t) = t^3 + t^2 + t, g(t) = t^3 - t$.

1,3.7. Nalezněte reálný polynom $f \in \mathrm{R}\langle x\rangle$ stupně nejvýše 4, pro který platí:
a) $f(-1) = 6, f(0) = 5, f(1) = 4, f(2) = 9$;
b) $f(-3) = 6, f(-1) = -2, f(0) = -3, f(2) = 1$;
c) $f(-1) = 4, f(0) = 2, f(1) = 2, f(2) = 4$;
d) $f(-1) = -5, f(0) = -3, f(2) = 1, f(3) = 3$.

1,3.8. Určete polynomickou funkci $g \in \mathrm{C}\langle t\rangle$ stupně nejvýše 3 takovou, že platí:
a) $g(0) = 1 - \mathrm{i}, g(1 + \mathrm{i}) = 1 + \mathrm{i}, g(1 - \mathrm{i}) = 3 - \mathrm{i}$;
b) $g(0) = 0, g(1) = 1 + 2\mathrm{i}, g(\mathrm{i}) = -3$;
c) $g(1 + \mathrm{i}) = 4, g(-1 + 2\mathrm{i}) = 2 + \mathrm{i}, g(-2 - \mathrm{i}) = 1 - 2\mathrm{i}$;

d) $g(1-\mathrm{i}) = 1+2\mathrm{i}, g(1+\mathrm{i}) = 1+2\mathrm{i}, g(2-$ [illegible]$) = 1+2\mathrm{i}$.

1,3.9. V tělese $\mathbf{Z}_3$ z příkl. 1,3.6 určete inverzní prvky k prvkům 1 a -1 vzhledem ke sčítání a násobení. Nalezněte polynomickou funkci $f \in \mathbf{Z}_3\langle t \rangle$ takovou, že platí $f(-1) = -1, f(0) = -1, f(1) = 0$.

1,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $x^4 - 5x^3 + x^2 - 23x - 2$, 4; b) $2x^4 + 5x^3 + 19x^2 + 60x + 36$, 4; c) $8x^4 - 16x^2 - 64$, 4; d) $120x^3 - 120x$, 3.
2. a) 38; b) -16; c) 0; d) 0.
3. a) $6\mathrm{i}z^5 - 4\mathrm{i}z^3 + 6\mathrm{i}z$, 5; b) $4\mathrm{i}z^3 + 2z^2 - 2$, 3; c) $4\mathrm{i}z^2 + 12\mathrm{i}$, 2; d) $120\mathrm{i}z^3 + 120\mathrm{i}z$, 3.
4. a) $(y^3-2)(2y^2-1), \sqrt[3]{2}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $(2y^4-3)(3y^3+1), -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \pm\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$; c) $(3y^2-5)(5y^3+2), \pm\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$; d) $(2y^5-7)(7y^2-2), \sqrt[5]{\frac{7}{2}}, \pm\sqrt{\frac{2}{7}}$.
5. $f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, f_3(x) = x, f_4(x) = x+1, f_5(x) = x^2, f_6(x) = x^2+1, f_7(x) = x^2+x, f_8(x) = x^2+x+1, f_9(x) = x^3, f_{10}(x) = x^3+1, f_{11}(x) = x^3+x, f_{12}(x) = x^3+x+1, f_{13}(x) = x^3+x^2, f_{14}(x) = x^3+x^2+1, f_{15}(x) = x^3+x^2+x, f_{16}(x) = x^3+x^2+x+1$; platí $f_1 = f_7 = f_{11} = f_{13}, f_2 = f_8 = f_{12} = f_{14}, f_3 = f_5 = f_9 = f_{15}, f_4 = f_6 = f_{10} = f_{16}$.
6. Předpisy jsou uvedeny v pořadí $f+g, f-g, fg$, funkční hodnoty těchto polynomů ve stejném pořadí po řadě v bodech $-1, 0, 1$.
a) $-t^2-1, t+1, t^4+t^2+t$; $(1,-1,1), (0,1,-1), (1,0,0)$;
b) $-t^3-1, -t^2+t+1, t^6-t^4+t^3+t^2+t$; $(0,-1,1), (-1,1,1), (-1,0,0)$;
c) $t^4-t^3-t^2-t, t^4+t^3+t, -t^7+t^6+t^5+t^4-t^3$; $(-1,0,1), (-1,0,0), (0,0,1)$;
d) $-t^3+t^2, t^2-t, t^6+t^5-t^3-t^2$; $(-1,0,0), (-1,0,0), (0,0,0)$.
7. a) x^3-2x+5; b) x^2-3; c) x^2-x+2; d) $2x-3$.
8. a) $(1+\mathrm{i})t + (1-\mathrm{i})$; b) $t^2+2\mathrm{i}t$; c) $t+(3-\mathrm{i})$; d) $1+2\mathrm{i}$.
9. Inverzní prvek vzhledem k $+$, resp. $\cdot$: pro 1 prvek -1, resp. 1, pro -1 prvek 1, resp. -1; $-t^2-t-1$.

2. Funkční hodnoty polynomů, derivace polynomu a jeho Taylorův rozvoj, Hornerovo schéma a jeho užití

2,1. ZÁKLADNÍ POJMY

2,1.1. Definice. Nechť $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ je polynom z $I\langle x\rangle$, nechť I je podobor oboru integrity I' a t prvek z I'. *Funkční hodnotou* polynomu f v prvku t rozumíme prvek

$$f(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n \in I'.$$

2,1.2. Definice. Nechť $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in I\langle x\rangle$ je polynom jedné proměnné a stupně $n \geq 1$. *Derivací* polynomu f rozumíme polynom f' tvaru

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Derivací nulového polynomu a polynomu stupně 0 je vždy nulový polynom.

2,1.3. Poznámka. Přestože v algebře je derivování polynomu definováno jako mechanická operace s jeho koeficienty, má tato derivace stejný tvar jako derivace reálného polynomu známá z matematické analýzy. Proto platí i věty o derivaci součtu a součinu dvou polynomů, známé z analýzy.

2,1.4. Definice. Je-li k libovolné přirozené číslo a $f \in I\langle x\rangle$ polynom jedné proměnné, potom *k-tou derivací polynomu* f rozumíme polynom $f^{(k)}$ definovaný indukcí:

(1) $f^{(1)}(x) = f'(x)$,

(2) $(\forall k > 1)\ f^{(k)}(x) = [f^{(k-1)}(x)]'$.

2,1.5. Poznámka. Je-li $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ polynom stupně $n \geq 1$, potom

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= a_{n-1}(n-1)! + a_n(n!)x, \\ f^{(n)}(x) &= (n!)a_n, \\ f^{(n+1)}(x) &= 0. \end{aligned}$$

2,1.6. Definice. *Taylorovým rozvojem k-tého řádu* polynomu $f \in I\langle x\rangle$ v bodě $t \in I'$, kde $I \subset I'$, rozumíme polynom

$$T^{f,k}_{x=t}(x) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \dots + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

2,1.7. Definice. *Taylorovým rozvojem* polynomu f stupně n v bodě $t \in I$ rozumíme Taylorův rozvoj právě n-tého řádu polynomu f v bodě $t \in I$ a značíme $T^f_{x=t}(x)$.

2,1.8. Věta. *Je-li f polynom stupně n a $t \in I$, platí*

$$f(x) = T^f_{x=t}(x).$$

2,1.9. Výpočet funkční hodnoty polynomu. K určení tohoto prvku lze přistupovat dvěma různými způsoby.

a) Klasický výpočet funkční hodnoty polynomu dosazováním a jeho nedostatky. Vypočítáme všechny mocniny $t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$, potom všechny součiny $a_0t^0, a_1t^1, a_2t^2, \dots, a_nt^n$ a ty nakonec sečteme. Nevýhody tohoto postupu se projeví již v případě, že v dekadickém zápisu reálného čísla t je větší počet desetinných míst. Při praktickém výpočtu je zaokrouhlujeme, místo čísla t tedy používáme jiné číslo $\bar{t}$, které se od původního liší. Přesnost zaokrouhlení sice můžeme předepsat, ale to na podstatě věci mnoho nemění. Obdobná situace nastává v případě, že hodnota t je hodnota experimentálně naměřená. I v tomto případě jde o hodnotu určenou jen přibližně a meze přesnosti jsou dány měřením. Při počítání mocnin takových "neúplných" čísel může nepřesnost značně narůst a výsledná hodnota se může velmi podstatně lišit od skutečné hodnoty. Existuje však jiný způsob výpočtu, který není tak náročný a zajišťuje větší přesnost.

b) Popis výpočtu pomocí Hornerova schématu a jeho užití. Tento způsob výpočtu vychází z možnosti zapsat hodnotu $f(t)$ ve tvaru

$$a_0 + t(a_1 + t(a_2 + \dots t(a_{n-1} + ta_n) \dots)).$$

Budeme-li totiž při výpočtu respektovat závorky, budeme při postupném výpočtu vlastně stále střídat dva typy výpočtů – jednak součin prvku t a závorky, jednak součet tohoto součinu s jistým koeficientem. Tento postup se využívá ve výpočetní technice a nazývá se *Hornerovo schéma*. Výpočet lze přehledně znázornit v tabulce, která má tři řádky a n sloupců. V prvním řádku jsou postupně zapsány koeficienty polynomu f. Pro hodnoty $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0, c_n, c_{n-1}, \dots, c_0$ ve druhém a třetím řádku (viz tab. 1) platí vztahy:

(1) $b_n = 0$,

(2) $c_n = a_n + b_n$,

(3) $(\forall n > j \geq 0)\ b_j = tc_{j+1}, c_j = b_j + a_j$.

Tab. 1

f	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$x = t$	b_n	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_1	b_0
	c_n	c_{n-1}	c_{n-2}	$\dots$	c_1	c_0

2,1.10. <u>Algoritmus pro výpočet v Hornerově schématu.</u> Výpočet probíhá v těchto krocích:

- Položíme $b_n = 0$.
- Sečteme ve sloupci $a_n + b_n$ a určíme c_n.
- Získaný prvek c_{j+1} vynásobíme prvkem t a tento součin dosadíme za b_j do sousedního sloupce.
- Celý postup opakujeme tak dlouho, až určíme poslední prvek c_0.

Ze vzorců (1), (2) a (3) z odst. 2,1.9 plynou dosazením tyto vztahy:

(a) $f(t) = c_0$.

(b) $f(x) = c_0 + (x-t)(c_n x^{n-1} + \ldots c_2 x + c_1)$.

(c) Hodnota polynomu $c_n x^{n-1} + \ldots c_2 x + c_1$ v bodě t je rovna hodnotě první derivace polynomu f v bodě t.

(d) Opakovaným použitím Hornerova schématu lze polynom f vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = d_0 + d_1(x-t) + \ldots + d_n(x-t)^n.$$

2,1.11. <u>Důsledek.</u> Hornerovo schéma použité na polynom f v bodě t umožňuje určit funkční hodnotu $f(t)$ polynomu f v bodě t, ale také dělit polynom f se zbytkem lineárním polynomem $x - t$.

2,1.12. <u>Důsledek.</u> Opakované použití Hornerova schématu na polynom f v bodě t umožňuje najít Taylorův rozvoj polynomu f v bodě t a tím i hodnoty všech derivací $f^{(k)}$ v bodě t.

2,1.13. <u>Důsledek.</u> Opakované použití Hornerova schématu na polynom f v bodě t umožňuje najít souřadnice polynomu f vzhledem k uspořádané bázi $B = \{1, x-t, (x-t)^2, \ldots, (x-t)^n\}$ vektorového prostoru polynomů jedné proměnné stupně nejvýše n nad daným oborem integrity I.

2,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

2,2.1. Určeme funkční hodnotu polynomu

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 2x - 7 \in \mathbb{Z}[x]$$

v bodě $t = -2$.

Řešení. a) Dosazováním:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^5 + 2(-2)^4 - 3(-2)^3 - (-2)^2 + 2(-2) - 7 = \\ &= -32 + 32 + 24 - 4 - 4 - 7 = 9 \end{aligned}$$

b) Pomocí Hornerova schématu:

	1	2	-3	-1	2	-7
$t = -2$	0	-2	0	6	-10	16
	1	0	-3	5	-8	$\boxed{9}$

2,2.2. Určeme funkční hodnotu polynomu

$$\begin{aligned} g(y) &= 3y^5 + (6 - 4\sqrt{3})y^4 + (-2 - 8\sqrt{3})y^3 + \\ &+ (-4 + 4\sqrt{3})y^2 + (3 + 8\sqrt{3})y + 6 \in \mathbf{R}[y] \end{aligned}$$

v bodě $\sqrt{3}$.

Řešení. a) Dosazováním:

$$\begin{aligned} g(\sqrt{3}) &= 3(\sqrt{3})^5 + (6 - 4\sqrt{3})(\sqrt{3})^4 + (-2 - 8\sqrt{3})(\sqrt{3})^3 + \\ &+ (-4 + 4\sqrt{3})(\sqrt{3})^2 + (3 + 8\sqrt{3})\sqrt{3} + 6 = \\ &= 3.9.\sqrt{3} + (6 - 4\sqrt{3}).9 + (-2 - 8\sqrt{3}).3\sqrt{3} + \\ &+ (-4 + 4\sqrt{3}).3 + (3 + 8\sqrt{3})\sqrt{3} + 6 = \\ &= 27\sqrt{3} + 54 - 36\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 72 - 12 + 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 24 + 6 = \\ &= (84 - 84) + (27 - 36 - 6 + 12 + 3)\sqrt{3} = 0 + 0.\sqrt{3} = 0. \end{aligned}$$

b) Pomocí Hornerova schématu:

	3	$6 - 4\sqrt{3}$	$-2 - 8\sqrt{3}$	$-4 + 4\sqrt{3}$	$3 + 8\sqrt{3}$	6
$t = \sqrt{3}$	0	$3\sqrt{3}$	$-3 + 6\sqrt{3}$	$-6 - 5\sqrt{3}$	$-3 - 10\sqrt{3}$	-6
	3	$6 - \sqrt{3}$	$-5 - 2\sqrt{3}$	$-10 - \sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}$	$\boxed{0}$

2,2.3. Určeme funkční hodnotu polynomu

$$x^4 - (2 + i)x^2 - x + 3i \in C\langle x \rangle$$

v bodě $t = 1 + i$.

Řešení.

	1	0	$-2-\mathrm{i}$	-1	$3\mathrm{i}$
$t=1+\mathrm{i}$	0	$1+\mathrm{i}$	$2\mathrm{i}$	$-3-\mathrm{i}$	$-3-5\mathrm{i}$
	1	$1+\mathrm{i}$	$-2+\mathrm{i}$	$-4-\mathrm{i}$	$\boxed{-3-2\mathrm{i}}$

Funkční hodnota v bodě $1+\mathrm{i}$ je $-3-2\mathrm{i}$.

2,2.4. Dělme v $\mathbf{R}\langle x\rangle$ se zbytkem polynom $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ polynomem $x-2$.

Řešení. Máme nalézt polynomy p, r takové, že platí

$$f(x) = (x-2)p(x) + r(x) \text{ a } \mathrm{st}(r) = 0.$$

Toho můžeme snadno docílit pomocí Hornerova schématu pro polynom f a bod $t = 2$:

	1	-4	2	4	1
$t=2$	0	2	-4	-4	0
	1	-2	-2	0	$\boxed{1}$

Platí

$$f(x) = (x-2)(x^3 - 2x^2 - 2x) + 1.$$

Zkouška:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = \\ &= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

2,2.5. Určeme hodnotu polynomu

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 1 \in \mathbf{R}\langle x\rangle$$

a jeho derivace v bodě $t = 3$.

Řešení. Úlohu snadno vyřešíme opakovaným použitím Hornerova schématu pro polynom f v bodě $t = 3$:

	1	0	-2	1	0	-1
$t=3$	0	3	9	21	66	198
	1	3	7	22	66	$\boxed{197}$
$t=3$	0	3	18	75	291	
	1	6	25	97	$\boxed{357}$	

Platí

$$f(3) = 197, f'(3) = 357.$$

2,2.6. Nalezněme Taylorův rozvoj polynomu

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5 \in \mathrm{R}\langle x\rangle$$

a hodnoty všech jeho derivací v bodě $t = -1$.

Řešení. Použijeme pětkrát opakované Hornerovo schéma pro polynom f v bodě $t = -1$:

	1	0	-3	2	-5
$t = -1$	0	-1	1	2	-4
	1	-1	-2	4	$\boxed{-9} = f(-1)$
$t = -1$	0	-1	2	0	
	1	-2	0	$\boxed{4} = \frac{f'(-1)}{1!}$	
$t = -1$	0	-1	3		
	1	-3	$\boxed{3} = \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}$		
$t = -1$	0	-1			
	1	$\boxed{-4} = \frac{f^{(3)}(-1)}{3!}$			
$t = -1$	0				
	$\boxed{1} = \frac{f^{(4)}(-1)}{4!}$				

Odtud

$$f(x) = T^f_{t=-1}(x) = -9 + 4(x+1) + 3(x+1)^2 - 4(x+1)^3 + (x+1)^4.$$

Dále

$$f(-1) = -9, f'(-1) = 4, f^{(2)}(-1) = 3.2! = 6,$$
$$f^{(3)}(-1) = (-4).3! = -24, f^{(4)}(-1) = 1.4! = 24.$$

2,2.7. Nalezněme Taylorovy rozvoje všech řádů pro polynom

$$h(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7 \in \mathrm{Z}\langle x\rangle$$

v bodě $t = 2$.

Řešení. Všechny Taylorovy rozvoje příslušných řádů polynomu h získáme pomocí opakovaně prováděného Hornerova schématu:

	1	0	-3	5	-7
$t=2$	0	2	4	2	14
	1	2	1	7	$\boxed{7} = h(2)$ *
$t=2$	0	2	8	18	
	1	4	9	$\boxed{25} = \frac{h'(2)}{1!}$ **	
$t=2$	0	2	12		
	1	6	$\boxed{21} = \frac{h^{(2)}(2)}{2!}$ ***		
$t=2$	0	2			
	1	$\boxed{8} = \frac{h^{(3)}(2)}{3!}$ †			
$t=2$	0				
	$\boxed{1} = \frac{h^{(4)}(2)}{4!}$ ‡				

*Taylorův rozvoj prvního řádu v bodě 2 je

$$T^{h,1}_{t=2}(x) = 7 + 25(x-2).$$

**Taylorův rozvoj druhého řádu v bodě 2 je

$$T^{h,2}_{t=2}(x) = 7 + 25(x-2) + 21(x-2)^2.$$

***Taylorův rozvoj třetího řádu v bodě 2 je

$$T^{h,3}_{t=2}(x) = 7 + 25(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3.$$

† Taylorův rozvoj čtvrtého řádu v bodě 2 je

$$T^{h,4}_{t=2}(x) = 7 + 25(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

‡ Taylorovy rozvoje vyšších řádů polynomu h jsou již stejné jako $T^4_{t=2}(h)$, představují zároveň Taylorův rozvoj polynomu h v bodě 2.

2,2.8. Nalezněme polynom $g \in \mathrm{Z}\langle y\rangle$, který vznikne z polynomu

$$h(x) = x^4 - 3x^2 + 5x - 7$$

substitucí $x = y + 2$.

Řešení. Pomocí Hornerova schématu pro polynom h v bodě $t = 2$ získáme Taylorův rozvoj $T^h_{t=2}$. Potom platí (Hornerovo schéma viz příkl. 2,2.7):

$$\begin{aligned} h(x) &= h(y+2) = T^h_{t=2}(x) = \\ &= 7 + 27(x-2) + 21(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4 = \\ &= 7 + 25y + 21y^2 + 8y^3 + y^4. \end{aligned}$$

Hledaný polynom proměnné y, který vznikl substitucí $x = y + 2$ do polynomu h proměnné x, je polynom $g(y) = 7 + 25y + 21y^2 + 8y^3 + y^4$.

2,2.9. Nalezněme souřadnice polynomu

$$f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2 \in \mathbb{Z}\langle x\rangle$$

vzhledem k uspořádané bázi

$$\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\}.$$

Řešení. Pomocí opakovaného Hornerova schématu pro polynom f v bodě $t = 1$ dostaneme:

	2	-4	3	-1	1	-2
$t = 1$	0	2	-2	1	0	1
	2	-2	1	0	1	$\boxed{-1}$
$t = 1$	0	2	0	1	1	
	2	0	1	1	$\boxed{2}$	
$t = 1$	0	2	2	3		
	2	2	3	$\boxed{4}$		
$t = 1$	0	2	4			
	2	4	$\boxed{7}$			
$t = 1$	0	2				
	2	$\boxed{6}$				
$t = 1$	0					
	$\boxed{2}$					

Odtud plyne, že

$$f(x) = -1 + 2(x-1) + 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3 + 6(x-1)^4 + 2(x-1)^5.$$

Hledané souřadnice tedy jsou

$$f_{\mathcal{B}} = (-1, 2, 4, 7, 6, 2).$$

2,3. CVIČENÍ

2,3.1. Je dán polynom

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3 \in \mathbb{Z}\langle x\rangle.$$

2,3. CVIČENÍ

Určete funkční hodnotu $f(t)$, jestliže:
a) $t = -3 \in \mathbf{Z}$; b) $t = \frac{3}{2} \in \mathbf{Q}$; c) $t = 1 + \sqrt{2} \in \mathbf{R}$; d) $t = 2 - \mathrm{i} \in \mathbf{C}$.

2,3.2. Je dán polynom

$$g(x) = x^4 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{5}{6}x - 1 \in \mathbf{Q}\langle x\rangle .$$

Určete funkční hodnotu $g(t)$, jestliže:
a) $t = 2 \in \mathbf{Z}$; b) $t = -\frac{3}{2} \in \mathbf{Q}$; c) $t = -\sqrt{3} \in \mathbf{R}$; d) $t = 1 - \mathrm{i} \in \mathbf{C}$.

2,3.3. Je dán reálný polynom

$$h(y) = 3y^5 + (3 - 4\sqrt{3})y^4 + (-2 - 4\sqrt{3})y^3 + (-2 + 4\sqrt{3})y^2 + (3 + 4\sqrt{3})y + 3.$$

Určete funkční hodnotu $h(t)$, jestliže:
a) $t = -1 \in \mathbf{Z}$; b) $t = -\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$; c) $t = \sqrt{3} \in \mathbf{R}$; d) $t = \mathrm{i} \in \mathbf{C}$.

2,3.4. Je dán komplexní polynom

$$g(z) = z^4 + (-6 + \mathrm{i})z^3 + (12 - 6\mathrm{i})z^2 + (-8 + 12\mathrm{i})z - 8\mathrm{i}.$$

Určete funkční hodnotu $g(t)$, jestliže:
a) $t = 2 \in \mathbf{Z}$; b) $t = -\frac{1}{2} \in \mathbf{Q}$; c) $t = \sqrt{2} \in \mathbf{R}$; d) $t = -\mathrm{i} \in \mathbf{C}$.

2,3.5. Dělte polynom $f \in \mathbf{R}\langle x\rangle$ lineárním polynomem $x - t$ a určete zbytek, jestliže:
a) $f(x) = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1, t = 2$;
b) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 7x - 2, t = -\frac{1}{2}$;
c) $f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 28x^3 - 40x^2 + 32x - 12, t = 1 + \mathrm{i}$;
d) $f(x) = 3x^5 - 11x^4 + 2x^3 + 14x^2 + 7x + 1, t = 1 - \sqrt{2}$.

2,3.6. Určete hodnoty $f(t), f'(t)$ polynomu

$$f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 7x - 1 \in \mathbf{Z}\langle x\rangle$$

v bodě:
a) $t = -2$; b) $t = \frac{1}{2}$.

2,3.7. Určete Taylorův rozvoj polynomu

$$f(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 6x^2 + x + 2$$

v bodě:
a) $t = -2$; b) $t = \mathrm{i}$.

2,3.8. Nalezněte Taylorovy rozvoje prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu polynomu $f \in I\langle x \rangle$ v bodě t, jestliže:
a) $I = \mathrm{C}, f(x) = x^4 + (3-\mathrm{i})x^3 + (3-3\mathrm{i})x^2 + (1-3\mathrm{i})x - \mathrm{i}, t = \mathrm{i}$;
b) $I = \mathrm{Q}, f(x) = x^4 + (-6-\sqrt{2})x^3 + (12+6\sqrt{2})x^2 + (-8-12\sqrt{2})x + 8\sqrt{2}, t = \sqrt{2}$;
c) $I = \mathrm{Z}, f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 6x - 1, t = 1 - \sqrt{2}$.

2,3.9. Určete hodnoty všech derivací polynomu $f \in I\langle x \rangle$ po řadě v bodech $t = 1, t = -1, t = 0$, jestliže:
a) $I = \mathrm{Z}, f(x) = x^6 - 3x^2 + 5x + 2$;
b) $I = \mathrm{Z}, f(x) = x^5 + 2x^3 - 5x + 7$;
c) $I = \mathrm{Q}, f(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$;
d) $I = \mathrm{C}, f(x) = x^4 + (1+\mathrm{i})x^2 + (1-\mathrm{i})x$.

2,3.10. Nalezněte polynom $g \in \mathrm{Z}\langle y \rangle$, který vznikne z polynomu $h \in \mathrm{Z}\langle x \rangle$ uvedenou lineární substitucí:
a) $h(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 1, x = y - 3$;
b) $h(x) = 2x^5 - 3x^3 - 5x^2 + 7, x = y + 1$;
c) $h(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3, y = x - 2$;
d) $h(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^2 + x, y = x + 3$.

2,3.11. Nalezněte souřadnice polynomu $f \in I\langle x \rangle$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{B}$ vektorového prostoru polynomů jedné proměnné nad I stupně nejvýše n, jestliže:
a) $I = \mathrm{Z}, f(x) = 3x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 2x - 1$,
$\mathcal{B} = \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3, (x-1)^4, (x-1)^5\}$;
b) $I = \mathrm{Z}, f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$,
$\mathcal{B} = \{1, x+1, (x+1)^2, (x+1)^3, (x+1)^4\}$;
c) $I = \mathrm{Z}, f(x) = x^6 - 2x^5 - 2x^2 - x + 6$,
$\mathcal{B} = \{1, x-2, (x-2)^2, (x-2)^3, (x-2)^4, (x-2)^5, (x-2)^6\}$;
d) $I = \mathrm{C}, f(x) = x^4 + 2\mathrm{i}x^3 - (1+\mathrm{i})x^2 - 3x + 7 + \mathrm{i}$,
$\mathcal{B} = \{1, x+\mathrm{i}, (x+\mathrm{i})^2, (x+\mathrm{i})^3, (x+\mathrm{i})^4\}$.

2,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) -183; b) $\frac{3}{32}$; c) $27 + 21\sqrt{2}$; d) $-42 - 23\mathrm{i}$.
2. a) 14; b) $\frac{21}{16}$; c) $6 - \frac{5}{6}\sqrt{3}$; d) $-\frac{25}{6} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$.
3. a) 0; b) $\frac{73}{81} - \frac{40}{81}\sqrt{3}$; c) 0; d) $(8 - 8\sqrt{3}) + (8 + 8\sqrt{3})\mathrm{i}$.
4. a) 0; b) $\frac{125}{16} - \frac{125}{8}\mathrm{i}$; c) $(28 - 20\sqrt{2}) + (-20 + 14\sqrt{2})\mathrm{i}$; d) 0.
5. a) $(x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 12x + 24)(x-2) + 49$; b) $(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{77}{8})(x + \frac{1}{2}) + \frac{45}{16}$;
c) $[2x^4 + (-9+2\mathrm{i})x^3 + (17-7\mathrm{i})x^2 + (-16+10\mathrm{i})x + (6-6\mathrm{i})][x - (1+\mathrm{i})] + 0$;

d) $[3x^4+(-8-3\sqrt{2})x^3+5\sqrt{2}x^2+(4+5\sqrt{2})x+(1+\sqrt{2})][x-(1-\sqrt{2})]+0$.

6. a) $-327,\ 599$; b) $-\frac{11}{8}, -\frac{83}{8}$.

7. a)
$125(x+2)-300(x+2)^2+315(x+2)^3-184(x+2)^4+63(x+2)^5-12(x+2)^6+(x+2)^7$;
b) $(8-16i)(x-i)^3+(-24-20i)(x-i)^4+(-18+12i)(x-i)^5+(2+7i)(x-i)^6+(x-i)^7$.

8. a) $T^{f,1}_{t=i}(x)=(-2+2i)(x-i), T^{f,2}_{t=i}(x)=(-2+2i)(x-i)+6i(x-i)^2$,
$T^{f,3}_{t=i}(x)=(-2+2i)(x-i)+6i(x-i)^2+(3+3i)(x-i)^3$,
$T^{f,4}_{t=i}(x)=(-2+2i)(x-i)+6i(x-i)^2+(3+3i)(x-i)^3+(x-i)^4$;
b) $T^{f,1}_{t=\sqrt{2}}(x)=(-20+14\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$,
$T^{f,2}_{t=\sqrt{2}}(x)=(-20+14\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+(18-12\sqrt{2})(x-\sqrt{2})^2$,
$T^{f,3}_{t=\sqrt{2}}(x)=(-20+14\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+(18-12\sqrt{2})(x-\sqrt{2})^2+(-6+3\sqrt{2})(x-\sqrt{2})^3$,
$T^{f,4}_{t=\sqrt{2}}(x)=(-20+14\sqrt{2})(x-\sqrt{2})+(18-12\sqrt{2})(x-\sqrt{2})^2+(-6+3\sqrt{2})(x-\sqrt{2})^3+(x-\sqrt{2})^4$;
c) $T^{f,1}_{t=1-\sqrt{2}}(x)=0,\ T^{f,2}_{t=1-\sqrt{2}}(x)=0$,
$T^{f,3}_{t=1-\sqrt{2}}(x)=-16\sqrt{2}[x-(1-\sqrt{2})]^3$,
$T^{f,4}_{t=1-\sqrt{2}}(x)=-16\sqrt{2}[x-(1-\sqrt{2})]^3+24[x-(1-\sqrt{2})]^4$,
$T^{f,5}_{t=1-\sqrt{2}}(x)=-16\sqrt{2}[x-(1-\sqrt{2})]^3+24[x-(1-\sqrt{2})]^4-6\sqrt{2}[x-(1-\sqrt{2})]^5$,
$T^{f,6}_{t=1-\sqrt{2}}(x)=-16\sqrt{2}[x-(1-\sqrt{2})]^3+24[x-(1-\sqrt{2})]^4-6\sqrt{2}[x-(1-\sqrt{2})]^5+$
$+[x-(1-\sqrt{2})]^6$.

9. a) $f(1)=5, f'(1)=5, f^{(2)}(1)=24, f^{(3)}(1)=120, f^{(4)}(1)=360$,
$f^{(5)}(1)=720, f^{(6)}(1)=6!=720$,
$f(0)=2, f'(0)=5, f^{(2)}(0)=-6, f^{(3)}(0)=0, f^{(4)}(0)=0, f^{(5)}(0)=0, f^{(6)}(0)=6!=720$,
$f(-1)=-5, f'(-1)=5, f^{(2)}(-1)=24, f^{(3)}(-1)=-120, f^{(4)}(-1)=360$,
$f^{(5)}(-1)=-720, f^{(6)}(-1)=6!=720$;
b) $f(1)=5, f'(1)=6, f^{(2)}(1)=32, f^{(3)}(1)=72, f^{(4)}(1)=120, f^{(5)}(1)=120$,
$f(0)=7, f'(0)=-5, f^{(2)}(0)=0, f^{(3)}(0)=12, f^{(4)}(0)=0, f^{(5)}(0)=120$,
$f(-1)=9, f'(-1)=6, f^{(2)}(-1)=-32, f^{(3)}(-1)=72, f^{(4)}(-1)=-120, f^{(5)}(-1)=120$;
c) $f(1)=\frac{7}{3}, f'(1)=\frac{23}{3}, f^{(2)}(1)=15, f^{(3)}(1)=24, f^{(4)}(1)=24$,
$f(0)=-\frac{5}{6}, f'(0)=\frac{2}{3}, f^{(2)}(0)=3, f^{(3)}(0)=0, f^{(4)}(0)=24$,
$f(-1)=1, f'(-1)=\frac{8}{3}, f^{(2)}(-1)=15, f^{(3)}(-1)=-24, f^{(4)}(-1)=24$;
d) $f(1)=3, f'(1)=7+i, f^{(2)}(1)=18+2i, f^{(3)}(1)=36, f^{(4)}(1)=24$,
$f(0)=0, f'(0)=1-i, f^{(2)}(0)=2+2i, f^{(3)}(0)=0, f^{(4)}(0)=24$,
$f(-1)=1+2i, f'(-1)=-5-3i, f^{(2)}(-1)=14+2i, f^{(3)}(-1)=-24, f^{(4)}(-1)=24$.

10. a) $43-59y+36y^2-10y^3+y^4,\ y=x+3$; b)
$1-9y+6y^2+17y^3+10y^4+2y^5,\ y=x-1$; c) $13+36y+32y^2+13y^3+2y^4,\ y=x-2$;
d) $-552+826y-484y^2+138y^3-19y^4+y^5,\ y=x+3$.

11. a) $(-4,-7,4,18,13,3)$; b) $(1,4,-3,-2,1)$; c) $(-4,23,78,80,40,10,1)$;
d) $(7+5i,-5,-1-i,-2i,1)$.

3. Dělitelnost polynomů, největší společný dělitel a nejmenší společný násobek polynomů

3,1. ZÁKLADNÍ POJMY

3,1.1. Definice. Nechť f a g jsou polynomy jedné neurčité x nad tělesem T. Řekneme, že *polynom f dělí polynom g* (polynom f je *dělitelem* polynomu g, polynom g je *dělitelný* polynomem f) a píšeme $f \mid g$, jestliže existuje $h \in T[x]$ tak, že platí $g = fh$. Neplatí-li $f \mid g$, píšeme $f \nmid g$.

3,1.2. Poznámka. $o \mid g$ je možné tehdy, když $g = o$.

3,1.3. Lemma. (Vlastnosti dělitelnosti polynomů.) *Pro libovolné $f, g, h, r \in T[x]$ platí:*
a) $(f \mid g \wedge g \mid h) \Rightarrow f \mid h$.
b) $(r \mid f \wedge r \mid g) \Rightarrow (r \mid f + g, r \mid f - g)$.
c) $r \mid f \Rightarrow (\forall g \in T[x])\ r \mid fg$.
d) *Každý polynom z $T[x]$ je dělitelný libovolným polynomem stupně 0 z $T[x]$.*
e) $f \mid g \Rightarrow (\forall 0 \neq c \in T)\ cf \mid g$.
f) $(f \mid g \wedge \mathrm{st}(f) = \mathrm{st}(g)) \Rightarrow (\exists 0 \neq c \in T)\ g = cf$.
g) $(f \mid g \wedge g \neq o) \Rightarrow \mathrm{st}(f) \leq \mathrm{st}(g)$.

3,1.4. Definice. Polynomy $f, g \in T[x]$ nazýváme *asociovanými*, jestliže $f \mid g$ a $g \mid f$. Píšeme $f \sim g$.

3,1.5. Lemma. *Nechť $f, g \in T[x]$. Pak platí:*
a) $f \sim 1 \Leftrightarrow \mathrm{st}(f) = 0$.
b) $f \sim g \Leftrightarrow (\exists 0 \neq c \in T)\ f = cg$.

3,1.6. Věta. (O dělení se zbytkem.) *Nechť $f, g \in T[x], g \neq o$. Pak v $T[x]$ existují polynomy q, r takové, že $f = gq + r$, kde $r = o$ nebo $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(g)$. Polynomy q, r jsou těmito podmínkami určeny jednoznačně.*

3,1.7. Definice. Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$. Polynom $d \in T[x]$ nazveme ***největším** společným dělitelem* polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (v $T[x]$), jestliže platí:
a) $d \mid f_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.
b) Jestliže $h \in T[x]$ a $h \mid f_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$, pak $h \mid d$.
Píšeme $d = D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

3,1.8. Věta. *Nechť $d \in T[x]$ je největší společný dělitel polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$, nechť $d_1 \in T[x]$. Pak d_1 je největší společný dělitel polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k$, právě když $d \sim d_1$.*

3,1.9. Úmluva. Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$. Normovaný největší společný dělitel polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k$ budeme značit $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

3,1.10. Věta. *V oboru integrity $T[x]$ existuje $D(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ pro libovolné polynomy $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$ a je určen jednoznačně až na multiplikativní konstantu z T.*

3,1.11. Euklidův algoritmus výpočtu největšího společného dělitele. Nechť $f, g \in T[x]$. Jestliže $f \mid g$, resp. $g \mid f$, je $D(f,g) = f$, resp. $D(f,g) = g$. Nechť $f \nmid g$ a $g \nmid f$. Polynom f vydělíme polynomem g. Podle věty 3,1.6 dostaneme částečný podíl q_1 a zbytek r_1:

$$f = gq_1 + r_1, \quad \mathrm{st}(r_1) < \mathrm{st}(g).$$

Protože $g \nmid f$, platí $r_1 \neq o$. Znovu užijeme větu 3,1.6. Existují polynomy q_2, r_2 takové, že

$$g = r_1 q_2 + r_2, \quad \mathrm{st}(r_2) < \mathrm{st}(r_1).$$

Toto postupné dělení provádíme tak, že obecně v k-tém kroku dělíme

$$r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k, \quad \mathrm{st}(r_k) < \mathrm{st}(r_{k-1}).$$

Po konečném počtu m kroků dostaneme na základě věty 3,1.6

$$\begin{aligned} f &= gq_1 + r_1, \\ g &= r_1 q_2 + r_2, \\ &\vdots \\ r_{m-2} &= r_{m-1} q_{m-1} + r_m, \\ r_{m-1} &= r_m q_m, \end{aligned}$$

kde

$$\mathrm{st}(g) > \mathrm{st}(r_1) > \ldots > \mathrm{st}(r_m) \geq 0.$$

Potom platí:

$$r_m = D(f,g).$$

3,1.12. Věta. (Bezoutova rovnost.) *Nechť $f, g \in T[x]$. Potom existují polynomy $u, v \in T[x]$ tak, že platí*

$$(f,g) = fu + gv.$$

Navíc, je-li $\mathrm{st}(f) \geq 1$, můžeme polynomy u, v volit tak, že $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(g)$ a $\mathrm{st}(v) < \mathrm{st}(f)$.

3,1.13. <u>Definice.</u> Polynomy $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x], k \geq 2$, nazveme *nesoudělnými*, jestliže $(f_1, f_2, \ldots, f_k) = 1$. V opačném případě hovoříme o *soudělných polynomech*.

3,1.14. <u>Lemma.</u> *Nechť $f, g, h \in T[x]$. Potom platí:*
a) $(f \mid gh \wedge (f, g) = 1) \Rightarrow f \mid h$.
b) $(f \mid g \wedge f \mid h \wedge (f, g) = 1) \Rightarrow fg \mid h$.

3,1.15. <u>Definice.</u> Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$. Polynom $n \in T[x]$ nazveme *nejmenším společným násobkem* polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k$ (v $T[x]$), jestliže platí:
a) $f_i \mid n$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$.
b) Jestliže $h \in T[x]$ a $f_i \mid n$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, k$, pak $n \mid h$.
Píšeme $n = N(f_1, f_2, \ldots, f_k)$.

3,1.16. <u>Věta.</u> *Nechť $n \in T[x]$ je nejmenší společný násobek polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$. Pak n_1 je nejmenší společný násobek polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k$, právě když $n_1 \sim n$.*

3,1.17. <u>Úmluva.</u> Nechť $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$. Normovaný nejmenší společný násobek polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_k$ budeme značit $[f_1, f_2, \ldots, f_k]$.

3,1.18. <u>Věta.</u> *Nechť $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ jsou polynomy nad tělesem T. Potom platí:*
a) *Je-li* $\mathrm{st}(f) = n \geq 0, \mathrm{st}(g) = m \geq 0$, *pak*

$$a_n^{-1} b_m^{-1} fg = (f, g)[f, g].$$

b) $[f, g] = 0$ *v ostatních případech.*

3,1.19. <u>Věta.</u> *V oboru integrity $T[x]$ existuje $N(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ pro libovolné polynomy $f_1, f_2, \ldots, f_k \in T[x]$ a je určen jednoznačně až na multiplikativní konstantu z T.*

3,1.20. <u>Definice.</u> Nechť $f, g \in T[x]$. Polynom f nazveme *triviálním dělitelem* polynomu g v $T[x]$, jestliže $\mathrm{st}(f) = 0$ nebo $f \sim g$.

3,1.21. <u>Definice.</u> Nechť $f \in T[x]$, $\mathrm{st}(f) \geq 1$. Polynom f se nazývá *ireducibilní* (*nerozložitelný*) v $T[x]$, jestliže má f v $T[x]$ pouze triviální dělitele. V opačném případě se f nazývá *reducibilní* (*rozložitelný*) v $T[x]$.

3,1.22. <u>Poznámka.</u> Nechť U je nadtěleso tělesa T. Pak $U[x] \supset T[x]$. Polynom $f \in T[x]$ může být ireducibilní v $T[x]$, ale reducibilní v $U[x]$ (viz příkl. 3,2.7). Proto je vždy nutné uvést těleso, nad nímž daný polynom uvažujeme.

3,1.23. <u>Lemma.</u> *Nechť $f, p \in T[x]$. Nechť p je ireducibilní v $T[x]$. Potom buď $(f, p) = 1$, nebo $p \mid f$.*

3,1.24. Lemma. *Nechť $p, f_1, f_2, \ldots, f_n \in T[x]$. Nechť p je ireducibilní v $T[x]$. Potom $p \mid f_1 f_2 \ldots f_n$, právě když existuje i, $1 \leq i \leq n$, takové, že $p \mid f_i$.*

3,1.25. Věta. *Nechť $f \in T[x]$, $\mathrm{st}(f) \geq 1$. Pak existují polynomy $p_1, p_2, \ldots, p_r \in T[x]$, které jsou navzájem různé, normované a ireducibilní v $T[x]$, $0 \neq c \in T$ a přirozená čísla $k_1, k_2, \ldots, k_r$ tak, že*

$$f = c p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}.$$

Navíc platí: Jestliže $f = d q_1^{l_1} q_2^{l_2} \ldots q_s^{l_s}$ je jiný takový rozklad, pak $r = s$, $c = d$ a existuje permutace $\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & r \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_r \end{pmatrix}$ tak, že $p_j = q_{i_j}$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, r$.

3,1.26. Definice. Zápis polynomu f z věty 3,1.25 se nazývá *kanonický rozklad* polynomu f v $T[x]$.

3,1.27. Lemma. *Nechť $f = c p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ je kanonický rozklad polynomu $f \in T[x]$. Nechť $q \in T[x]$ je normovaný polynom ireducibilní v $T[x]$. Pak $q \mid f$, právě když existuje i, $1 \leq i \leq r$, tak, že $q = p_i$.*

3,1.28. Věta. *Nechť $p_1, p_2, \ldots, p_n \in T[x]$ jsou navzájem různé, normované a ireducibilní polynomy v $T[x]$. Nechť $k_1, k_2, \ldots, k_n, l_1, l_2, \ldots, l_n$ jsou nezáporná celá čísla. Nechť $o \neq f$, $f = a p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_n^{k_n}$, $o \neq g$, $g = b p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_n^{l_n}$, jsou dva polynomy z $T[x]$. Pak*

$$(f, g) = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_n^{s_n}, \quad \text{kde} \quad s_i = \min\{k_i, l_i\},$$
$$[f, g] = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}, \quad \text{kde} \quad s_i = \max\{k_i, l_i\},$$

pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

3,1.29. Poznámka. Věta 3,1.28 se dá použít k výpočtu největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku polynomů f, g, pokud známe kanonické rozklady polynomů f, g.

3,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

3,2.1. Nalezněme částečný podíl q a zbytek r při dělení polynomu f polynomem g v $\mathbf{R}[x]$, jestliže:

a) $f(x) = 2x^6 + x^5 - 15x^4 + 2x^3 + 10$, $g(x) = x^3 - 7x + 2$;

b) $f(x) = 5x^6 + 4x^5 + 3x^2 + 2x + 1$, $g(x) = 7x^4 + 2x^2 - 3x + 2$.

Řešení. a) Platí

$$
\begin{array}{l}
(2x^6 + x^5 - 15x^4 + 2x^3 \qquad\qquad + 10) : (x^3 - 7x + 2) = 2x^3 + x^2 - x + 5 \\
-(2x^6 \qquad - 14x^4 + 4x^3) \\
\hline
\quad x^5 - x^4 - 2x^3 \qquad\qquad + 10 \\
\quad -(x^5 \qquad - 7x^3 + 2x^2) \\
\hline
\qquad -x^4 + 5x^3 - 2x^2 \qquad + 10 \\
\qquad -(-x^4 \qquad + 7x^2 - 2x) \\
\hline
\qquad\quad 5x^3 - 9x^2 + 2x + 10 \\
\qquad\quad -(5x^3 \qquad - 35x + 10) \\
\hline
\qquad\qquad -9x^2 + 37x
\end{array}
$$

Tedy $q(x) = 2x^3 + x^2 - x + 5$, $r(x) = -9x^2 + 37x$.

b) Kdybychom počítali přímo $f : g$ jako v a), museli bychom počítat pracně se zlomky. Výpočty zjednodušíme, když využijeme tento fakt: Jestliže $f = gq + r$, pak pro libovolné $a \neq 0$ platí $af = g(aq + ar)$. Vypočítáme-li tedy polynomy q_1, r_1 ze vztahu $af = gq_1 + r_1$, bude platit

$$q = \frac{1}{a} q_1, r = \frac{1}{a} r_1.$$

V našem příkladu počítáme např. s polynomy g a

$$f_1(x) = 7f(x) = 35x^6 + 28x^5 + 21x^2 + 14x + 7.$$

Platí

$$
\begin{array}{l}
(35x^6 + 28x^5 \qquad\qquad + 21x^2 + 14x + 7) : (7x^4 + 2x^2 - 3x + 2) = 5x^2 + 4x - \frac{10}{7} \\
-(35x^6 \qquad + 10x^4 - 15x^3 + 10x^2) \\
\hline
\quad 28x^5 - 10x^4 + 15x^3 + 11x^2 + 14x + 7 \\
\quad -(28x^5 \qquad + 8x^3 - 12x^2 + 8x) \\
\hline
\qquad -10x^4 + 7x^3 + 23x^2 + 6x + 7 \\
\qquad -(-10x^4 \qquad - \frac{20}{7}x^2 + \frac{30}{7}x - \frac{20}{7}) \\
\hline
\qquad\qquad 7x^3 + \frac{181}{7}x^2 + \frac{12}{7}x + \frac{69}{7}
\end{array}
$$

Tedy

$$q_1(x) = 5x^2 + 4x - \tfrac{10}{7}, r_1(x) = 7x^3 + \tfrac{181}{7}x^2 + \tfrac{12}{7}x + \tfrac{69}{7},$$

odkud

$$q(x) = \tfrac{5}{7}x^2 + \tfrac{4}{7}x - \tfrac{10}{49}, r(x) = x^3 + \tfrac{181}{49}x^2 + \tfrac{12}{49}x + \tfrac{69}{49}.$$

3,2.2. Zjistěme, zda $f \mid g$ v $T[x]$, jestliže:
a) $f(x) = x^3 - 4, g(x) = 3x^5 + 5x^4 - x^3 - 12x^2 - 20x + 4, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 2, g(x) = 2x^5 + x^4 + 2x^2 + x + 1, T = \mathbf{Z}_3$.

Řešení. a) Vypočítáme $g : f$:

$$
\begin{array}{l}
(3x^5 \; +5x^4 \quad -x^3-12x^2-20x+4) : (x^3-4) = 3x^2+5x-1 \\
-(3x^5 \qquad\qquad -12x^2) \\
\hline
\qquad 5x^4 \quad -x^3 \qquad -20x+4 \\
\quad -(5x^4 \qquad\qquad -20x) \\
\hline
\qquad\qquad -x^3 \qquad\qquad +4 \\
\qquad -(-x^3 \qquad\qquad +4) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Označíme $h(x) = 3x^2 + 5x - 1$. Protože zbytek při dělení je 0, platí $fh = g$, tedy $f \mid g$.
b) Postupujeme analogicky jako v a). Pozor! Pracujeme v $\mathbf{Z}_3[x]$, proto násobíme, sčítáme i odčítáme v $\mathbf{Z}_3$!

$$
\begin{array}{l}
(2x^5 + \; x^4 \qquad +2x^2+x+1) : (x^3+2x^2+2x+2) = 2x^2+2 \\
-(2x^5 + \; x^4 + \; x^3 + \; x^2) \\
\quad 1 \quad\; 2 \quad\; 2 \quad\; 2 \quad \text{(prvky opačné ke koeficientům v } \mathbf{Z}_3) \\
\hline
\qquad\qquad 2x^3 + \; x^2+x+1 \\
\qquad -(2x^3 + \; x^2+x+1) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Opět vyšel zbytek 0, proto $f \mid g$.

3,2.3. Zjistěme, zda polynomy

$$f(x) = 4x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1, g(x) = 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2$$

jsou asociované v $\mathbf{Z}_5[x]$.

Řešení. V $\mathbf{Z}_5[x]$ zřejmě platí

$$3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x + 2 = 2(4x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1).$$

Podle lemmatu 3,1.5 b) tedy $f \sim g$.

3,2.4. Pomocí Euklidova algoritmu určeme největší společný dělitel polynomů $f, g \in T[x]$, jestliže:
a) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 11x^2 - 6x - 1, g(x) = 4x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 6x - 2, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1, g(x) = x^2 + 2x + 4, T = \mathbf{Z}_5$.

Řešení. a) V prvním kroku výpočtu $D(f, g)$ pomocí Euklidova algoritmu budeme místo polynomu g uvažovat s ním asociovaný polynom $g_1(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 3x - 1$. Platí

$$f(x) = g_1(x)x + (-4x^3 - 8x^2 - 5x - 1).$$

Tedy $r_1(x) = -4x^3 - 8x^2 - 5x - 1$. V dalším kroku dostaneme

$$g(x) = r_1(x)(-x + \tfrac{1}{2}) + (-3x^2 - \tfrac{9}{2}x - \tfrac{3}{2}).$$

Tedy $r_2(x) = -3x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$. Místo polynomu r_2 budeme uvažovat s ním asociovaný polynom $r_2'(x) = 2x^2 + 3x + 1$. Protože

$$r_1(x) = r_2'(x)(-2x - 1)$$

(zbytek je roven 0), je jedním z největších společných dělitelů polynom

$$D(f, g)(x) = r_2'(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$

Dále platí

$$(f, g)(x) = x^2 + \tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}.$$

b) Potupujeme analogicky jako v a), ale výpočty provádíme pro $T = \mathbf{Z}_5$:

$$f(x)=g(x)(2x + 4) + 3x, \quad \text{tj.} \quad r_1(x)=3x,$$
$$g(x)=r_1(x)(2x + 4) + 4, \quad \text{tj.} \quad r_2(x)=4.$$

Podle lemmatu 3,1.3 d) platí $4 \mid r_1$, tedy jedním z největších společných dělitelů je

$$D(f, g)(x) = r_2'(x) = 4.$$

Dále platí

$$(f, g)(x) = 1.$$

3,2.5. Pro polynomy $f, g \in \mathbf{R}[x], f(x) = x^5 - 1, g(x) = x^2 + 1$, zjistěme, zda jsou soudělné nebo nesoudělné, a nalezněme polynomy $u, v \in \mathbf{R}[x]$ tak, aby platila Bezoutova rovnost $(f, g) = fu + gv$.

Řešení. Nejprve ukážeme obecně, jak lze k nalezení polynomů u, v využít Euklidův algoritmus nalezení největšího společného dělitele polynomů f, g. Polynom $D(f, g)$ se shoduje se zbytkem v předposlední rovnosti postupných dělení z odst. 3,1.11. Odtud

$$D(f, g) = r_{m-2} - r_{m-1}q_{m-1}.$$

Označme $u_1 = 1, v_1 = -q_{m-1}$. Pak můžeme psát

$$D(f,g) = r_{m-2}u_1 + r_{m-1}v_1.$$

Dosaďme do této rovnosti r_{m-1} z odst. 3,1.11 pro $k = m-1$, tj. z rovnosti

$$r_{m-3} = r_{m-2}q_{m-2} + r_{m-1}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned} D(f,g) &= r_{m-2}u_1 + [r_{m-3} - r_{m-2}q_{m-2}]v_1 = \\ &= r_{m-3}u_2 + r_{m-2}v_2, \end{aligned}$$

kde $u_2 = v_1, v_2 = u_1 - q_{m-2}v_1$. Takto můžeme pokračovat dále, až po $m-1$ krocích dospějeme k rovnosti

$$D(f,g) = fu_{m-1} + gv_{m-1}.$$

Nyní stačí normovat $D(f,g)$ a nahradit polynomy u_{m-1}, v_{m-1} odpovídajícími asociovanými polynomy.

Použijeme nyní tento postup pro polynomy $f(x) = x^5 - 1, g(x) = x^2 + 1$. Nejprve vypočítáme $D(f,g)$ Euklidovým algoritmem (viz 3,1.11). Postupným dělením dostáváme

(1) $x^5 - 1 = (x^2+1)(x^3-x) + (x-1)$,

(2) $x^2 + 1 = (x-1)(x+1) + 2$.

Tedy $D(f,g) = 2, (f,g) = 1$. Vidíme, že polynomy f, g jsou nesoudělné. Hledáme polynomy $u, v \in \mathbf{R}[x]$ tak, aby platilo

$$1 = (x^5-1)u(x) + (x^2+1)v(x).$$

Z rovností (2), (1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} 2 &= (x^2+1) - (x-1)(x+1) = \\ &= (x^2+1) - [(x^5-1) - (x^2+1)(x^3-x)](x+1) = \\ &= (x^5-1)(-x-1) + (x^2+1)(x^4+x^3-x^2-x+1), \end{aligned}$$

tedy

$$(f,g)(x) = \tfrac{1}{2}[(x^5-1)(-x-1) + (x^2+1)(x^4+x^3-x^2-x+1)].$$

Proto

$$u(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}, v(x) = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

3,2.6. Nalezněme $[f,g]$ pro polynomy z příkl. 3,2.4 a).

Řešení. Použijeme větu 3,1.18. Jsou splněny předpoklady tvrzení a),

$$n=5, m=4, a_5=2, b_4=4, (f,g)(x)=x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Tedy

$$[f,g](x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{f(x)g(x)}{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{f(x)g(x)}{2x^2+3x+1}=\frac{1}{4}h(x).$$

Vypočítáme součin fg. Snadno zjistíme, že

$$(2x^5+3x^4-5x^3-11x^2-6x-1)(4x^4+6x^3-2x^2-6x-2)=$$
$$=2(4x^9+12x^8-3x^7-46x^6-51x^5+3x^4+41x^3+30x^2+9x+1).$$

Vypočítejme podíl h. Dostaneme

$$h(x)=2(2x^7+3x^6-7x^5-14x^4-x^3+10x^2+6x+1).$$

Tedy

$$[f,g](x)=x^7+\tfrac{3}{2}x^6-\tfrac{7}{2}x^5-7x^4-\tfrac{1}{2}x^3+5x^2+3x+\tfrac{1}{2}.$$

3,2.7. Ukažme, že polynom x^2+4 je a) reducibilní v $\mathbf{C}[x]$; b) ireducibilní v $\mathbf{R}[x]$.

Řešení. a) Polynom x^2+4 je v $\mathbf{C}[x]$ reducibilní, neboť víme, že

$$x^2+4=(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i}).$$

b) Předpokládejme, že polynom x^2+4 je v $\mathbf{R}[x]$ reducibilní. Pak musí existovat polynomy $a_0+a_1x, a_1\neq 0, b_0+b_1x, b_1\neq 0$, tak, že

$$x^2+4=(a_0+a_1x)(b_0+b_1x).$$

Po roznásobení dostáváme, že musí platit

$$\begin{aligned} 1 &= a_1b_1,\\ 0 &= a_0b_1+a_1b_0,\\ 4 &= a_0b_0. \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice ihned vidíme, že $a_0\neq 0, b_0\neq 0$. Z první a třetí rovnice plyne, že

$$a_1=\frac{1}{b_1}, a_0=\frac{4}{b_0}.$$

Dosadíme do druhé rovnice:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{4}{b_0}b_1+\frac{1}{b_1}b_0,\\ 0 &= 4b_1^2+b_0^2. \end{aligned}$$

To je však spor, protože $4b_1^2 + b_0^2 > 0$. Proto má polynom $x^2 + 4$ v $\mathbf{R}[x]$ pouze triviální dělitele, je tedy v $\mathbf{R}[x]$ ireducibilní.

3,2.8. Nalezněme kanonický rozklad polynomu $f(x) = x^3 - 8$ v $\mathbf{R}[x]$.

Řešení. Víme, že

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4). \qquad ((*))$$

Polynom x^2+2x+4 je v $\mathbf{R}[x]$ ireducibilní. Kvadratická rovnice $x^2+2x+4 = 0$ nemá totiž v $\mathbf{R}$ řešení, neboť diskriminant $D = 4 - 16 = -12 < 0$. Proto má polynom $x^2 + 2x + 4$ v $\mathbf{R}[x]$ pouze triviální dělitele. Zápis $(*)$ je hledaný kanonický rozklad.

3,2.9. Nalezněme (f,g) a $[f,g]$ v $\mathbf{R}[x]$, je-li

$$f(x) = x^3 - 8, g(x) = 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x - 8,$$

pomocí kanonických rozkladů polynomů f,g v $\mathbf{R}[x]$.

Řešení. Z příkl. 3,2.8 víme, že kanonický rozklad polynomu f v $\mathbf{R}[x]$ je

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

Všimněme si nyní polynomu g. Platí

$$g = 2g_1, \text{ kde } g_1(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4.$$

Dělme polynom g_1 polynomem $x^2 + 2x + 4$. Dostaneme

$$\begin{array}{l}
(x^4+2x^3 \;+3x^2-2x-4) : (x^2+2x+4) = x^2 - 1 \\
-(x^4+2x^3 \;+4x^2) \\
\hline
\qquad\qquad -x^2-2x-4 \\
\qquad\quad -(-x^2-2x-4) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Tedy

$$2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = 2(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 1).$$

Polynom x^2-1 můžeme dále rozložit na součin $(x+1)(x-1)$. Kanonický rozklad polynomu g v $\mathbf{R}[x]$ tedy je

$$2x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = 2(x^2 + 2x + 4)(x+1)(x-1).$$

Podle věty 3,1.28 je

$$\begin{aligned}
(f,g)(x) &= x^2 + 2x + 4, \\
[f,g](x) &= (x^2 + 2x + 4)(x-2)(x+1)(x-1) = \\
&= x^5 - x^3 - 8x^2 + 8.
\end{aligned}$$

3,3. CVIČENÍ

3,3.1. Nalezněte částečný podíl q a zbytek r při dělení polynomu f polynomem g v $T[x]$, jestliže:
a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 5x + 4, g(x) = x^3 - 5x + 7, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = 6x^4 + 27x^3 + 23x^2 - 16x + 2, g(x) = 2x^2 + 5x - 1, T = \mathbf{R}$;
c) $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + x - 6, g(x) = x^3 - 8x^2 + x - 8, T = \mathbf{R}$;
d) $f(x) = x^3 - 8x^2 + x - 7, g(x) = x^2 + 1, T = \mathbf{R}$;
e) $f(x) = x^5 + 2x^3 + 5x^2 + 10, g(x) = x^2 + 2, T = \mathbf{R}$;
f) $f(x) = x^6 - 4x^4 + 2x + 3, g(x) = x^3 - 2x + 1, T = \mathbf{R}$;
g) $f(x) = x^5 + 15x^2 - 31x + 15, g(x) = x^2 + 2x - 3, T = \mathbf{R}$;
h) $f(x) = x^5 + 2\mathrm{i}x^4 + (-3 - \mathrm{i})x^3 + 2\mathrm{i}x^2 - 4x - 6\mathrm{i}, g(x) = x^2 + 2\mathrm{i}x - 3, T = \mathbf{C}$;
i) $f(x) = 3\mathrm{i}x^6 + (-1 + 3\mathrm{i})x^5 + (-1 + 3\mathrm{i})x^4 + (-1 + \mathrm{i})x^3 + (-2 + \mathrm{i})x^2 - (-2 + \mathrm{i})x - 2$, $g(x) = 3\mathrm{i}x^4 - x^3 + \mathrm{i}x - 2, T = \mathbf{C}$.

3,3.2. Nalezněte částečný podíl q a zbytek r při dělení polynomu f polynomem g v $T[x]$ a proveďte zkoušku, jestliže:
a) $f(x) = 2x^5 + x^4 + x^3 + 2, g(x) = x^2 + 2, T = \mathbf{Z}_3$;
b) $f(x) = 2x^7 + x^6 + 2x^4 + x^2 + 2x + 1, g(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + x + 2, T = \mathbf{Z}_3$;
c) $f(x) = 4x^3 + x^2 + x + 3, g(x) = 2x + 1, T = \mathbf{Z}_5$;
d) $f(x) = 4x^3 + 4, g(x) = 2x^2 + 3x + 2, T = \mathbf{Z}_5$;
e) $f(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 3, g(x) = 2x^3 + 3x + 4, T = \mathbf{Z}_5$;
f) $f(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 2, g(x) = 3x^3 + 2x + 1, T = \mathbf{Z}_5$;
g) $f(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1, g(x) = 4x^3 + x + 2, T = \mathbf{Z}_5$.

3,3.3. Zjistěte, zda $f \mid g$ v $T[x]$, jestliže:
a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 5x - 3, g(x) = x + 3, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = x^7 + 5x^6 - 4x^5 - 11x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6, g(x) = x^3 - 2x - 1, T = \mathbf{R}$;
c) $f(x) = x^9 + 2x^6 + x^3 + 1, g(x) = x^2 - x + 1, T = \mathbf{R}$;
d) $f(x) = x^5 - (1 + 2\mathrm{i})x^4 + (3 + 3\mathrm{i})x^3 - x^2 + 8x, g(x) = x^3 - x^2 + \mathrm{i}x + 4\mathrm{i}, T = \mathbf{C}$;
e) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1, g(x) = x^2 + \mathrm{i}x + 1, T = \mathbf{C}$;
f) $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 2, g(x) = x^4 + 1, T = \mathbf{Z}_3$;
g) $f(x) = 2x^3 + 2x + 1, g(x) = 2x^2 + x + 1, T = \mathbf{Z}_3$;
h) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x^2 + 3, g(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1, T = \mathbf{Z}_5$;
i) $f(x) = 2x^5 + 3x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1, g(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 2, T = \mathbf{Z}_5$.

3,3.4. Zjistěte, zda $f \sim g$ v $T[x]$, jestliže:
a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 5, g(x) = 3x^3 + 8x^2 + 5, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x + 7, g(x) = 12x^4 + 10x^3 + 6x^2 + 14, T = \mathbf{R}$;

a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3, g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1, g(x) = x^2 + (1 + \mathrm{i})x + \mathrm{i}, T = \mathbf{C}$.

3,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $q(x) = x^2 + 1, r(x) = 2x^2 - 3$; b) $q(x) = 3x^2 + 6x - 2, r(x) = 0$;
c) $q(x) = x + 9, r(x) = 66x^2 + 66$; d) $q(x) = x - 8, r(x) = 1$; e) $q(x) = x^3 + 5, r(x) = 0$;
f) $q(x) = x^3 - 2x - 1, r(x) = -4x^2 + 2x + 4$; g) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5, r(x) = 0$;
h) $q(x) = x^3 - \mathrm{i}x - 2 + 2\mathrm{i}, r(x) = \mathrm{i}x - 6$; i) $q(x) = x^2 + x + 1, r(x) = 0$.
2. a) $q(x) = 2x^3 + x^2 + 1, r(x) = 0$; b) $q(x) = 2x^2 + 1, r(x) = x + 2$;
c) $q(x) = 2x^2 + 2x + 2, r(x) = 1$; d) $q(x) = 2x + 2, r(x) = 0$;
e) $q(x) = 3x^2 + 4x, r(x) = 3x^2 + 3$; f) $q(x) = 2x^2 + 4x, r(x) = x^2 + 3x + 2$;
g) $q(x) = 4x^2 + 4x, r(x) = x + 1$.
3. a) Ano; b) ne; c) ne; d) ne; e) ano; f) ne; g) ano; h) ano; i) ne.
4. a) Ne; b) ne; c) ano; d) ano; e) ne; f) ano; g) ne; h) ano; i) ne.
5. a) $a = 6$; b) $a = -1, b = -6$; c) $a = -50, b = -10$; d) $a = 2, b = 1$; e) $a = b = 0$.
6. a) $d(x) = x^2 + 1, n(x) = x^5 - 7x^4 - 13x^3 + 41x^2 - 14x + 48$;
b) $d(x) = x - 1, n(x) = x^7 - 7x^6 + 13x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$;
c) $d(x) = 1, n(x) = x^7 + x^5 + x^2 + 1$;
d) $d(x) = x + 1, n(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;
e) $d(x) = (x - 2)^2, n(x) = x^6 - x^5 - 11x^4 + 13x^3 + 26x^2 - 20x - 24$;
f) $d(x) = x^2 + (1 + \mathrm{i})x + 3\mathrm{i}, n(x) = x^4 + (1 + \frac{7}{2}\mathrm{i})x^3 + (-2 + \frac{11}{2}\mathrm{i})x^2 + (-6 + \frac{3}{2}\mathrm{i})x + \frac{9}{2}\mathrm{i}$;
g) $d(x) = x^2 + 1, n(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$;
h) $d(x) = x + 2, n(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 3$;
i) $d(x) = x + 1, n(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^2 + 4x + 1$.
7. a) $u(x) = \frac{1}{66}, v(x) = -\frac{1}{66}x - \frac{3}{22}$; b) $u(x) = -x + \frac{15}{4}, v(x) = x^3 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{11}{4}$;
c) $u(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, v(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;
d) $u(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, v(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$; e) $u(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{3}{20}x + \frac{3}{10}, v(x) = -\frac{1}{20}$;
f) $u(x) = \frac{1}{7}\mathrm{i}, v(x) = -\frac{2}{7}\mathrm{i}$; g) $u(x) = 2, v(x) = 2x$; h) $u(x) = 4x + 4, v(x) = x^2 + 2x + 3$;
i) $u(x) = x + 2, v(x) = 4x^2 + 3x + 2$.
8. a) Ireducibilní; b) reducibilní; c) reducibilní; d) reducibilní; e) reducibilní.
9. b) $(x + 2 + 4\mathrm{i})(x + 2 - 4\mathrm{i})$; c) $(x^2 + 2)(x^4 + 4)$; d) $(x + \mathrm{i})^2(x - 2\mathrm{i})(x + 1)$; e) $(x + 2)^2$.
10. a) $f(x) = (x+1)^2(x+3), g(x) = (x+1)(x+3)(2x+1), (f, g)(x) = x^2+4x+3, [f, g](x) = x^4 + \frac{11}{2}x^3 + \frac{19}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{3}{2}$; b) $f(x) = (x + \mathrm{i})^2(x - \mathrm{i})^2, g(x) = (x + \mathrm{i})(x + 1), (f, g)(x) = x + \mathrm{i}, [f, g](x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 3, g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10x + 3, T = \mathbf{R}$;
b) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1, g(x) = x^2 + (1 + \mathrm{i})x + \mathrm{i}, T = \mathbf{C}$.

3,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $q(x) = x^2 + 1, r(x) = 2x^2 - 3$; b) $q(x) = 3x^2 + 6x - 2, r(x) = 0$;
c) $q(x) = x + 9, r(x) = 66x^2 + 66$; d) $q(x) = x - 8, r(x) = 1$; e) $q(x) = x^3 + 5, r(x) = 0$;
f) $q(x) = x^3 - 2x - 1, r(x) = -4x^2 + 2x + 4$; g) $q(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5, r(x) = 0$;
h) $q(x) = x^3 - \mathrm{i}x - 2 + 2\mathrm{i}, r(x) = \mathrm{i}x - 6$; i) $q(x) = x^2 + x + 1, r(x) = 0$.
2. a) $q(x) = 2x^3 + x^2 + 1, r(x) = 0$; b) $q(x) = 2x^2 + 1, r(x) = x + 2$;
c) $q(x) = 2x^2 + 2x + 2, r(x) = 1$; d) $q(x) = 2x + 2, r(x) = 0$;
e) $q(x) = 3x^2 + 4x, r(x) = 3x^2 + 3$; f) $q(x) = 2x^2 + 4x, r(x) = x^2 + 3x + 2$;
g) $q(x) = 4x^2 + 4x, r(x) = x + 1$.
3. a) Ano; b) ne; c) ne; d) ne; e) ano; f) ne; g) ano; h) ano; i) ne.
4. a) Ne; b) ne; c) ano; d) ano; e) ne; f) ano; g) ne; h) ano; i) ne.
5. a) $a = 6$; b) $a = -1, b = -6$; c) $a = -50, b = -10$; d) $a = 2, b = 1$; e) $a = b = 0$.
6. a) $d(x) = x^2 + 1, n(x) = x^5 - 7x^4 - 13x^3 + 41x^2 - 14x + 48$;
b) $d(x) = x - 1, n(x) = x^7 - 7x^6 + 13x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 7x - 1$;
c) $d(x) = 1, n(x) = x^7 + x^5 + x^2 + 1$;
d) $d(x) = x + 1, n(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1$;
e) $d(x) = (x - 2)^2, n(x) = x^6 - x^5 - 11x^4 + 13x^3 + 26x^2 - 20x - 24$;
f) $d(x) = x^2 + (1 + \mathrm{i})x + 3\mathrm{i}, n(x) = x^4 + (1 + \frac{7}{2}\mathrm{i})x^3 + (-2 + \frac{11}{2}\mathrm{i})x^2 + (-6 + \frac{3}{2}\mathrm{i})x + \frac{9}{2}\mathrm{i}$;
g) $d(x) = x^2 + 1, n(x) = x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$;
h) $d(x) = x + 2, n(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 3$;
i) $d(x) = x + 1, n(x) = x^6 + x^5 + x^4 + 2x^2 + 4x + 1$.
7. a) $u(x) = \frac{1}{66}, v(x) = -\frac{1}{66}x - \frac{3}{22}$; b) $u(x) = -x + \frac{15}{4}, v(x) = x^3 - \frac{7}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{11}{4}$;
c) $u(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, v(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$;
d) $u(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, v(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$; e) $u(x) = \frac{1}{20}x^2 - \frac{3}{20}x + \frac{3}{10}, v(x) = -\frac{1}{20}$;
f) $u(x) = \frac{1}{7}\mathrm{i}, v(x) = -\frac{2}{7}\mathrm{i}$; g) $u(x) = 2, v(x) = 2x$; h) $u(x) = 4x + 4, v(x) = x^2 + 2x + 3$;
i) $u(x) = x + 2, v(x) = 4x^2 + 3x + 2$.
8. a) Ireducibilní; b) reducibilní; c) reducibilní; d) reducibilní; e) reducibilní.
9. b) $(x + 2 + 4\mathrm{i})(x + 2 - 4\mathrm{i})$; c) $(x^2 + 2)(x^4 + 4)$; d) $(x + \mathrm{i})^2(x - 2\mathrm{i})(x + 1)$; e) $(x + 2)^2$.
10. a) $f(x) = (x+1)^2(x+3), g(x) = (x+1)(x+3)(2x+1), (f, g)(x) = x^2+4x+3, [f, g](x) = x^4 + \frac{11}{2}x^3 + \frac{19}{2}x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{3}{2}$; b) $f(x) = (x + \mathrm{i})^2(x - \mathrm{i})^2, g(x) = (x + \mathrm{i})(x + 1), (f, g)(x) = x + \mathrm{i}, [f, g](x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$.

4. Kořeny polynomu, rozklad polynomu na součin kořenových činitelů

4,1. ZÁKLADNÍ POJMY

4,1.1. Definice. Nechť $f \in T[x]$. Řekneme, že prvek c z nadtělesa U tělesa T je *kořen polynomu* f, jestliže při jeho dosazení za neurčitou x do polynomu f dostaneme nulový prvek (v U), což stručně píšeme $f(c) = 0$.

4,1.2. Bezoutova věta. *Nechť je dán nenulový polynom $f \in T[x]$ stupně $n \geq 0$. Potom prvek $u \in T$ (resp. $u \in U$, kde U je nadobor tělesa T) je kořenem polynomu f, právě když existuje polynom $g \in T[x]$ (resp. $g \in U[x]$) stupně $n-1$, pro který platí*

$$f(x) = (x-u)g(x).$$

4,1.3. Věta. *Nechť je dán nenulový polynom $f \in T[x]$ stupně $n > 0$. Potom má polynom f nejvýše n různých kořenů (v tělese T i v kterémkoli jeho nadoboru U).*

4,1.4. Definice. Nechť $f \in T[x]$, $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že prvek c z nadtělesa U tělesa T je *k-násobným kořenem* polynomu f, jestliže existuje polynom $g \in U[x]$ tak, že

$$f(x) = (x-c)^k g(x) \wedge g(c) \neq 0.$$

4,1.5. Úmluva. Jednonásobný kořen polynomu f budeme též nazývat *jednoduchým kořenem* polynomu f. Je-li $f(c) \neq 0$, budeme někdy říkat, že c je *nula-násobným kořenem* polynomu f.

4,1.6. Věta. *Nechť $f \in T[x]$, kde T je těleso charakteristiky* 0, $\mathrm{st}(f) \geq 1$. *Potom prvek c z nějakého nadtělesa $U \supset T$ je k-násobným kořenem polynomu f, právě když*

$$f(c) = 0 \wedge f'(c) = 0 \wedge \ldots \wedge f^{(k-1)}(c) = 0 \wedge f^{(k)}(c) \neq 0.$$

4,1.7. Věta. *Nechť c je k-násobný ($k \geq 1$) kořen polynomu $f \in T[x]$, kde T je těleso charakteristiky* 0. *Pak c je $(k-1)$-násobným kořenem derivace f'.*

4,1.8. Věta. *Nechť $f \in T[x]$, kde T je těleso charakteristiky* 0, $\mathrm{st}(f) \geq 1$. *Pak polynom $g \in T[x]$, pro který platí*

$$g.D(f, f') = f,$$

má tytéž kořeny jako f, ale všechny jednoduché.

4,1.9. Odstranění vícenásobných kořenů polynomu. Nechť $f \in T[x]$, kde T je těleso charakteristiky 0, $\mathrm{st}(f) \geq 1$. Vypočteme derivaci f' a určíme $D(f, f')$ (např. pomocí Euklidova algoritmu). Hledaný polynom g pak určíme dělením

$$f = D(f, f').g.$$

Kořeny polynomu g jsou kořeny polynomu f, jejich násobnost (v f) určíme např. pomocí Hornerova schématu.

4,1.10. Poznámka. Je-li $\mathrm{st}(D(f, f')) = 0$, nemá polynom f vícenásobné kořeny.

4,1.11. Věta. *Pro těleso komplexních čísel* C *platí:*
a) *Každý polynom z* $\mathrm{C}[x]$ *stupně* $n \geq 1$ *má v* C *právě* n *kořenů, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik je jeho násobnost.*
b) *Množina všech ireducibilních polynomů v* $\mathrm{C}[x]$ *je totožná s množinou všech polynomů z* $\mathrm{C}[x]$ *stupně* 1.
c) *Každý polynom* $f \in \mathrm{C}[x]$ *stupně* $n \geq 1$ *má v* $\mathrm{C}[x]$ *rozklad tvaru*

$$f(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n).$$

4,1.12. Věta. *Libovolný polynom* $f \in \mathrm{C}[x]$ *stupně* $n \geq 1$ *má v* $\mathrm{C}[x]$ *kanonický rozklad (viz def. 3,1.26) tvaru*

$$f(x) = a(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_s)^{k_s},$$

kde $k_1 + k_2 + \dots + k_s = n$ *a* $c_1, c_2, \dots, c_s$ *jsou navzájem různá čísla.*

4,1.13. Poznámka. Nechť $f \in \mathbf{R}[x]$. Nechť komplexní číslo c je k-násobným kořenem polynomu f. Pak také komplexně sdružené číslo $\bar{c}$ je k-násobným kořenem tohoto polynomu.

4,1.14. Věta. *Nechť* $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, *je nenulový polynom nad tělesem* **R**. *Nechť* $c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_{r+s}, c_{r+s+1}, \dots, c_{r+2s}$ *jsou navzájem různé kořeny polynomu* f *takové, že* $c_1, c_2, \dots, c_r$ *jsou reálné kořeny,* $c_{r+s+i} = \bar{c}_{r+i}$, $i = 1, 2, \dots, s$. *Potom platí*

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \dots (x - c_r)^{k_r}. \\ &\quad [x^2 - (c_{r+1} + \bar{c}_{r+1})x + c_{r+1}\bar{c}_{r+1}]^{k_{r+1}} \dots [x^2 - (c_{r+s} + \bar{c}_{r+s})x + c_{r+s}\bar{c}_{r+s}]^{k_{r+s}}. \end{aligned}$$

4,1.15. Definice. Zápis polynomu $f \in \mathbf{R}[x]$ z věty 4,1.14 se nazývá *rozklad polynomu f na součin kořenových činitelů.*

4,1.16. Věta. *Každý polynom z $\mathbf{R}[x]$ lichého stupně má aspoň jeden reálný kořen.*

4,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

4,2.1. Zjistěme, zda $c = -4$ je kořenem polynomu

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 39x^2 + 40x + 400.$$

V kladném případě určeme jeho násobnost.

Řešení. Pomocí opakovaného Hornerova schématu vypočteme

	1	-2	-39	40	400	
$t = -4$	0	-4	24	60	-400	
	1	-6	-15	100	$\boxed{0}$	$= f(-4)$
$t = -4$	0	-4	40	-100		
	1	-10	25	$\boxed{0}$	$= g_1(-4)$	
$t = -4$	0	-4	56			
	1	-14	$\boxed{81}$	$= g_2(-4) \neq 0$		

Bod $c = -4$ je tedy dvojnásobný kořen polynomu f.

4,2.2. Zjistěme, zda polynom

$$f(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

má kořen a) v $\mathbf{Z}_3$; b) v $\mathbf{Z}_5$.

Řešení. a) Protože $\mathbf{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$, budeme zjišťovat hodnotu $f(x)$ postupně pro $x = 0, 1, 2$. Zřejmě $f(0) = 1$, 0 není kořenem polynomu f.

Pro $x = 1$ použijeme Hornerovo schéma:

	1	2	1	2	2	1	
$t = 1$	0	1	0	1	0	2	
	1	0	1	0	2	$\boxed{0}$	$= f(1)$
$t = 1$	0	1	1	2	2		
	1	1	2	2	$\boxed{1}$	$= g(1) \neq 0$	

Bod $x = 1$ je jednoduchý kořen polynomu f v $\mathbf{Z}_3$.

Pro $x = 2$ stačí dosazovat do polynomu $g(x) = f(x) : (x - 1) = x^4 + x^2 + 2$:

$$\begin{array}{r||c|c|c|c|c}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline
t=2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline\hline
 & 1 & 2 & 2 & 1 & \boxed{1} = g(2) \neq 0
\end{array}$$

Bod $x = 2$ není kořenem polynomu g, a tedy ani polynomu f v $\mathbf{Z}_3$.

Současně jsme zjistili, že v $\mathbf{Z}_3[x]$ platí

$$f(x) = (x+2)(x^4 + x^2 + 2).$$

b) Postupujeme analogicky jako v a). Protože $\mathbf{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$, budeme zjišťovat hodnoty $f(x)$ v bodech ze $\mathbf{Z}_5$. Opět $f(0) = 1$, dále

$$\begin{array}{r||c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline
t=1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ \hline\hline
 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & \boxed{4} \neq 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 1 není kořen f v $\mathbf{Z}_5$;

$$\begin{array}{r||c|c|c|c|c|c}
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline
t=2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ \hline\hline
 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 & \boxed{0} \\ \hline
t=2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 4 & \\ \hline\hline
 & 1 & 1 & 1 & 2 & \boxed{1} \neq 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 2 je jednoduchý kořen f v $\mathbf{Z}_5$;

$$\begin{array}{r||c|c|c|c|c}
 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ \hline
t=3 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \hline\hline
 & 1 & 2 & 0 & 0 & \boxed{2} \neq 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 3 není kořen f v $\mathbf{Z}_5$;

$$\begin{array}{r||c|c|c|c|c}
 & 1 & 4 & 4 & 0 & 2 \\ \hline
t=4 & 0 & 4 & 2 & 4 & 1 \\ \hline\hline
 & 1 & 3 & 1 & 4 & \boxed{3} \neq 0
\end{array}$$

$\Rightarrow$ 4 není kořen f v $\mathbf{Z}_5$.

Ukázali jsme, že polynom f má v $\mathbf{Z}_5$ jediný jednoduchý kořen $x = 2$. Současně jsme zjistili, že v $\mathbf{Z}_5[x]$ platí

$$f(x) = (x+3)(x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2).$$

4,2.3. Nalezněme takový normovaný polynom $f \in \mathbf{R}[x]$ nejmenšího stupně, aby $-2, 0, 2$ byly jeho kořeny.

Řešení. Užijeme Bezoutovu větu 4,1.2. Aby byl bod $c = -2$, resp. $c = 0$, resp. $c = 2$ kořenem polynomu f, musí být f dělitelný polynomem $x + 2$, resp. x, resp. $x - 2$.

Polynom nejmenšího stupně s touto vlastností je polynom

$$f(x) = (x+2)x(x-2) = x^3 - 4x.$$

4,2.4. Nalezněme všechny kořeny polynomu

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \in \mathbf{R}[x],$$

jestliže víme, že $c = 2$ je jeho kořenem.

Řešení. Protože $c = 2$ je kořen polynomu f, existuje polynom g stupně 2 takový, že

$$f(x) = (x-2)g(x).$$

Koeficienty polynomu g zjistíme pomocí Hornerova schématu:

	1	2	-3	-10
$t = 2$	0	2	8	10
	1	4	5	$\boxed{0}$

Tedy

$$g(x) = x^2 + 4x + 5.$$

Snadno zjistíme, že kořeny polynomu g jsou $d = -2 + \mathrm{i}$, $e = -2 - \mathrm{i}$.

4,2.5. Zjistěme, jak je třeba volit číslo a, aby číslo 2 bylo kořenem polynomu

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + 6 \in \mathbf{R}[x].$$

Nalezněme všechny kořeny tohoto polynomu.

Řešení. Použijeme Hornerovo schéma:

	1	2	$-a$	6
$t = 2$	0	2	8	$16 - 2a$
	1	4	$8 - a$	$\boxed{22 - 2a}$

Aby číslo 2 bylo kořenem polynomu f, musí pro a platit

$$22 - 2a = 0,$$

tj.

$$a = 11.$$

Další kořeny jsou kořeny polynomu

$$g(x) = x^2 + 4x + 8 - a = x^2 + 4x - 3.$$

Zřejmě kořeny polynomu g, a tedy i f, jsou čísla $d = -2 + \sqrt{7}$, $e = -2 - \sqrt{7}$.

4,2.6. Nalezněme vícenásobné kořeny polynomu

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12 \in \mathrm{R}[x].$$

Řešení. Využijeme větu 4,1.8. Určíme $D(f, f')$ a nalezneme jeho kořeny. Tyto kořeny budou vícenásobnými kořeny polynomu f. K výpočtu $D(f, f')$ použijeme Euklidův algoritmus:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - 8x - 12, \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x - 8. \end{aligned}$$

V prvním kroku výpočtu budeme místo polynomu f uvažovat s ním asociovaný polynom

$$f_1(x) = 3x^3 + 3x^2 - 24x - 36.$$

Platí

$$f_1(x) = f'(x)(x + \tfrac{1}{3}) + (-\tfrac{50}{3}x - \tfrac{100}{3}).$$

Tedy $r_1(x) = -\frac{50}{3}x - \frac{100}{3}$. Budeme pracovat s asociovaným polynomem $x + 2$. Protože

$$f'(x) = (x + 2)(3x - 4),$$

je

$$D(f, f')(x) = x + 2.$$

Proto $c = -2$ je aspoň dvojnásobný kořen polynomu f. Jeho násobnost zjistíme pomocí opakovaného Hornerova schématu:

	1	1	-8	-12
$t = -2$	0	-2	2	12
	1	-1	-6	$\boxed{0}$
$t = -2$	0	-2	6	
	1	-3	$\boxed{0}$	

Tedy $c = -2$ je dvojnásobný kořen polynomu f. Současně z posledního řádku v Hornerově schématu dostáváme, že

$$f(x) = (x + 2)^2(x - 3).$$

Vidíme, že $d = 3$ je jednoduchý kořen polynomu f.

4,2.7. Nalezněme číslo a tak, aby polynom

$$f(x) = x^3 - 27x - a \in \mathrm{R}[x]$$

měl vícenásobný kořen.

Řešení. Použijeme postup z příkl. 4,2.6. Protože $f'(x) = 3x^2 - 27$, dostáváme při výpočtu $D(f, f')$ postupně

$$\begin{aligned} 3f(x) &= 18f'(x)x + (-54x - 3a), \\ 18f'(x) &= (54x + 3a)\left(x - \frac{a}{18}\right) + \left(\frac{a^2}{6} - 486\right). \end{aligned}$$

Aby měl polynom f vícenásobný kořen, musí být zbytek při druhém kroku Euklidova algoritmu roven nule, tj.

$$\frac{a^2}{6} - 486 = 0.$$

Tato rovnice má dva kořeny $a_1 = 54, a_2 = -54$. Pro tyto hodnoty a má polynom f vícenásobné kořeny.

4,2.8. Nalezněme rozklad polynomu

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

na součin kořenových činitelů.

Řešení. Nejprve zjistíme, zda má polynom f vícenásobné kořeny. Protože

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x + 3,$$

dostáváme při výpočtu $D(f, f')$ postupně

$$\begin{aligned} 4f(x) &= f'(x)(x - \tfrac{3}{4}) + (-\tfrac{19}{4}x^2 + \tfrac{21}{2}x - \tfrac{23}{4}), \\ 19f'(x) &= (-19x^2 + 42x - 23)(-4x + \tfrac{3}{19}) + (-\tfrac{1152}{19}x + \tfrac{1152}{19}x), \\ -19x^2 + 42x - 23 &= (-x + 1)(19x - 23). \end{aligned}$$

Tedy $D(f, f') = -x + 1$. Ihned vidíme, že $c = 1$ je vícenásobný kořen polynomu f. Určeme jeho násobnost:

	1	-3	1	3	-2
$t = 1$	0	1	-2	-1	2
	1	-2	-1	2	$\boxed{0}$
$t = 1$	0	1	-1	-2	
	1	-1	-2	$\boxed{0}$	
$t = 1$	0	1	0		
	1	0	$\boxed{-2} \neq 0$		

Číslo $c = 1$ je dvojnásobný kořen polynomu f. Další kořeny polynomu f musí být kořeny polynomu $x^2 - x - 2$. Tento polynom má dva jednoduché kořeny $d_1 = 2, d_2 = -1$. To jsou také jednoduché kořeny polynomu f. Hledaný rozklad polynomu f na kořenové činitele je tedy

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

4,2.9. Je dán polynom

$$f(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4 \in \mathbf{R}[x].$$

Nalezněme polynom $g \in \mathbf{R}[x]$ s těmito vlastnostmi: Polynom g má stejné kořeny jako f, ale všechny jeho kořeny jsou jednoduché.

Řešení. Použijeme větu 4,1.8. Polynom g je podle této věty roven

$$g = \frac{f}{D(f, f')}.$$

Vypočítejme $D(f, f')$. Protože $f'(x) = 5x^4 - 30x^2 - 40x - 15$, dostáváme postupně

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{5}f'(x)x + (-4x^3 - 12x^2 - 12x - 4), \\ \tfrac{1}{5}f'(x) &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x - 3), \end{aligned}$$

odkud

$$D(f, f')(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1.$$

Konečně

$$g(x) = (x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4) : (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = x^2 - 3x - 4.$$

Polynom g má jednoduché kořeny $c = 4, d = -1$. (Samozřejmě, že opakovaným Hornerovým schématem ověříme, že $c = 4$ je jednoduchý a $d = -1$ čtyřnásobný kořen polynomu f.)

Poznámka. V dalších kapitolách (hlavně v kap. 5) uvedeme i další metody nalezení kořenů pro některé typy polynomů.

4,3. CVIČENÍ

4,3.1. Pro těleso T, polynom $f \in T[x]$ a prvek $c \in T$ rozhodněte, zda c je kořenem polynomu f. V kladném případě určete jeho násobnost:

a) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^5 - 4x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 60x + 68, c = 2$;

b) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^4 - 2x^3 - 39x^2 + 40x + 400, c = 5$;

c) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 100, c = -4$;

d) $T = \mathbf{R}, f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 2, c = 1$;

e) $T = \mathbf{R}, f(x) = 4x^6 - 7x^5 + 8x^4 + x - 3, c = -1$;
f) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 8x^2 - 16x + 16, c = 2$;
g) $T = \mathbf{R}, f(x) = 2x^5 + 10x^4 + 14x^3 + 4x^2 + 8x + 16, c = -2$;
h) $T = \mathbf{Q}, f(x) = \frac{2}{3}x^7 + x^6 - \frac{8}{5}x^4 + \frac{16}{31}, c = -\frac{3}{4}$;
i) $T = \mathbf{Q}, f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + 3x - \frac{5}{4}, c = \frac{1}{2}$;
j) $T = \mathbf{C}, f(x) = x^5 + (-4 + \mathrm{i})x^4 + (8 - 4\mathrm{i})x^3 + (-8 + 8\mathrm{i})x^2 + (4 - 8\mathrm{i})x + 4\mathrm{i}, c = 1 + \mathrm{i}$;
k) $T = \mathbf{C}, f(x) = x^4 + 2\mathrm{i}x^3 + 2\mathrm{i}x - 1, c = -\mathrm{i}$;
l) $T = \mathbf{C}, f(x) = x^6 + (2 - \mathrm{i})x^4 + (3 - 2\mathrm{i})x - 2 + \mathrm{i}, c = 2 + \mathrm{i}$;
m) $T = \mathbf{Z}_3, f(x) = 2x^4 + 2x^3 + x, c = 2$;
n) $T = \mathbf{Z}_3, f(x) = 2x^4 + x^3 + 2x + 1, c = 2$;
o) $T = \mathbf{Z}_3, f(x) = x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2, c = 1$;
p) $T = \mathbf{Z}_5, f(x) = 4x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 1, c = 3$;
q) $T = \mathbf{Z}_5, f(x) = 2x^4 + 3, c = 2$;
r) $T = \mathbf{Z}_5, f(x) = x^5 + 2x^4 + 4x^2 + x + 1, c = 4$.

4,3.2. Nalezněte kořeny polynomu $f \in T[x]$ ležící v T, jestliže:
a) $T = \mathbf{Z}_3, f(x) = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x + 1$;
b) $T = \mathbf{Z}_3, f(x) = x^4 + 2x$;
c) $T = \mathbf{Z}_5, f(x) = 4x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x + 2$;
d) $T = \mathbf{Z}_5, f(x) = 2x^5 + x^3 + 2x + 1$;
e) $T = \mathbf{Z}_5, f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 1$.

4,3.3. Nalezněte normovaný polynom $f \in T[x]$ nejmenšího stupně s danými kořeny, jestliže:
a) $T = \mathbf{R}$, jednoduché kořeny 1, 0, 2;
b) $T = \mathbf{R}$, dvojnásobný kořen -1, jednoduché kořeny 5, 2;
c) $T = \mathbf{R}$, dvojnásobný kořen $\sqrt{2}$, trojnásobný kořen $\sqrt{3}$;
d) $T = \mathbf{C}$, jednoduché kořeny 3, 2, $-\mathrm{i}$;
e) $T = \mathbf{C}$, jednoduché kořeny $1 - \mathrm{i}, 2 + \mathrm{i}\sqrt{3}$;
f) $T = \mathbf{C}$, trojnásobný kořen $3 - \mathrm{i}$;
g) $T = \mathbf{Z}_3$, dvojnásobný kořen 1, jednoduchý kořen 0;
h) $T = \mathbf{Z}_5$, dvojnásobné kořeny 1, 2, jednoduchý kořen 4;
i) $T = \mathbf{Z}_5$, jednoduché kořeny 1, 2, 3.

4,3.4. Nalezněte všechny kořeny polynomu $f \in T[x]$ v nadtělese U tělesa T, víte-li, že f má jeden kořen c, jestliže:
a) $T = U = \mathbf{R}, f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4, c = -2$;
b) $T = U = \mathbf{C}, f(x) = x^2 - (5 + 2\mathrm{i})x + 21 + \mathrm{i}, c = 2 - 3\mathrm{i}$;
c) $T = \mathbf{R}, U = \mathbf{C}, f(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1, c = \mathrm{i}$;

d) $T = U = \mathbf{Z}_3, f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2, c = 1$;
e) $T = U = \mathbf{Z}_5, f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 3, c = 2$.

4,3.5. Nalezněte $a \in T$ tak, aby c byl kořen polynomu $f \in T[x]$, jestliže:
a) $T = \mathbf{R}, f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 10x^2 + ax + 18, c = 2$;
b) $T = \mathrm{C}, f(x) = 4x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 16x + a, c = \mathrm{i}$.

4,3.6. Nalezněte vícenásobné kořeny polynomu $f \in T[x]$, jestliže:
a) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^6 - 6x^5 + x^4 + 24x^3 + 16x^2$;
b) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 10x^2 - 4x + 8$;
c) $T = \mathbf{R}, f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$;
d) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$;
e) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$;
f) $T = \mathrm{C}, f(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8$;
g) $T = \mathrm{C}, f(x) = x^4 + (-3 + 7\mathrm{i})x^3 + (-15 - 15\mathrm{i})x^2 + (23 - 11\mathrm{i})x + (2 + 11\mathrm{i})$;
h) $T = \mathrm{C}, f(x) = x^6 - 6x^5 + 24x^4 - 56x^3 + 96x^2 - 96x + 64$.

4,3.7. Nalezněte číslo a tak, aby polynom $f \in \mathbf{R}[x]$ měl vícenásobný kořen, jestliže:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$;
b) $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 + ax + 1$.

4,3.8. Nalezněte rozklad polynomu $f \in \mathbf{R}[x]$ na součin kořenových činitelů, jestliže:
a) $f(x) = 4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$;
b) $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 27$;
c) $f(x) = x^4 + 4$;
d) $f(x) = x^9 + 2x^6 + x^3$;
e) $f(x) = x^6 + 27$;
f) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$;
g) $f(x) = x^4 + (-6 - \sqrt{2})x^3 + (12 + 6\sqrt{2})x^2 + (-8 - 12\sqrt{2})x + 8\sqrt{2}$;
h) $f(x) = x^5 - 7\sqrt{2}x^4 + 38x^3 - 50\sqrt{2}x^2 + 64x - 16\sqrt{2}$;
i) $f(x) = 3x^5 + (3 - 4\sqrt{3})x^4 + (-2 - 4\sqrt{3})x^3 + (-2 + 4\sqrt{3})x^2 + (3 + 4\sqrt{3})x + 3$;
j) $f(x) = x^8 - \frac{26}{5}x^7 + 4x^6 - \frac{78}{5}x^5 + 6x^4 - \frac{78}{5}x^3 + 4x^2 - \frac{26}{5}x + 1$.

4,3.9. K polynomu $f \in T[x]$ nalezněte polynom $g \in T[x]$, který má stejné kořeny jako f, ale všechny jednoduché, jestliže:
a) $T = \mathbf{R}, f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4$;
b) $T = \mathbf{R}, f(x) = 4x^4 - 4x^3 - 19x^2 - 14x - 3$;
c) $T = \mathrm{C}, f(x) = x^4 + 2\mathrm{i}x^3 + 3x^2 + 4\mathrm{i}x + 4$.

4,3.10. Nalezněte kanonický rozklad polynomu $f \in \mathrm{C}[x]$, jestliže:

a) $f(x) = x^4 + (-4 - i)x^3 + 6ix^2 + (16 - 12i)x + (-16 + 8i)$;
b) $f(x) = x^4 + (3 - i)x^3 + (3 - 3i)x^2 + (1 - 3i)x - i$;
c) $f(x) = x^4 + (-6 + i)x^3 + (12 - 6i)x^2 + (-8 + 12i)x - 8i$;
d) $f(x) = x^5 + (1 - 5i)x^4 + (-12 - 4i)x^3 + (-8 + 16i)x^2 + (12 + 8i)x + (4 - 4i)$;
e) $f(x) = x^5 + ix^4 + 2x^3 + 2ix^2 + x + i$.

4,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) Ano, dvojnásobný; b) ano, dvojnásobný; c) ano, jednoduchý; d) ne; e) ne; f) ano, čtyřnásobný; g) ano, trojnásobný; h) ne; i) ano, jednoduchý; j) ano, dvojnásobný; k) ano, trojnásobný; l) ne; m) ne; n) ano, trojnásobný; o) ano, jednoduchý; p) ne; q) ano, jednoduchý; r) ano, dvojnásobný.
2. a) 1; b) 0, 1; c) 3; d) 3; e) nemá kořen v $\mathbf{Z}_5$.
3. a) $x^3 - 3x^2 + 2x$; b) $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 13x + 10$; c) $x^5 - (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})x^4 + (11 + 6\sqrt{6})x^3 - (18\sqrt{2} + 9\sqrt{3})x^2 + (18 + 6\sqrt{6})x - 6\sqrt{3}$; d) $x^3 + (-5 + i)x^2 + (6 - 5i)x + 6i$; e) $x^2+[-3+i(1-\sqrt{3})]x+2+\sqrt{3}+i(-2+\sqrt{3})$; f) $x^3+(-9+3i)x^2+(24-18i)x+(-18+26i)$; g) $x^3 + x^2 + x$; h) $x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 4$; i) $x^3 + 4x^2 + x + 4$.
4. a) $2, -2, -1$; b) $2 - 3i, 3 + 5i$; c) $i, -i$ dvojnásobné, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ jednoduché; d) 1 jednoduchý, 2 dvojnásobný; e) 2 trojnásobný, 3 dvojnásobný.
5. a) -33; b) 6.
6. a) $0, -1, 4$ dvojnásobné; b) 1 dvojnásobný, -2 trojnásobný; c) nemá ($1, -1, -\frac{3}{2}$ jednoduché); d) $1, -2$ dvojnásobné; e) 2 trojnásobný ($i, -i$ jednoduché); f) $1 + i, 1 - i$ dvojnásobné (-2 jednoduchý); g) $1 - 2i$ trojnásobný ($-i$ jednoduchý); h) $1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i$ trojnásobné.
7. a) $a = 0$ nebo $a = 4$; b) $a = -2$.
8. a) $(x - 1)(x + 1)(2x + 1)^2$; b) $(x - 1)(x + 3)^3$; c) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$; d) $x^3(x + 1)^2(x^2 - x + 1)^2$; e) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$; f) $x(x - 1)^2(x + 2)$; g) $(x - 2)^3(x - \sqrt{2})$; h) $(x - \sqrt{2})^3(x - 2\sqrt{2})^2$; i) $(x - \sqrt{3})^2(x + \frac{\sqrt{3}}{3})^2(x + 1)$; j) $(x^2 + 1)^3(x - 5)(x - \frac{1}{5})$.
9. a) $x^2 + x - 2$; b) $2x^3 - 3x^2 - 8x - 3$; c) $x^2 + ix + 2$.
10. a) $(x - 2)^3(x + 2 - i)$; b) $(x + 1)^3(x - i)$; c) $(x - 2)^3(x + i)$; d) $(x + 1 - i)^3(x - 1 - i)^2$; e) $(x + i)^3(x - i)^2$.

5. Polynomy s celočíselnými koeficienty. Odhady kořenů

5,1. ZÁKLADNÍ POJMY

5,1.1. Úmluva. V celém článku pracujeme s polynomy celočíselnými koeficienty.

5,1.2. Věta. *Nechť $c \in \mathbb{Z}$ je kořen polynomu $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak $c \mid a_0$.*

5,1.3. Věta. *Nechť $p/q \in \mathbb{Q}$ je kořen polynomu $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Pak $p \mid a_0, q \mid a_n$.*

5,1.4. Poznámka. Věta 5,1.2 je speciální případ věty 5,1.3 pro $q = 1$.

5,1.5. Věta. *Nechť $p/q \in \mathbb{Q}$ je kořen polynomu $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, nechť $c \in \mathbb{Z}$. Pak $(qc - p) \mid f(c), (qc + p) \mid f(-c)$.*

5,1.6. Poznámka. Věta 5,1.5 se používá nejčastěji pro $c = 1$, kdy dostáváme pro kořen p/q podmínky $(q - p) \mid f(1), (q + p) \mid f(-1)$.

5,1.7. Poznámka. Při určování kořenů polynomu f s celočíselnými koeficienty můžeme využít také vlastnosti polynomů jako spojitých funkcí jedné proměnné, které známe z matematické analýzy.

5,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

5,2.1. Určeme všechny celočíselné kořeny polynomu $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

Řešení. Použijeme větu 5,1.2. Protože $a_0 = -4$, musíme hledat celočíselné kořeny polynomu f v množině všech celočíselných dělitelů čísla -4, tj. v množině $M = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$. K ověření, které prvky z množiny M jsou hledanými kořeny, použijeme např. Hornerovo schéma:

	1	3	0	-4
$t = 1$	0	1	4	4
	1	4	4	$\boxed{0}$
$t = 1$	0	1	5	
	1	5	$\boxed{9}$ $\neq 0$	

Číslo 1 je tedy jednoduchým kořenem polynomu f. Zřejmě všechny další kořeny polynomu f jsou i kořeny polynomu $g(x) = x^2 + 4x + 4$. Ihned vidíme, že $g(x) = (x+2)^2$. Číslo -2 je tedy dalším (dvojnásobným) kořenem polynomu f.

5,2.2. Pomocí věty 5,1.3 určeme množinu M všech zlomků zapsaných v základním tvaru, které mohou být kořeny polynomu $f(x) = 12x^3 - 20x^2 - 3x + 5$.

Řešení. Podle věty 5,1.3 máme pro p čtyři možnosti, a to $p \in \{1, -1, 5, -5\}$, pro q dvanáct možností, a to $q \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12\}$. Tedy p/q budeme vybírat z množiny

$$\begin{aligned} M = \{&1, -1, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{12}, -\tfrac{1}{12}, \\ &5, -5, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{3}, -\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{4}, -\tfrac{5}{4}, \tfrac{5}{6}, -\tfrac{5}{6}, \tfrac{5}{12}, -\tfrac{5}{12}\}. \end{aligned}$$

5,2.3. Určeme množinu $M_1 \subset M$ z příkl. 5,2.2 těch zlomků, které mohou být kořeny polynomu f podle pozn. 5,1.6.

Řešení. Nejprve zjistíme, že $f(1) = -6, f(-1) = -24$. Další výpočet zapíšeme do tabulky:

c	$q+p \mid -24$	$q-p \mid -6$	výsledek	c	$q+p \mid -24$	$q-p \mid -6$	výsledek
$\frac{1}{2}$	3	1	ano	-5	-4	6	ano
$-\frac{1}{2}$	1	3	ano	$\frac{5}{2}$	7	-3	ne
$\frac{1}{3}$	4	2	ano	$-\frac{5}{2}$	-3	7	ne
$-\frac{1}{3}$	2	4	ne	$\frac{5}{3}$	8	-2	ano
$\frac{1}{4}$	5	3	ne	$-\frac{5}{3}$	-2	8	ne
$-\frac{1}{4}$	3	5	ne	$\frac{5}{4}$	9	-1	ne
$\frac{1}{6}$	7	5	ne	$-\frac{5}{4}$	-1	9	ne
$-\frac{1}{6}$	5	7	ne	$\frac{5}{6}$	11	1	ne
$\frac{1}{12}$	13	11	ne	$-\frac{5}{6}$	1	11	ne
$-\frac{1}{12}$	11	13	ne	$\frac{5}{12}$	17	7	ne
5	6	-4	ne	$-\frac{5}{12}$	7	17	ne

Zjistili jsme, že $M_1 = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -5, \frac{5}{3}\}$.

Poznámka. Hornerovým schématem zjistíme, které prvky z M_1 jsou kořeny polynomu f:

	12	-20	-3	5
$t = \frac{1}{2}$	0	6	-7	-5
	12	-14	-10	$\boxed{0}$
$t = -\frac{1}{2}$	0	-6	10	
	12	-20	$\boxed{0}$	

Vidíme, že $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$ jsou kořeny polynomu f. Třetí kořen musí být kořenem polynomu $g(x) = 12x - 20$. Odtud dostáváme, že tímto kořenem je $\frac{5}{3}$. Protože $\mathrm{st}(f) = 3$, nemá f další kořeny.

5.2.4. Určeme rozklad polynomu

$$f(x) = 8x^6 + 10x^5 - 41x^4 - 56x^3 + 31x^2 + 64x + 20$$

na součin kořenových činitelů.

Řešení. Nejprve určíme celočíselné kořeny polynomu f. Protože $a_0 = 20$, mohou jimi být pouze prvky z množiny $\{1, -1, 2, -2, 4, -4, 5, -5, 10, -10, 20, -20\}$. Protože $f(1) = 36$, není 1 kořenem polynomu f. Dále použijeme Hornerovo schéma (příp. opakované Hornerovo schéma k určení násobnosti kořene). Platí

	8	10	-41	-56	31	64	20
$t = -1$	0	-8	-2	43	13	-44	-20
	8	2	-43	-13	44	20	$\boxed{0}$
$t = -1$	0	-8	6	37	-24	-20	
	8	-6	-37	24	20	$\boxed{0}$	
$t = -1$	0	-8	14	23	-47		
	8	-14	-23	47	$\boxed{-27} \neq 0$		

Číslo -1 je tedy dvojnásobným kořenem polynomu f. Dále stačí hledat kořeny polynomu

$$g(x) = 8x^4 - 6x^3 - 37x^2 + 24x + 20.$$

	8	-6	-37	24	20
$t = 2$	0	16	20	-34	-20
	8	10	-17	-10	$\boxed{0}$
$t = 2$	0	16	52	70	
	8	26	35	$\boxed{60} \neq 0$	

Číslo 2 je jednoduchým kořenem polynomu g, tedy i polynomu f. Dále budeme pracovat s polynomem

$$h(x) = 8x^3 + 10x^2 - 17x - 10.$$

Ihned vidíme, že čísla $20, -20$ nemohou být kořeny tohoto polynomu, proto nemohou být ani kořeny polynomu f. Platí

	8	10	-17	-10
$t = -2$	0	-16	12	10
	8	-6	-5	$\boxed{0}$
$t = -2$	0	-16	44	
	8	-22	$\boxed{39} \neq 0$	

Číslo -2 je jednoduchým kořenem polynomů h, f. K určení zbylých kořenů použijeme polynom $8x^2 - 6x - 5$. Podle vzorce pro kořeny kvadratické funkce dostáváme, že f má ještě kořeny $\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}$.

Celkem jsme zjistili, že kořeny polynomu f jsou čísla -1 (dvojnásobný kořen), $2, -2$, $\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}$ (jednoduché kořeny). Rozklad polynomu f na součin kořenových činitelů je ($a_6 = 8$)

$$f(x) = 8(x+1)^2(x-2)(x+2)(x-\tfrac{5}{4})(x+\tfrac{1}{2}).$$

5,3. CVIČENÍ

5,3.1. Určete všechny celočíselné kořeny polynomu f a jejich násobnost, jestliže:

a) $f(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 - 2x^2 - 14x + 16$;

b) $f(x) = 8x^6 - 22x^5 - 43x^4 + 104x^3 + 41x^2 - 64x + 12$;

c) $f(x) = 20x^6 - 72x^5 + 31x^4 + 98x^3 - 57x^2 - 20x + 12$;

d) $f(x) = 12x^6 - 32x^5 - 33x^4 + 131x^3 - 62x^2 - 12x + 8$.

5,3.2. Určete nejprve všechny racionální kořeny a jejich násobnost a pak zbylé kořeny polynomu f, jestliže:

a) $f(x) = 14x^3 - 15x^2 + 6x - 1$;

b) $f(x) = 4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$;

c) $f(x) = 6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4$;

d) $f(x) = 20x^3 - 12x^2 - 5x + 3$.

5,3.3. Určete rozklad polynomu f na součin kořenových činitelů, jestliže:

a) $f(x) = 8x^6 - 86x^5 + 357x^4 - 712x^3 + 685x^2 - 276x + 36$;

b) $f(x) = 12x^6 - 20x^5 - 73x^4 + 130x^3 + 43x^2 - 100x + 28$;

c) $f(x) = 8x^6 + 12x^5 - 34x^4 - 51x^3 + 26x^2 + 57x + 18$;

d) $f(x) = 12x^6 + 8x^5 - 45x^4 - 45x^3 + 35x^2 + 57x + 18$;

e) $f(x) = 8x^6 - 4x^5 - 78x^4 + 77x^3 + 125x^2 - 144x + 36$;

f) $f(x) = 36x^6 + 72x^5 - 91x^4 - 93x^3 + 146x^2 - 60x + 8$;

g) $f(x) = 20x^6 - 67x^5 + 3x^4 + 143x^3 - 55x^2 - 72x + 36$;

h) $f(x) = 8x^6 - 24x^5 - 6x^4 + 52x^3 - 6x^2 - 24x + 8$;

i) $f(x) = 8x^6 + 12x^5 - 34x^4 - 51x^3 + 26x^2 + 57x + 18$;

j) $f(x) = 8x^6 - 60x^5 + 146x^4 - 93x^3 - 91x^2 + 72x + 36$;

k) $f(x) = 12x^6 - 32x^5 - 33x^4 + 131x^3 - 62x^2 - 12x + 8$;

l) $f(x) = 12x^6 - 128x^5 + 525x^4 - 1026x^3 + 949x^2 - 348x + 36$;

m) $f(x) = 8x^6 - 4x^5 - 66x^4 + 77x^3 + 44x^2 - 69x + 18$;

n) $f(x) = 27x^6 + 63x^5 + 15x^4 - 55x^3 - 30x^2 + 12x + 8$;

o) $f(x) = 8x^6 + 38x^5 + 47x^4 - 16x^3 - 49x^2 - 4x + 12$;
p) $f(x) = 12x^6 + 56x^5 + 65x^4 - 34x^3 - 79x^2 - 4x + 20$;
q) $f(x) = 8x^6 - 11x^5 - 37x^4 + 23x^3 + 61x^2 + 8x - 12$;
r) $f(x) = 40x^6 - 324x^5 + 930x^4 - 1175x^3 + 735x^2 - 225x + 27$;
s) $f(x) = 8x^6 - 44x^5 - 14x^4 + 187x^3 - 77x^2 - 44x + 20$;
t) $f(x) = 8x^6 - 36x^5 - 10x^4 + 165x^3 - 70x^2 - 39x + 18$;
u) $f(x) = 18x^6 + 81x^5 + 82x^4 - 75x^3 - 122x^2 + 12x + 40$;
v) $f(x) = 8x^6 - 52x^5 + 6x^4 + 113x^3 - 22x^2 - 51x + 18$.

5,3.4. S využitím odhadů kořenů a $D(f, f')$ určete rozklad polynomu f na součin kořenových činitelů, jestliže:
a) $f(x) = 3x^5 - 11x^4 + 20x^3 - 16x^2 + 4x + 4$;
b) $f(x) = 2x^5 - 11x^4 + 28x^3 - 40x^2 + 32x - 12$;
c) $f(x) = x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 2x^2 - 11x - 3$;
d) $f(x) = 2x^6 - 13x^5 + 26x^4 - 10x^3 - 14x^2 + 3x + 2$;
e) $f(x) = 2x^5 - 13x^4 + 24x^3 - 2x^2 - 18x - 5$;
f) $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 8x^3 + 12x^2 + 8x - 12$;
g) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8$;
h) $f(x) = 3x^5 - 11x^4 + 2x^3 + 14x^2 + 7x + 1$;
i) $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 6x - 1$;
j) $f(x) = x^6 - 3x^4 - 16x^3 - 9x^2 + 27$;
k) $f(x) = x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 6x + 1$;
l) $f(x) = 27x^7 - 9x^6 + 51x^5 - 17x^4 + 21x^3 - 7x^2 - 3x + 1$;
m) $f(x) = 3x^7 + 26x^6 + 58x^5 + 76x^4 + 107x^3 + 74x^2 + 52x + 24$;
n) $f(x) = x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 3x^2 + x - 1$;
o) $f(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 3x^3 + 6x^2 + x + 2$;
p) $f(x) = 5x^7 - 11x^6 + 21x^5 - 27x^4 + 27x^3 - 21x^2 + 11x - 5$;
q) $f(x) = 12x^7 + 13x^6 + 11x^5 + 14x^4 - 14x^3 - 11x^2 - 13x - 12$.

5,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) 1 jednoduchý; b) $-1, 2, -2, 3$ jednoduché; c) -1 jednoduchý, 2 dvojnásobný; d) -2 jednoduchý, 2 dvojnásobný.
2. a) $\frac{1}{2}, \frac{2+i\sqrt{3}}{7}, \frac{2-i\sqrt{3}}{7}$; b) $1, -2$ jednoduché, $-\frac{1}{2}$ dvojnásobný; c) $2, -\frac{2}{3}, \frac{1+i\sqrt{7}}{4}, \frac{1-i\sqrt{7}}{4}$; d) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}$.
3. a) $8(x-2)^2(x-3)^2(x-\frac{1}{4})(x-\frac{1}{2})$; b) $12(x+1)(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{7}{3})$;
c) $8(x+1)^2(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})^2$; d) $12(x+1)^3(x-\frac{3}{2})^2(x+\frac{2}{3})$;
e) $8(x-2)^2(x+3)(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{3}{2})$; f) $36(x+2)^2(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})$;
g) $20(x+1)^2(x-2)^2(x-\frac{3}{4})(x-\frac{3}{5})$; h) $8(x+1)^2(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2$;

i) $8(x+1)^2(x+2)(x-\frac{3}{2})^2(x+\frac{1}{2})$; j) $8(x-2)^2(x-3)(x+\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{2})$;
k) $12(x-2)^2(x+2)(x-\frac{1}{2})^2(x+\frac{1}{3})$; l) $12(x-2)^2(x-3)^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{6})$;
m) $8(x+1)(x-2)(x+3)(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{3}{2})$; n) $27(x+1)^3(x-\frac{2}{3})^2(x+\frac{2}{3})$;
o) $8(x+1)^2(x+2)^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})$; p) $12(x+1)^2(x+2)^2(x-\frac{1}{2})(x-\frac{5}{6})$;
q) $8(x+1)^3(x-2)^2(x-\frac{3}{8})$; r) $40(x-\frac{1}{2})^3(x-3)^2(x-\frac{3}{5})$;
s) $8(x-\frac{1}{2})^2(x-2)(x+2)(x-5)(x+\frac{1}{2})$; t) $8(x-3)^2(x-\frac{1}{2})^2(x+2)(x+\frac{1}{2})$;
u) $18(x+1)^2(x+2)^2(x-\frac{5}{6})(x-\frac{2}{3})$; v) $8(x+1)^2(x-\frac{1}{2})^2(x-6)(x-\frac{3}{2})$.
4. a) $3(x+\frac{1}{3})(x^2-2x+2)^2$; b) $2(x-\frac{3}{2})(x^2-2x+2)^2$;
c) $(x-3)(x-1-\sqrt{2})^2(x-1+\sqrt{2})^2$; d) $2(x-2)(x-\frac{1}{2})(x-1-\sqrt{2})^2(x-1+\sqrt{2})^2$;
e) $2(x-\frac{5}{2})(x-1-\sqrt{2})^2(x-1+\sqrt{2})^2$; f) $2(x-\frac{3}{2})(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2$;
g) $(x+2)(x^2-2x+2)^2$; h) $3(x+\frac{1}{3})(x-1-\sqrt{2})^2(x-1+\sqrt{2})^2$;
i) $(x-1-\sqrt{2})^3(x-1+\sqrt{2})^3$; j) $(x-1)(x-3)(x^2+2x+3)^2$;
k) $(x+1)^2(x-1-\sqrt{2})^2(x-1+\sqrt{2})^2$; l) $27(x-\frac{1}{3})^2(x+\frac{1}{3})(x^2+1)^2$;
m) $3(x+2)(x+6)(x+\frac{2}{3})(x^2+1)^2$; n) $(x-1)(x^2+1)^3$;
o) $(x+2)(x^2+1)^3$; p) $5(x-1)(x^2+1)^2(x^2-\frac{6}{5}x+1)$;
q) $12(x-1)(x+\frac{3}{4})(x+\frac{4}{3})(x^2+1)^2$.

6. Polynomy s reálnými koeficienty a jejich reálné kořeny

6,1. ZÁKLADNÍ POJMY

6,1.1. Úmluva. V celé kap. 6 budeme pracovat s polynomem

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

kde $a_i \in \mathbf{R}$. Tento zápis polynomu používáme proto, že jsou takto běžně zapisovány polynomy v textech, které se odhady reálných kořenů polynomů zabývají.

A. Odhady počtu reálných kořenů a jejich polohy

6,1.2. Věta (Descartes). *Počet kladných kořenů polynomu (1) je buď roven počtu znaménkových změn v posloupnosti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jeho koeficientů, nebo je o sudý počet menší.*

6,1.3. Poznámka. Odhad počtu záporných kořenů polynomu (1) získáme tak, že odhadneme počet kladných kořenů polynomu g, pro který platí $g(x) = f(-x)$ v případě, že n je sudé, $g(x) = -f(-x)$ v případě, že n je liché.

6,1.4. Věta (Budan-Fourier). *Nechť pro polynom (1) platí $a_n > 0$. Nechť je $\alpha < \beta$, $f(\alpha)f(\beta) \neq 0$. Označme $\sigma(x)$ počet znaménkových změn v posloupnosti*

$$f(x), f'(x), \ldots, f^n(x).$$

Pak počet reálných kořenů polynomu (1), které leží v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, je roven číslu $\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$ nebo je o sudý počet menší.

6,1.5. Poznámka. Ve větách 6,1.2 a 6,1.4 se každý kořen počítá tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

6,1.6. Definice. Nechť $f \in \mathbf{R}[x]$. *Sturmovým řetězcem* polynomu f nazýváme konečnou posloupnost polynomů $f_i, i = 1, 2, \ldots, m$, definovaných takto:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x), \qquad f_2(x) = f'(x), \\ f_{j-1}(x) &= q_{j-1}(x)f_j(x) - f_{j+1}(x), \; j = 2, \ldots, m-1, \\ f_{m-1}(x) &= q_{m-1}(x)f_m(x). \end{aligned}$$

6,1.7. Poznámka. Polynom $-f_{j+1}$ je tedy zbytek při dělení polynomu f_{j-1} polynomem f_j, f_m je $D(f, f')$ - viz Euklidův algoritmus 3,1.11.

6,1.8. Věta (Sturm). *Buď $f \in \mathbb{R}[x]$. Nechť je $\alpha < \beta$ a $f(\alpha)f(\beta) \neq 0$. Pak počet navzájem různých kořenů polynomu (1) ležících v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je roven číslu $\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)$, kde $\sigma(x)$ je počet znaménkových změn ve Sturmově řetězci polynomu (1).*

6,1.9. Poznámka. Pomocí věty 6,1.8 můžeme určit přesný počet kořenů daného polynomu v daném intervalu.

6,1.10. Věta. *Všechny reálné kořeny polynomu (1) leží v intervalu $\langle -1 - A, 1 + A \rangle$, kde $A = max\,(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$.*

6,1.11. Další odhady polohy reálných kořenů polynomu (1). Předpokládejme, že aspoň jeden z koeficientů polynomu f je záporný. Označme

a_i ... nejmenší záporný koeficient,

a_r ... první záporný koeficient,

a_s ... největší kladný koeficient před prvním záporným koeficientem,

B ... největší z absolutních hodnot zápornýchkoeficientů.

Pak pro každý reálný kořen α polynomu (1) platí:

Maclaurinova věta $\alpha < 1 + \dfrac{|a_i|}{|a_0|}$,

Lagrangeova věta $\alpha < 1 + \sqrt[r]{B}$,

Tillotova věta $\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\dfrac{|a_i|}{a_s}}$.

6,1.12. Poznámka. Dolní odhady kořenů polynomu (1) získáme tak, že použijeme odhady z 6,1.11 pro polynom g z pozn. 6,1.3.

B. Iterační metody hledání reálných kořenů polynomu $f \in \mathbb{R}[x]$

6,1.13. Metoda půlení intervalu. Hledáme kořen α polynomu f s přesností $\varepsilon > 0$. Buď $\langle c_1, c_2 \rangle$ takový interval, že znaménka čísel $f(c_1), f(c_2)$ jsou různá [pak v intervalu (c_1, c_2) leží aspoň jeden kořen polynomu f]. Označme $c_3 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Pak buď $f(c_3) = 0$ a $\alpha = c_3$, nebo $f(c_3) \neq 0$. Ke konstrukci bodu c_4 použijeme ten z intervalů $\langle c_1, c_3 \rangle, \langle c_3, c_2 \rangle$, pro který platí $f(c_i)f(c_3) < 0$ (tj. ten interval, v jehož krajních bodech má funkce f opačná znaménka). Popsaným způsobem pokračujeme tak dlouho, až nalezneme buď přímo kořen α, nebo až platí $|c_{i-1} - c_i| < \varepsilon$. (Tato metoda konverguje sice pomalu, ale nemůže nikdy selhat.)

6,1.14. Metoda tečen (Newtonova metoda). Předpokládejme, že polynom $f \in \mathbf{R}[x]$ má jednoduché kořeny (toho lze dosáhnout např. odstraněním vícenásobných kořenů - viz 4,1.9). Nechť $\langle \alpha, \beta \rangle$ je takový interval, uvnitř kterého leží jediný kořen α polynomu f, a nechť na celém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ je $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ (toho lze vždy dosáhnout dostatečným zúžením intervalu, na kterém pracujeme). Označme c_1 to z čísel α, β, pro něž platí $f(c_1)f''(c_1) > 0, d_1$ druhé z čísel α, β, tj. číslo, pro něž platí $f(d_1)f''(d_1) < 0$. Utvořme posloupnosti

$$c_1, c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)}, c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)}, \ldots,$$

$$d_1, d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(c_1)}, d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(c_2)}, \ldots.$$

Potom jedna z posloupností je klesající, druhá rostoucí a obě posloupnosti konvergují ke kořenu α polynomu f.

6,1.15. Metoda sečen (metoda regula falsi). Nechť polynom $f \in \mathbf{R}[x]$ splňuje předpoklady z odst. 6,1.14. Označme

$$c_1 = \frac{\alpha f(\beta) - \beta f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}.$$

Sestrojme posloupnost $\{c_n\}$ předpisem

$$c_n = \frac{c_{n-1} f(\beta) - \beta f(c_{n-1})}{f(\beta) - f(c_{n-1})}, n = 2, 3, \ldots.$$

Pak posloupnost $\{c_n\}$ konverguje ke kořenu α polynomu f.

6,1.16. Poznámka. Za "pevný" bod v posloupnosti $\{c_n\}$ volíme ten krajní bod γ intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, pro který platí $f(\gamma)f'(\gamma) > 0$.

6,1.17. Poznámka. Máme-li určit kořen α s přesností $\varepsilon > 0$, sestrojujeme příslušné iterace kořene α tak dlouho, až je absolutní hodnota rozdílu dvou po sobě následujících iterací menší než ε.

6,1.18. Poznámka. K odhadům reálných kořenů polynomu $f \in \mathbf{R}[x]$ můžeme využít věty známé z matematické analýzy, znalosti o průběhu funkcí apod.

6,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

6,2.1. Ukažme, že polynom $f(x) = 2x^6 + 7x^4 + 3x^2 + 1$ nemá reálné kořeny.

Řešení. Použijeme Descartesovu větu 6,1.2. Protože v posloupnosti 2, 7, 3, 1 koeficientů polynomu f není žádná znaménková změna, nemá polynom f žádný kladný kořen. Protože $f(x) = f(-x)$ (f je sudá funkce), nemá polynom f ani záporné kořeny.

6,2.2. Odhadněme polohu kořenů polynomu $f(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 2$ pomocí odhadů z a) 6,1.10; b) 6,1.11.

Řešení. a) Pro polynom f je $|a_0| = 1, a_1 = 0, |a_2| = 2, |a_3| = 6, |a_4| = 2$, proto $A = 6$. Tedy všechny reálné kořeny polynomu f (pokud existují) leží v intervalu $\langle -7, 7\rangle$.

b) Pro zjištění horní hranice kladných kořenů podle 6,1.11 určíme (viz 6,1.11)

$$a_0 = 1, |a_i| = 6\ (i = 3), r = 3, a_3 = -6, s = 2, a_2 = 2, B = 6.$$

Je-li α reálný kořen polynomu f, dostáváme pro α tyto odhady:

Maclaurinova věta:

$$\alpha < 1 + \frac{|a_i|}{|a_0|} = 1 + \frac{6}{1} = 7;$$

Lagrangeova věta:

$$\alpha < 1 + \sqrt[r]{B} = 1 + \sqrt[3]{6} < 2{,}825;$$

Tillotova věta:

$$\alpha < 1 + \sqrt[r-s]{\frac{|a_i|}{a_s}} = 1 + \sqrt[3-2]{\frac{6}{2}} = 1 + 3 = 4.$$

Nejlepší odhad v našem případě dává Lagrangeova věta. Odhad z a) tedy můžeme zlepšit na $\langle -7; 2{,}825)$.

Pro zjištění dolní hranice záporných kořenů použijeme podle 6,1.12 polynom

$$g(x) = f(-x) = x^4 + 2x^2 + 6x + 2.$$

Tento polynom nemá žádný záporný koeficient, proto nemůžeme použít odhady z 6,1.11. Podle Descartesovy věty 6,1.2 však víme [v posloupnosti 1, 0, 2, 6, 2 koeficientů polynomu g není žádná znaménková změna], že polynom f nemá žádný záporný kořen.

Celkem jsme ukázali, že všechny reálné kořeny (pokud existují) polynomu f jsou v intervalu $(0; 2{,}825)$.

Poznámka. Pomocí Descartesovy věty ihned vidíme (v posloupnosti 1, 0, 2, −6, 2 koeficientů polynomu f jsou dvě znaménkové změny), že polynom f má buď dva, nebo žádný kladný kořen.

6,2.3. Pomocí Sturmova řetězce separujme kladné kořeny (pokud existují) polynomu f z příkl. 6,2.2.

<u>Řešení.</u> Separovat kořeny polynomu f znamená určit intervaly, v nichž leží právě jeden kořen polynomu f. Utvořme Sturmův řetězec polynomu f podle 6,1.6:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 + 2x^2 - 6x + 2, \\ f_2(x) &= f'(x) = 4x^3 + 4x - 6. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 - 6x + 2 &= \tfrac{1}{4}x(4x^3 + 4x - 6) - (-x^2 + \tfrac{9}{2}x - 2), \\ 4x^3 + 4x - 6 &= (-4x - 18)(-x^2 + \tfrac{9}{2}x - 2) - (-77x + 42), \\ -x^2 + \tfrac{9}{2}x - 2 &= (\tfrac{1}{77}x - \tfrac{87}{22.77})(-77x + 42) - (-\tfrac{19}{121}). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} f_3(x) &= -x^2 + \tfrac{9}{2}x - 2, \\ f_4(x) &= -77x + 42, \\ f_5(x) &= -\tfrac{19}{121}. \end{aligned}$$

Současně podle kap. 4 vidíme, že polynom f má pouze jednoduché kořeny.

Sestrojme nyní tabulku znamének polynomu ze Sturmova řetězce v intervalu $\langle 0, 3\rangle$ [v příkl. 6,2.2 jsme zjistili, že stačí pracovat dokonce s intervalem $(0; 2{,}825)$]; k výpočtu znamének hodnot v jednotlivých bodech můžeme využít také Hornerovo schéma:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$\sigma(x)$
0	+	−	−	+	−	3
1	−	+	+	−	−	2
2	+	+	+	−	−	1
3	+	+	+	−	−	1

Z tabulky vidíme, že polynom f má jeden jednoduchý kořen v intervalu $(0, 1)$ a jeden jednoduchý kořen v intervalu $(1, 2)$.

6,2.4. Aproximujme kořeny polynomu f z příkl. 6,2.2 s přesností na dvě desetinná místa, tj. tak, aby chyba byla menší než 10^{-2}.

<u>Řešení.</u> Platí $f'(x) = 4x^3 + 6x - 6$, $f''(x) = 12x^2 + 6$. Uvažujme nejprve interval $(0, 1)$. Protože $f'(0) < 0$, $f'(1) > 0$, nejsou splněny předpoklady pro použití metod z 6,1.14 a 6,1.15, neboť v intervalu $(0, 1)$ existuje bod ξ takový, že $f'(\xi) = 0$. Zmenšíme proto interval, na kterém pracujeme. Uvažujme např. interval $(0{,}3; 0{,}4)$. Hornerovým schématem zjistíme hodnoty polynomu f v krajních bodech tohoto intervalu:

	1	0	2	−6	2	
$t = 0{,}3$	0	0,3	0,09	0,627	−1,6119	
	1	0,3	2,09	−5,373	$\boxed{0{,}3881}$	$= f(0{,}3)$

	1	0	2	−6	2
$t = 0{,}4$	0	0,4	0,16	0,864	−2,0544
	1	0,4	2,16	−5,136	$\boxed{-0{,}0544} = f(0{,}4)$

Hledaný kořen α_1 tedy je v intervalu (0,3; 0,4). V tomto intervalu je $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$. Použijeme metodu sečen (odst. 6,1.15). Pak

$$c_1 = \frac{0{,}3.(-0{,}0544) - 0{,}4.0{,}3881}{-0{,}0544 - 0{,}3881} = 0{,}3877062.$$

platí $f(0{,}3877062) = -0{,}0030104$. Proto

$$c_2 = \frac{0{,}3877062.(-0{,}0544) - 0{,}4.(-0{,}0030104)}{-0{,}0544 + 0{,}0030104} \doteq 0{,}38698564.$$

Vidíme, že

$$\alpha_1 \in (0{,}3869;\ 0{,}3877).$$

Uvažujme nyní interval (1, 2). Pokusíme se nejprve zúžit interval, na němž pracujeme. Protože $f(1{,}2) = -0{,}2464, f(1{,}3) = 0{,}4361$, je hledaný kořen α_2 v intervalu (1,2; 1,3). Použijeme metodu půlení intervalu (odst. 6,1.13). Pak

$$c_3 = \frac{1{,}2 + 1{,}3}{2} = 1{,}25.$$

Protože $f(1{,}25) = 0{,}0664062$, je hledaný kořen v intervalu (1,2; 1,25). Dalším výpočtem zjistíme, že

$$\begin{aligned} c_4 &= 1{,}225 &&, f(c_4) < 0,\\ c_5 &= 1{,}2375 &&, f(c_5) < 0,\\ c_6 &= 1{,}24375 &&, f(c_6) > 0,\\ c_7 &= 1{,}240625., \end{aligned}$$

Vidíme, že

$$\alpha_2 \in (1{,}240625; 1{,}24375).$$

6,2.5. Metodou tečen (odst. 6,1.14) nalezněme reálné kořeny polynomu $f(x) = x^3 - 2$ s přesností na šest desetinných míst.

<u>Řešení.</u> Podle Descartesovy věty má polynom f jeden kladný kořen, neboť v posloupnosti $1, 0, 0, -2$ koeficientů polynomu f, resp. $-1, 0, 0, -2$ koeficientů polynomu g, $g(x) = f(-x)$ je jedna, resp. žádná znaménková změna. Protože $f(1{,}2) < 0, f(1{,}3) > 0$, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ pro $x \in (1{,}2; 1{,}3)$, je jediný reálný kořen polynomu f v intervalu $(1{,}2; 1{,}3)$. Podle odst. 6,1.14 postupně máme

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1{,}3, & f(c_1) &= 0{,}197, & f'(c_1) &= 5{,}07,\\
c_2 &= c_1 - \tfrac{f(c_1)}{f'(c_1)} = 1{,}261144, & f(c_2) &= 0{,}0058298, & f'(c_2) &= 4{,}771453,\\
c_3 &= c_2 - \tfrac{f(c_2)}{f'(c_2)} = 1{,}259922, & f(c_3) &= 0{,}0000048, & f'(c_3) &= 4{,}7622106,\\
c_4 &= c_3 - \tfrac{f(c_3)}{f'(c_3)} = 1{,}2599209; & & & &\\
d_1 &= 1{,}2, & f(d_1) &= -0{,}272 & &\\
d_2 &= d_1 - \tfrac{f(d_1)}{f'(c_1)} = 1{,}253649, & f(d_2) &= -0{,}0297203, & &\\
d_3 &= d_2 - \tfrac{f(d_2)}{f'(c_2)} = 1{,}259878, & f(d_3) &= -0{,}0002048, & &\\
d_4 &= d_3 - \tfrac{f(d_3)}{f'(c_3)} = 1{,}2599210. & & & &
\end{aligned}$$

Víme, že posloupnost $\{c_n\}$ je klesající, posloupnost $\{d_n\}$ rostoucí a $\alpha = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n$. Proto

$$\alpha \in (d_4, c_4) = (1{,}2599209;\ 1{,}2599210).$$

6,2.6. Určeme reálné kořeny polynomu $f(x) = x^4 - x - 1$ s přesností aspoň na tři desetinná místa.

Řešení. Podle Descartesovy věty má polynom f jeden kladný a jeden záporný kořen, neboť v posloupnosti $1, 0, 0, -1, -1$ koeficientů polynomu f i v posloupnosti $1, 0, 0, 1, -1$ koeficientů polynomu $g(x) = f(-x) = x^4 + x - 1$ je vždy jedna znaménková změna.

Nejširší odhad intervalu, v němž jsou oba kořeny, je podle 6,1.10 interval $\langle -2, 2\rangle$, neboť $A = 1$. Odhad horní, resp. dolní hranice podle vět z odst. 6,1.11 je:

	horní odhad (pracujeme s f)	dolní odhad (pracujeme s g)
Maclaurinova věta	$\lvert a_i\rvert = 1, a_0 = 1 \Rightarrow \alpha < 2$	$\lvert a_i\rvert = 1, a_0 = 1 \Rightarrow \alpha > -2$
Lagrangeova věta	$r = 3, B = 1 \Rightarrow \alpha < 2$	$r = 4, B = 1 \Rightarrow \alpha > -2$
Tillotova věta	$r = 3, s = 0, a_0 = 1 \Rightarrow \alpha < 2$	$r = 4, (s = 0 \vee s = 3)$, $a_0 = a_s = 1 \Rightarrow \alpha > -2$

Celkem dostáváme, že reálné kořeny polynomu f jsou v intervalu $\langle -2, 2\rangle$.

Kořeny budeme separovat pomocí Sturmova řetězce:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^4 - x - 1,\\
f_2(x) &= 4x^3 - 1.
\end{aligned}$$

Protože

$$\begin{aligned}
x^4 - x - 1 &= \tfrac{1}{4}x(4x^3 - 1) - (\tfrac{3}{4}x + 1),\\
4x^3 - 1 &= (\tfrac{16}{3}x^2 - \tfrac{64}{9}x + \tfrac{256}{27})(\tfrac{3}{4}x + 1) - \tfrac{283}{27},
\end{aligned}$$

je

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= \tfrac{3}{4}x + 1,\\
f_4(x) &= \tfrac{283}{27}.
\end{aligned}$$

Sestavíme tabulku znamének polynomů f_1, f_2, f_3, f_4:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$\sigma(x)$
-2	+	−	−	+	2
-1	+	−	+	+	2
0	−	−	+	+	1
1	−	+	+	+	1
2	+	+	+	+	0

Odtud vidíme, že záporný kořen je v intervalu $(-1, 0)$, kladný kořen v intervalu (1, 2). Pomocí Sturmovy věty ještě zúžíme intervaly, s nimiž budeme dále pracovat:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$\sigma(x)$
$-\frac{3}{4}$	+	−	+	+	2
$-\frac{1}{2}$	−	−	+	+	1
$\frac{5}{4}$	+	+	+	+	0

Srovnáním obou tabulek vidíme, že kořeny budeme hledat v intervalech $(-0{,}75; -0{,}5)$ a $(1; 1{,}25)$.

Pro další práci použijeme např. metodu tečen (odst. 6,1.14). Nejprve budeme aproximovat kladný kořen α_1 polynomu f. V intervalu $(1; 1{,}25)$ je $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, $f(1) < 0, f(1{,}25) > 0$, proto

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 1{,}25, & f(c_1) &= 0{,}1914, & f'(c_1) &= 6{,}8125,\\
c_2 &= c_1 - \tfrac{f(c_1)}{f'(c_1)} = 1{,}222, & f(c_2) &= 0{,}0078, & f'(c_2) &= 6{,}2992,\\
c_3 &= c_2 - \tfrac{f(c_2)}{f'(c_2)} = 1{,}2208, & f(c_3) &= 0{,}0004, & f'(c_3) &= 6{,}2777,\\
c_4 &= c_3 - \tfrac{f(c_3)}{f'(c_3)} = 1{,}2208; & & & &\\
d_1 &= 1, & f(d_1) &= -1 & &\\
d_2 &= d_1 - \tfrac{f(d_1)}{f'(c_1)} = 1{,}1469, & f(d_2) &= -0{,}4167, & &\\
d_3 &= d_2 - \tfrac{f(d_2)}{f'(c_2)} = 1{,}2131, & f(d_3) &= -0{,}0475, & &\\
d_4 &= d_3 - \tfrac{f(d_3)}{f'(c_3)} = 1{,}2207. & & & &
\end{aligned}
$$

Tedy

$$\alpha_1 \in (1{,}2207;\ 1{,}2208).$$

Nyní budeme aproximovat záporný kořen α_2 polynomu f. V intervalu $(-0{,}75; -0{,}5)$ je $f'(x) < 0, f''(x) > 0, f(-0{,}75) > 0, f(-0{,}5) < 0$, proto

$$\begin{array}{lll}
c_1 = -0,75, & f(c_1) = 0{,}0664, & f'(c_1) = -2{,}6875, \\
c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)}{f'(c_1)} = -0{,}7253, & f(c_2) = 0{,}002, & f'(c_2) = -2{,}5262, \\
c_3 = c_2 - \frac{f(c_2)}{f'(c_2)} = -0{,}724508, & f(c_3) = 0{,}000042, & f'(c_3) = -2{,}5212, \\
d_1 = -0{,}5, & f(d_1) = -0{,}04375, & \\
d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(c_1)} = -0{,}6628, & f(d_2) = -0{,}1442, & \\
d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(c_2)} = -0{,}7199, & f(d_3) = -0{,}0115, & \\
d_4 = d_3 - \frac{f(d_3)}{f'(c_3)} = -0{,}724518. & &
\end{array}$$

Tedy

$$\alpha_2 \in (-0{,}724518;\ -0{,}724508).$$

6,3. CVIČENÍ

6,3.1. Pomocí Descartesovy věty 6,1.2 odhadněte počet reálných kořenů polynomu $f \in \mathbf{R}[x]$, jestliže:

a) $f(x) = x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 5$;

b) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 4x - 1$;

c) $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x - 2$;

d) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 12x - 6$.

6,3.2. Podle vět z odst. 6,1.10, 6,1.11 odhadněte polohu reálných kořenů polynomu $f \in \mathbf{R}[x]$, jestliže:

a) $f(x) = 3x^6 - 6x^3 + 5x + 2$;

b) $f(x) = x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 7x + 1$.

6,3.3. Pomocí Sturmova řetězce separujte kořeny polynomu $f \in \mathbf{R}[x]$, jestliže:

a) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3$;

b) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 2x + 0,9$;

c) $f(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1$.

Ve cvič. 6,3.4 až 6,3.27 a) odhadněte počet reálných kořenů podle Descartesovy věty; b) odhadněte polohu kořenů podle odst. 6,1.10, 6,1.11; c) separujte kořeny pomocí Sturmova řetězce; d) určete reálné kořeny s přesností aspoň na tři desetinná místa.

6,3.4. $f(x) = x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 16x - 8$.

6,3.5. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

6,3.6. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x - 8.$

6,3.7. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x - 1.$

6,3.8. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 3.$

6,3.9. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 4x + 2.$

6,3.10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3.$

6,3.11. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 2.$

6,3.12. $f(x) = x^4 + x^2 - 1.$

6,3.13. $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1.$

6,3.14. $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1.$

6,3.15. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x - 5.$

6,3.16. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 4x + 4.$

6,3.17. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 1.$

6,3.18. $f(x) = 3x^4 + 12x^3 + 9x^2 - 1.$

6,3.19. $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 2.$

6,3.20. $f(x) = x^3 - 10x - 5.$

6,3.21. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 1.$

6,3.22. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 13x - 7.$

6,3.23. $f(x) = x^3 - 7x + 7.$

6,3.24. $f(x) = x^5 + 5x^4 + 10x^2 - 5x - 3.$

6,3.25. $f(x) = x^5 - 5x^3 - 10x^2 + 2.$

6,3.26. $f(x) = x^5 + 7x^3 - 3.$

6,3.27. $f(x) = 2x^5 - 10x^3 + 10x - 3.$

6.4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) 0; b) 2 (1 kladný, 1 záporný); c) 4 nebo 2 (1 kladný, 3 nebo 1 záporný); d) 4 nebo 2 (3 nebo 1 kladný, 1 záporný).
2. Odhady jsou uváděny v tomto pořadí: věta 6,1.10, Maclaurinova věta, Lagrangeova věta, Tillotova věta. a) $\langle -7, 7\rangle, \langle -2{,}7;\ 3\rangle, \langle -2{,}5;\ 2{,}82\rangle, \langle -1{,}91;\ 2{,}26\rangle$; b) $\langle -8, 8\rangle, \langle -6, 8\rangle, \langle -6;\ 3{,}65\rangle, \langle -6;\ 2{,}75\rangle$.
3. a) $(-6,-5), (-1,0), (0,1)$; b) $(-2,-1), (-1,0), (0,1), (3,4)$; c) $(-2,-1), (-1,0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1), (1,2), (2,3)$.
4. a) 1 kladný, 3 nebo 1 záporný; b) $\langle -17, 17\rangle, \langle -9, 17\rangle, \langle -9, 5\rangle, \langle -9, 5\rangle$; c) $(-5,-4), (-2,-1), (-1,0), (2,3)$; d) $\alpha_1 \in (-4{,}1463;\ -4{,}1462), \alpha_2 \in (-1{,}3179;\ -1{,}3178), \alpha_3 \in (-0{,}6822;\ -0{,}6821), \alpha_4 \in (2{,}1462;\ 2{,}1463)$.
5. a) 4 nebo 2 nebo kladný, 0 záporný; b) $\langle -10, 10\rangle, (0, 10\rangle, (0, 10\rangle, (0, 10\rangle$; c) $(0,\ 1), (2,\ 3)$; d) $\alpha_1 \in (0{,}1152;\ 0{,}1153), \alpha_2 \in (2{,}3082;\ 2{,}3083)$.
6. a) 3 nebo 1 kladný, 1 záporný; b) $\langle -13, 13\rangle, \langle -13, 9\rangle, \langle -4{,}464;\ 3{,}829\rangle, \langle -4{,}464;\ 3{,}829\rangle$; c) $(-4,-3), (1,2)$; d) $\alpha_1 \in (-3{,}2361;\ -3{,}2358), \alpha_2 \in (1{,}2360;\ 1{,}2361)$.
7. a) 1 kladný, 3 nebo 1 záporný; b) $\langle -5, 5\rangle, \langle -4, 5\rangle, \langle -4;\ 2{,}587\rangle, \langle -4;\ 2{,}154\rangle$; c) $(-3,-2), (-2,-1), (-1,0), (1,2)$; d) $\alpha_1 \in (-2{,}3556;\ -2{,}3555), \alpha_2 \in (-1{,}4773;\ -1{,}4772), \alpha_3 \in (-1{,}2624;\ -0{,}2623), \alpha_4 \in (1{,}0952;\ 1{,}0953)$.
8. a) 3 nebo 1 kladný, 1 záporný; b) $\langle -5, 5\rangle, \langle -5, 4\rangle, \langle -3;\ 2{,}733\rangle, \langle -3;\ 2{,}733\rangle$; c) $(-3,-2), (1,2)$; d) $\alpha_1 \in (-2{,}3028;\ -2{,}3027), \alpha_2 \in (1{,}3027;\ 1{,}3028)$.
9. a) 2 nebo 0 kladný, 2 nebo 0 záporný; b) $\langle -7, 7\rangle, \langle -7, 7\rangle, \langle -3{,}45;\ 3{,}45\rangle, \langle -3{,}45; 3{,}45\rangle$; c) $(-2, -\frac{3}{2}), (-\frac{3}{2}, -1), (0,1), (2,3)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}7492;\ -1{,}7491), \alpha_2 \in (-1{,}2714;\ -1{,}2713), \alpha_3 \in (0{,}3349;\ 0{,}3350), \alpha_4 \in (2{,}6855;\ 2{,}6857)$.
10. a) 4 nebo 2 nebo 0 kladný, 0 záporný; b) $\langle -9, 9\rangle, (0, 9\rangle, (0, 9\rangle, (0, 9\rangle$; c) $(0,1), (2,3)$; d) $\alpha_1 \in (0{,}5953;\ 0{,}5954), \alpha_2 \in (2{,}1841;\ 2{,}1842)$.
11. a) 1 kladný, 3 nebo 1 záporný; b) $\langle -4, 4\rangle, \langle -3, 3\rangle, \langle -3;\ 2{,}19\rangle, \langle -3;\ 1{,}817\rangle$; c) $(-2,-1), (0,1)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}4910;\ -1{,}4909), \alpha_2 \in (0{,}4909;\ 0{,}4910)$.
12. a) 1 kladný, 1 záporný (sudá funkce); b) $\langle -2, 2\rangle, \langle -2, 2\rangle, \langle -2, 2\rangle, \langle -2, 2\rangle$; c) $(-1,0), (0,1)$; d) $\alpha_1 \in (-0{,}7862;\ -0{,}7861), \alpha_2 \in (0{,}7861;\ 0{,}7862)$.
13. a) 3 nebo 1 kladný, 1 záporný; b) $\langle -9, 9\rangle, \langle -1{,}5;\ 5\rangle, \langle -2, 9\rangle, \langle -1{,}595;\ 5\rangle$; c) $(-1,0), (0,1), (1,2), (2,3)$; d) $\alpha_1 \in (-0{,}3066;\ -0{,}3065), \alpha_2 \in (0{,}4588;\ 0{,}4589), \alpha_3 \in (1{,}5411;\ 1{,}5412), \alpha_4 \in (2{,}3065;\ 2{,}3066)$.
14. a) 2 nebo 0 kladný, 2 nebo 0 záporný; b) $\langle -5, 5\rangle, \langle -5, 5\rangle, \langle -3, 5\rangle, \langle -3, 5\rangle$; c) $(-2,-1), (-1,0), (1;\ 1{,}5), (1{,}5;\ 2)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}9563;\ -1{,}9562), \alpha_2 \in (-0{,}2095;\ -0{,}2094), \alpha_3 \in (1{,}3382;\ 1{,}3383), \alpha_4 \in (1{,}8270;\ 1{,}8271)$.
15. a) 3 nebo 1 kladný, 1 záporný; b) $\langle -6, 6\rangle, \langle -6, 6\rangle, \langle -3{,}236;\ 6\rangle, \langle -3{,}5;\ 6\rangle$;

c) $(-2,-1),(2,3)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}6531;\ -1{,}6530), \alpha_2 \in (2{,}9730;\ 2{,}9731)$.

16. a) 2 nebo 0 kladný, 2 nebo 0 záporný; b) $\langle -7,7\rangle, \langle -7,7\rangle, \langle -3{,}4495;\ 7\rangle, \langle -4,7\rangle$; c) $(-2,-1),(-1,0),(1,2),(3,4)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}8269;\ -1{,}8268), \alpha_2 \in (-0{,}6002;\ -0{,}6001)$, $\alpha_3 \in (1{,}0947;\ 1{,}0948), \alpha_4 \in (3{,}3322;\ 3{,}3323)$.

17. a) 4 nebo 2 nebo 0 kladný, 0 záporný; b) $\langle -7,7\rangle, \langle 0,7\rangle, \langle 0,7\rangle, \langle 0,7\rangle$; c) $(0,1),(2,3)$; d) $\alpha_1 \in (0{,}1752;\ 0{,}1753), \alpha_2 \in (2{,}2232;\ 2{,}2233)$.

18. a) 1 kladný, 3 nebo 1 záporný; b) $\langle -13,13\rangle, \left\langle -5;\ 1{,}\overline{3}\right\rangle, \langle -13,2\rangle, \langle -5;\ 1{,}437\rangle$; c) $(-4,-3),(-1,-\frac{2}{3}),(-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}),(0,1)$; d) $\alpha_1 \in (-3{,}0182;\ -3{,}0181)$, $\alpha_2 \in (-0{,}7140;\ -0{,}7139), \alpha_3 \in (-0{,}5495;\ -0{,}5494), \alpha_4 \in (0{,}2815;\ 0{,}2816)$.

19. a) 2 nebo 0 kladný, 1 záporný; b) $\langle -4,4\rangle, \langle -3,4\rangle, \langle -2{,}41;\ 4\rangle, \langle -1{,}67;\ 4\rangle$; c) $(-1,0)$, $(0,1),(3,4)$; d) $\alpha_1 \in (-0{,}8609;\ -0{,}8608), \alpha_2 \in (0{,}7458;\ 0{,}7459), \alpha_3 \in (3{,}1149;\ 3{,}1150)$.

20. a) 1 kladný, 2 nebo 0 záporný; b) $\langle -11,11\rangle, \langle -11,11\rangle, \langle -4{,}1623;\ 4{,}1623\rangle$, $\langle -4{,}1623;\ 4{,}1623\rangle$; c) $(-3,-2),(-1,0),(3,4)$; d) $\alpha_1 \in (-2{,}8741;\ -2{,}8740)$, $\alpha_2 \in (-0{,}5136;\ -0{,}5135), \alpha_3 \in (3{,}3876;\ 3{,}3877)$.

21. a) 2 nebo 0 kladný, 1 záporný; b) $\langle -5,5\rangle, \langle -5,5\rangle, \langle -3,5\rangle, \left\langle -2{,}\overline{3};\ 5\right\rangle$; c) $(-2,-1),(0,1),(3,4)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}1661;\ -1{,}1660), \alpha_2 \in (0{,}2171;\ 0{,}2172)$, $\alpha_3 \in (3{,}9488;\ 3{,}9489)$.

22. a) 1 kladný, 2 nebo 0 záporný; b) $\langle -14,14\rangle, \langle -14,14\rangle, \langle -4{,}61;\ 14\rangle, \langle -5{,}34;\ 14\rangle$; c) $(-2,-1),(-1,0),(5,6)$; d) $\alpha_1 \in (-1{,}9012;\ -1{,}9011), \alpha_2 \in (-0{,}6619;\ -0{,}6618)$, $\alpha_3 \in (5{,}5630;\ 5{,}5631)$.

23. a) 2 nebo 0 kladný, 1 záporný; b) $\langle -8,8\rangle, \langle -8,8\rangle, \langle -3{,}65;\ 3{,}65\rangle, \langle -3{,}65;\ 3{,}65\rangle$; c) $(-4,-3),(1,\frac{3}{2}),(\frac{3}{2},2)$; d) $\alpha_1 \in (-3{,}0490;\ -3{,}9089), \alpha_2 \in (1{,}3568;\ 1{,}3569)$, $\alpha_3 \in (1{,}6920;\ 1{,}6921)$.

24. a) 1 kladný, 2 nebo 0 záporný; b) $\langle -11,11\rangle, \langle -11,6\rangle, \langle -6;\ 2{,}5\rangle, \langle -11;\ 1{,}5\rangle$; c) $(-6,-5),(-1,0),(0,1)$; d) $\alpha_1 \in (-5{,}3748;\ -5{,}3747), \alpha_2 \in (-0{,}3466;\ -0{,}3465)$, $\alpha_3 \in (0{,}7132;\ 0{,}7133)$.

25. a) 2 nebo 0 kladný, 3 nebo 1 záporný; b) $\langle -11,11\rangle, \langle -6,11\rangle, \langle -3{,}24;\ 4{,}17\rangle$, $\langle -3{,}24;\ 4{,}17\rangle$; c) $(-1,0),(0,1),(2,3)$; d) $\alpha_1 \in (-0{,}5142;\ -0{,}5141), \alpha_2 \in (0{,}4086;\ 0{,}4087), \alpha_3 \in (2{,}8936;\ 2{,}8937)$.

26. a) 1 kladný, 0 záporný; b) $\langle -8,8\rangle, \langle 0,4\rangle, \langle 0;\ 2{,}25\rangle, \langle 0;\ 1{,}76\rangle$; c) $(0,1)$; d) $\alpha_1 \in (0{,}7354;\ 0{,}7355)$.

27. a) 3 nebo 1 kladný, 2 nebo 0 záporný;
b) $\langle -11,11\rangle, \langle -6,6\rangle, \langle -4{,}16;\ 4{,}16\rangle, \langle -3{,}24;\ 3{,}24\rangle$;
c) $(-2,-\frac{3}{2}),(-\frac{3}{2},-1),(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1),(1,2)$;
d) $\alpha_1 \in (-1{,}7705;\ -1{,}7704), \alpha_2 \in (-1{,}4319;\ -1{,}4318), \alpha_3 \in (0{,}3376;\ 0{,}3377), \alpha_4 \in (0{,}8855;\ 0{,}8856), \alpha_5 \in (1{,}9791;\ 1{,}9792)$.

7. Polynomy více neurčitých, symetrické polynomy

7,1. ZÁKLADNÍ POJMY

7,1.1. Definice polynomu dvou proměnných. Nechť $(I, +, \cdot)$ je obor integrity. Označme $I[x_1] = I_1$ obor integrity polynomů jedné neurčité x_1 nad I. Nad I_1 opět sestrojíme obor integrity polynomů jedné neurčité, označme ji x_2, tj. strukturu $I_1[x_2] = (I[x_1])[x_2]$. Libovolný prvek z $I_1[x_2]$ je posloupnost

$$(f_0(x_1), f_1(x_1), \dots, f_n(x_1), 0, 0, 0, \dots),$$

tj.

$$f_0(x_1) + f_1(x_1)x_2 + f_2(x_1)x_2^2 + \dots + f_n(x_1)x_2^n. \tag{1}$$

Protože $f_i(x_1) \in I[x_1]$, lze psát

$$\begin{aligned}
f_0(x_1) &= a_{00} + a_{10}x_1 + a_{20}x_1^2 + \dots + a_{k_0 0}x_1^{k_0}, \\
f_1(x_1) &= a_{01} + a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + \dots + a_{k_1 0}x_1^{k_1}, \\
&\vdots \\
f_n(x_1) &= a_{0n} + a_{1n}x_1 + a_{2n}x_1^2 + \dots + a_{k_n 0}x_1^{k_n}.
\end{aligned}$$

Označíme $m = \max\{k_0, k_1, \dots, k_n\}$ a doplníme zápis polynomů $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, členy s koeficientem 0; dostaneme

$$f_i(x_1) = a_{0i} + a_{1i}x_1 + a_{2i}x_1^2 + \dots + a_{mi}x_1^m.$$

Protože I_1 je obor integrity a $x_1^0 = x_2^0 = 1$, můžeme (1) po úpravách přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
&a_{00}x_1^0x_2^0 + a_{10}x_1x_2^0 + \dots + a_{m0}x_1^mx_2^0 + a_{01}x_1^0x_2 + a_{11}x_1x_2 + \dots + a_{m1}x_1^mx_2 + \\
&+ \dots + a_{0n}x_1^0x_2^n + a_{1n}x_1x_2^n + \dots + a_{mn}x_1^mx_2^n.
\end{aligned}$$

Lze ukázat, že $(I[x_1])[x_2] = (I[x_2])[x_1]$. Proto můžeme hovořit o *oboru integrity polynomů dvou neurčitých x_1, x_2 nad oborem intergity I*. Budeme ho značit $I[x_1, x_2]$. Libovolný prvek z $I[x_1, x_2]$ lze zapsat ve tvaru

$$f(x_1, x_2) = \sum_{(i,j)} a_{ij}x_1^ix_2^j, a_{ij} \in I,$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané dvojice $(i, j) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$, přičemž pouze konečný počet prvků a_{ij} je různých od noluvého prvku 0.

7,1.2. Definice polynomu n neurčitých. Obdobně jako $I[x_1, x_2]$ můžeme vytvořit *obor integrity polynomů n neurčitých nad oborem integrity I.* Budeme ho značit $I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Jeho prvky jsou tvaru

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, a_{k_1 k_2 \ldots k_n} \in I, \tag{2}$$

kde se sčítá přes všechny uspořádané n-tice $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, přičemž pouze konečně mnoho z prvků $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ je různých od nulového prvku 0.
Poznámka. Pro neurčité lze použít i jiné značení, např. $y_1, y_2, \ldots, x, y, z$ atd.

7,1.3. Definice. Libovolný sčítanec $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ z (2) nazýváme *členem polynomu* $f \in I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Prvky $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ nazýváme *koeficienty polynomu f*. Je-li $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ člen s nenulovým koeficientem, nazýváme číslo $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ *stupněm* tohoto *členu*. Pro členy s nulovým koeficientem není stupeň definován.

7,1.4. Definice. Řekneme, že polynom (2) je zapsán v *normálním tvaru*, jestliže pro libovolné jeho různé členy

$$a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, a_{m_1 m_2 \ldots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n}$$

s nenulovými koeficienty jsou i uspořádané n-tice $(k_1, k_2, \ldots, k_n), (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ různé.

7,1.5. Definice. *Stupněm nenulového polynomu f* zapsaného v normálním tvaru nazýváme největší ze stupňů jeho členů.

7,1.6. Definice. Nechť $a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ je člen polynomu $f \in I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ zapsaného v normálním tvaru. Uspořádanou n-tici celých nezáporných čísel $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ nazveme *výškou* tohoto *členu*.

7,1.7. Uspořádání výšek. Pro libovolné dvě výšky $(k_1, k_2, \ldots, k_n), (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ definujeme

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) < (m_1, m_2, \ldots, m_n),$$

jestliže v posloupnosti $m_1 - k_1, m_2 - k_2, \ldots, m_n - k_n$ je první nenulové číslo kladné.
Poznámka. Snadno se ukáže, že relace $<$ má všechny vlastnosti uspořádání.

7,1.8. Definice. *Vedoucím členem* nenulového polynomu $f \in I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ nazýváme člen, který má v uspořádání výšek definovaném v odst. 7,1.7 největší výšku. Jeho výšku nazýváme *výškou polynomu f*.

7,1.9. Označení. Označme S_n grupu permutací čísel $1, 2, \ldots, n$ s operací skládání permutací definovanou takto:

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ j_{i_1}, & j_{i_2}, & \ldots, & j_{i_n} \end{pmatrix}$$

Nechť

$$f \in I[x_1, x_2, \ldots, x_n], \pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_n \end{pmatrix} \in S_n.$$

Provedením permutace π na polynom f nazýváme vytvoření polynomu $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$, který vznikne z polynomu f provedením permutace π na indexy jeho neurčitých. Polynom $f(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n})$ značíme také $\pi[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$.

7,1.10. Věta. *Pro libovolné polynomy $f, g \in I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ platí:*

$$\begin{aligned} \pi[f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + g(x_1, x_2, \ldots, x_n)] &= \pi[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] + \pi[g(x_1, x_2, \ldots, x_n)], \\ \pi[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n)] &= \pi[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)]\, \pi[g(x_1, x_2, \ldots, x_n)]. \end{aligned}$$

7,1.11. Definice. Polynom $f \in I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ se nazývá *symetrický polynom*, jestliže pro libovolnou permutaci $\pi \in S_n$ platí:

$$\pi[f(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Množinu všech symetrických polynomů n neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad oborem integrity I značíme $I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. $I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je podobor integrity oboru integrity $I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

7,1.12. Definice. Symetrický polynom f se nazývá *jednoduchý symetrický polynom*, jestliže každý jeho člen lze vytvořit provedením vhodné permutace z S_n na libovolný předem zvolený člen.

7,1.13. Věta. *Každý nenulový symetrický polynom z $I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je součtem konečně mnoha jednoduchých symetrických polynomů z $I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.*

7,1.14. Věta. *Každý nenulový symetrický polynom zapsaný v normálním tvaru má jediný vedoucí člen a pro jeho výšku $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ platí*

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n.$$

7,1.15. Označení. Nechť $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, $a \in I$, je vedoucí člen jednoduchého symetrického polynomu $f \in I_S[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Potom budeme psát

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}.$$

7,1.16. Definice. Nechť je dáno přirozené číslo $n > 0$. Polynomy

$$\begin{aligned}\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum\nolimits^{(n)} x_1,\\ \sigma_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum\nolimits^{(n)} x_1x_2,\\ &\vdots\\ \sigma_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum\nolimits^{(n)} x_1x_2\dots x_n\end{aligned}$$

z $I_S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ se nazývají *elementární symetrické polynomy* (v $I[x_1, x_2, \dots, x_n]$).

7,1.17. Označení. V dalším textu budeme používat také toto značení:

$$s_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^k.$$

7,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

7,2.1. Zapišme polynom

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^2x_3 - 3x_1^2 + 2x_2x_3^2 - \tfrac{1}{3}x_1^2x_2^2x_3 + \tfrac{4}{5}x_2x_3^2 - 6x_1x_2 \in \mathrm{Q}[x_1, x_2, x_3]$$

v normálním tvaru. Určeme jeho stupeň.

Řešení. Sloučíme členy se stejnými výškami. Zřejmě platí

$$f(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{2}{3}x_1^2x_2^2x_3 - 3x_1^2 + \tfrac{14}{5}x_2x_3^2 - 6x_1x_2.$$

To je zápis polynomu f v normálním tvaru. Stupně jednotlivých členů jsou postupně

$$5\ (= 2+2+1), 2\ (= 2+0+0), 3\ (0+1+2), 2\ (= 1+1+0).$$

Stupeň polynomu f je tedy 5.

7,2.2. Zapišme polynom f dvou neurčitých v normálním tvaru, jestliže:
a) $f(x, y) = (x^3 - y^3)^2(x^2 + y^2)^3 + (x^3 + y^3)^2(x^2 - y^2)^3$;
b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3(x^3 - y^3)^2 - (x^2 - y^2)^3(x^3 + y^3)^2$.

Řešení. Roznásobíme všechny závorky a sloučíme členy se stejnou výškou. Při výpočtu lze využít i distributivní zákon a vhodně vytýkat.

a)

$$\begin{aligned}
&(x^6 - 2x^3y^3 + y^6)(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6) + \\
&+ (x^6 + 2x^3y^3 + y^6)(x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6) = \\
&= (x^{12} + 3x^{10}y^2 + 3x^8y^4 + x^6y^6) + (-2x^9y^3 - 6x^7y^5 - 6x^5y^7 - 2x^3y^9) + \\
&+ (x^6y^6 + 3x^4y^8 + 3x^2y^{10} + y^{12}) + (x^{12} - 3x^{10}y^2 + 3x^8y^4 - x^6y^6) + \\
&+ (2x^9y^3 - 6x^7y^5 + 6x^5y^7 - 2x^3y^9) + (x^6y^6 - 3x^4y^8 + 3x^2y^{10} - y^{12}) = \\
&= (1+1)x^{12} + (3-3)x^{10}y^2 + (-2+2)x^9y^3 + (3+3)x^8y^4 + (-6-6)x^7y^5 + \\
&+ (1+1-1+1)x^6y^6 + (-6+6)x^5y^7 + (3-3)x^4y^8 + (-2-2)x^3y^9 + \\
&+ (3+3)x^2y^{10} + (1-1)y^{12} = \\
&= 2x^{12} + 6x^8y^4 - 12x^7y^5 + 2x^6y^6 - 4x^3y^9 + 6x^2y^{10}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&(x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6)(x^6 - 2x^3y^3 + y^6) + \\
&+ (x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6)(x^6 + 2x^3y^3 + y^6) = \\
&= (x^6 + 3x^2y^4)(x^6 - 2x^3y^3 + y^3) + (3x^4y^2 + y^6)(x^6 - 2x^3y^3 + y^6) - \\
&- [(x^6 + 3x^2y^4)(x^6 + 2x^3y^3 + y^3) + (3x^4y^2 + y^6)(x^6 + 2x^3y^3 + y^6)] = \\
&= (x^6 + 3x^2y^4)(x^6 - 2x^3y^3 + y^3 - x^6 - 2x^3y^3 - y^6) + \\
&+ (3x^4y^2 + y^6)(x^6 - 2x^3y^3 + y^6 + x^6 + 2x^3y^3 + y^6) = \\
&= (x^6 + 3x^2y^4)(-4x^3y^3) + (3x^4y^2 + y^6)(2x^6 + 2y^6) = \\
&= -4x^9y^3 - 12x^5y^7 + 6x^{10}y^2 + 6x^4y^6 + 2x^6y^6 + 2y^{12} = \\
&= 6x^{10}y^2 - 4x^9y^3 + 2x^6y^6 - 12x^5y^7 + 6x^4y^6 + 2y^{12}.
\end{aligned}$$

7,2.3. Zapišme polynom f tří neurčitých v normálním tvaru, jestliže:
a) $f(x, y, z) = (x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$;
b) $f(x, y, z) = [(x + y + z)(x + y - z) - (x - y + z)(x - y - z)]^2$.

Řešení. Roznásobíme závorky, sloučíme členy podle výšek a vytkneme.

a)

$$\begin{aligned}
&(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2 = \\
&= [(x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2] - [x^2 - 2x(y + z) + (y + z)^2] = \\
&= (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) - (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz) = \\
&= (x^2 - x^2) + (y^2 - y^2) + (z^2 - z^2) + (2xy + 2xy) + (2xz + 2xz) + (2yz - 2yz) = \\
&= 4xy + 4xz;
\end{aligned}$$

Jiný postup:

$$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2=$$
$$=[x+y+z+(x-y-z)][x+y+z-(x-y-z)]=$$
$$=2x.2(y+z)=4xy+4xz.$$

b)

$$[(x+y+z)(x+y-z)-(x-y+z)(x-y-z)]^2=$$
$$=\{[(x+y)^2-z^2]-[(x-y)^2-z^2]\}^2=$$
$$=[(x^2+y^2-z^2+2xy)-(x^2+y^2-z^2-2xy)]^2=$$
$$=(4xy)^2=16x^2y^2.$$

7,2.4. Určeme výšky jednotlivých členů s nenulovými koeficienty polynomu f z příkl. 7,2.1. Uspořádejme tyto výšky podle 7,1.7 a určeme vedoucí člen a výšku polynomu f.

Řešení. Výšky jednotlivých členů jsou postupně

$$(2,2,1),(2,0,0),(0,1,2),(1,1,0).$$

Uspořádejme je podle 7,1.7:

$$\begin{array}{lcll}(2,2,1) & > & (2,0,0) & \text{(posloupnost rozdílů je } 0,2,1),\\ (2,0,0) & > & (1,1,0) & \text{(posloupnost rozdílů je } 1,-1,0),\\ (1,1,0) & > & (0,1,2) & \text{(posloupnost rozdílů je } 1,0,-2).\end{array}$$

Celkem tedy dostáváme

$$(2,2,1)>(2,0,0)>(1,1,0)>(0,1,2).$$

Vedoucí člen polynomu f je $\frac{2}{3}x_1^2x_2^2x_3$, jeho výška je $(2,2,1)$.

7,2.5. Je dán polynom

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3\in \mathbb{Z}[x_1,x_2,x_3].$$

Určeme polynom g, který vznikne provedením permutace $\pi=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ 2, & 3, & 1\end{pmatrix}\in S_3$ na polynom f.

Řešení.

$$\begin{aligned}g(x_1,x_2,x_3) &= \pi[x_1^2x_2+x_2x_3^2+x_1x_2^2x_3]=\\ &= x_2^2x_3+x_1^2x_3+x_1x_2x_3^2.\end{aligned}$$

7,2.6. Rozhodněme, zda polynom

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + x_1^2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$$

je symetrický. V kladném případě ho zapišme pomocí jednoduchých symetrických polynomů.

Řešení. Grupa S_3 má šest prvků:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3 \end{pmatrix}, \pi_5 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix}, \pi_6 = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix}$$

Zřejmě platí

$$\pi_1[f(x_1, x_2, x_3)] = f(x_1, x_2, x_3).$$

Dále

$$\pi_2[f(x_1, x_2, x_3)] = x_1x_3 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3).$$

Analogicky se ukáže, že

$$\pi_3[f(x_1, x_2, x_3)] = \pi_4[f(x_1, x_2, x_3)] = \pi_5[f(x_1, x_2, x_3)] = \pi_6[f(x_1, x_2, x_3)] = f(x_1, x_2, x_3).$$

Polynom f je tedy symetrický. Přitom platí

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2x_3 = \\ &= \sum\nolimits^{(3)} x_1x_2 + \sum\nolimits^{(3)} x_1^2 + \sum\nolimits^{(3)} x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

7,2.7. Je dán polynom

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2^3x_3^3 + 2x_1x_2 + x_1^3x_2^3x_3 + 5x_1^2x_2^2x_3^2 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3].$$

Zjistěme, zda je symetrický. V záporném případě doplňte další sčítance tak, aby nově vzniklý polynom g byl symetrický.

Řešení. Polynom f není symetrický, protože např. pro $\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 1, & 3, & 2 \end{pmatrix} \in S_3$ je

$$\pi[f(x_1, x_2, x_3)] = x_1^2x_2^3x_3^3 + 2x_1x_3 + x_1^3x_2x_3^3 + 5x_1^2x_2^2x_3^2 \neq f(x_1, x_2, x_3).$$

Jestliže doplníme sčítance

$$x_1^3x_2^2x_3^3, x_1^3x_2^3x_3^2, 2x_1x_3, 2x_2x_3, x_1x_2^3x_3^3, x_1^3x_2x_3^3,$$

dostaneme polynom

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum\nolimits^{(3)} x_1^3 x_2^3 x_3^2 + \sum\nolimits^{(3)} x_1^3 x_2^3 x_3 + 2\sum\nolimits^{(3)} x_1 x_2 + 5\sum\nolimits^{(3)} x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

který je zřejmě symetrický.

7,2.8. Určeme počet členů jednoduchého symetrického polynomu $\sum^{(4)} x_1x_2$ a napišme všechny jeho členy.

Řešení. Grupa S_4 má $4! = 24$ prvků. Nejprve zjistíme, kolik permutací

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ i_1, & i_2, & i_3, & i_4 \end{pmatrix}$$

z S_4 převádí polynom $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ sám v sebe. Zřejmě musí být (i_1, i_2) některé z pořadí čísel 1, 2, jinak by permutace π převedla f ve člen, který by obsahoval jinou neurčitou než x_1, x_2 v první mocnině. Analogicky musí být (i_3, i_4) některé z pořadí čísel 3, 4. Takových permutací je $2!2!$. Tedy počet členů daného polynomu je roven

$$\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6.$$

Zřejmě platí

$$\sum\nolimits^{(4)} x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

7,2.9. Určeme počet členů jednoduchého symetrického polynomu $\sum^{(n)} x_1^3x_2x_3$ pro $n = 3, n = 4, n = 5$. Zapišme tento polynom v normálním tvaru.

Řešení. a) $n = 3, \sum^{(3)} x_1^3x_2x_3$:

Počet členů je

$$\frac{3!}{1!2!} = 3,$$

neboť dvě mocniny mají stejný exponent (dva nerozlišitelné prvky). Platí

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2x_3 = x_1^3x_2x_3 + x_1x_2^3x_3 + x_1x_2x_3^3.$$

b) $n = 4, \sum^{(4)} x_1^3x_2x_3$:

Počet členů je dán vzorcem pro permutace ze čtyř prvků s opakováním. Výška vedoucího členu je $(3, 1, 1, 0)$. Dva exponenty nelze rozlišovat, proto je počet členů dán číslem

$$\frac{4!}{1!2!1!} = 12.$$

Platí

$$\begin{aligned}\sum\nolimits^{(4)} x_1^3x_2x_3 &= x_1^3x_2x_3 + x_1^3x_2x_4 + x_1^3x_3x_4 + x_1x_2^3x_3 + x_1x_2^3x_4 + x_1x_2x_3^3 + \\ &+ x_1x_2x_4^3 + x_2^3x_3x_4 + x_2x_3^3x_4 + x_2x_3x_4^3.\end{aligned}$$

c) $n = 5, \sum^{(5)} x_1^3 x_2 x_3$:
Počet členů je

$$\frac{5!}{1!2!2!} = \frac{120}{4} = 30.$$

Výška vedoucího členu je totiž $(3, 1, 1, 0, 0)$, proto nelze při provádění permutace rozlišovat dvě neurčité v první a dvě neurčité v nulté mocnině. Doporučujeme čtenáři, aby si pro kontrolu vypsal všechny členy daného polynomu.

7,2.10. Určeme výšky členů symetrického polynomu

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 x_3^2 + x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1 x_3^3 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_3^3 x_2 + x_2^3 x_3 \in$$

$$\in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3].$$

Určeme výšku a stupeň tohoto polynomu. Zapišme polynom f jako součet jednoduchých symetrických polynomů a určeme jejich vedoucí členy.

Řešení. Výšky zapíšeme v pořadí členů, jak jsou uvedeny v předpisu polynomu f: (1, 2, 2), (1, 3, 0), (2, 2, 1), (1, 0, 3), (2, 1, 2), (3, 1, 0), (3, 0, 1), (0, 1, 3), (0, 3, 1). Největší výška členu, tedy i výška polynomu f, je (3, 1, 0). Vedoucí člen polynomu f je $x_1^3 x_2$.

Stupně členů jsou $5\ (= 1 + 2 + 2), 4\ (= 1 + 3 + 0), 5\ (= 2 + 2 + 1), 4\ (= 1 + 0 + 3), 5\ (= 2 + 1 + 2), 4\ (= 3 + 1 + 0), 4\ (= 3 + 0 + 1), 4\ (= 0 + 1 + 3), 4\ (= 0 + 3 + 1)$. Stupeň polynomu f je tedy 5. Polynom f můžeme zapsat ve tvaru

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^3 x_2 + \sum^{(3)} x_1^2 x_2^2 x_3.$$

V zápisu jednoduchých symetrických polynomů jsou uvedeny jejich vedoucí členy.

7,2.11. K danému polynomu

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^3 x_2 + 3x_2 + x_1 x_2 x_3 \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$$

doplňme co nejmenší počet členů tak, aby vznikl symetrický polynom $g \in \mathbb{Z}_5[x_1, x_2, x_3]$. Určeme počet členů polynomu g, výšku jeho vedoucího členu a jeho stupeň. Zapišme jako součet jednoduchých symetrických polynomů.

Řešení. Polynom f není symetrický, protože např. permutace π_2 (viz příkl. 7,2.6) nezachová f:

$$\pi_2[f(x_1, x_2, x_3)] = 5x_1^3 x_3 + 3x_3 + x_1 x_2 x_3 \neq f(x_1, x_2, x_3).$$

Má-li g být symetrický, musí se členem $5x_1^3 x_2$ obsahovat také členy

$$5x_1^3 x_3, 5x_2^3 x_3, 5x_1 x_2^3, 5x_1 x_3^3, 5x_2 x_3^3.$$

Podobně se členem $3x_2$ musí obsahovat i členy $3x_1, 3x_3$. Člen $x_1x_2x_3$ je zachován každou permutací z S_3, a proto již není třeba další členy k f doplňovat. Hledaný symetrický polynom g má tvar

$$g(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^3x_2 + 5x_1^3x_3 + 5x_1x_2^3 + 5x_1x_3^3 + 5x_2^3x_3 + 5x_2x_3^3 + 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_1x_2x_3.$$

Polynom g má tedy celkem 10 sčítanců.

Polynom g můžeme zapsat jako součet jednoduchých symetrických polynomů:

$$g(x_1,x_2,x_3) = 5\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2 + 3\sum\nolimits^{(3)} x_1 + \sum\nolimits^{(3)} x_1x_2x_3.$$

Vedoucí člen polynomu g je $5x_1^3x_2$, jeho výška je $(3,1,0)$ a stupeň 4.

7,3. CVIČENÍ

7,3.1. Dokažte, že platí tyto rovnosti:
a) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
b) $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$;
c) $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$;
d) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
e) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;
f) $(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$;
g) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$;
h) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$;
i) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

7,3.2. Dokažte platnost následujících vztahů ($a, b, c, d, x, y, z, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ označují neurčité):
a) $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$;
b) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$;
c) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} x_ix_j$;
d) $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x^2y + xy^2 + xz^2 + x^2z + y^2z + yz^2) + 6xyz$;
e) $(a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 +$
$+3(a^2b + a^2c + a^2d + b^2c + b^2d + c^2d + ab^2 + ac^2 + ad^2 + bc^2 + bd^2 + cd^2) +$
$+6(abc + abd + acd + bcd)$;
f) $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + 3\sum\limits_{1\le i\ne j\le n} x_i^2x_j + 6\sum\limits_{1\le i<j<k\le n} x_ix_jx_k$.

7,3.3. Dokažte platnost následujících vztahů (x, y označují neurčité, $n \in \mathbb{N}$):
a) $x^4 - y^4 = (x-y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3)$;

b) $x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y)(x^n + x^{n-1}y + \ldots + xy^{n-1} + y^n)$;
c) $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$;
d) $x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \ldots - xy^{2n-1} + y^{2n})$.

7,3.4. Zapište v normálním tvaru polynomy:
a) $(x-y)^3 + (x+y)^3$;
b) $(x+y)^3 - (x-y)^3$;
c) $(x-y)^3(x+y)^3$;
d) $(x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$;
e) $(x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$;
f) $(x^2 - y^2)(x^3 + y^3)$;
g) $(x-y)^2(x^2+y^2) - (x+y)^2(x^2-y^2)$;
h) $[(x+y)^3 - (x-y)^3]^2$;
i) $[(x+y)^2 + (x-y)^2]^3$;
j) $(x^2 - y^2)(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)(x^3 - y^3)$.

7,3.5. Zjistěte, zda polynom f je zapsán v normálním tvaru; v záporném případě ho zapište v normálním tvaru:
a) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 - 6x_1^2x_2x_3 + 5x_1x_2^2 - 2x_3$;
b) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_2x_3 - 3x_4^2 + 3x_1^2x_2x_3 - x_1^2x_3^2 + 4x_4^2$;
c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4 + 2x_1^2x_4 + 5x_1x_3x_4^2 - 5x_4x_1^2 + 2x_1x_3^2x_4 - 8x_1x_3x_4^2$;
d) $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 5x_1x_2 + 6x_3x_1 - 8x_1x_2x_3$;
e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3x_1x_2^2x_3^3x_4^4x_5^5 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_1x_4 + 5x_1x_5 - 6x_1^2x_2x_5$.

7,3.6. Pro polynomy ze cvič. 7,3.5 určete stupně jednotlivých členů a stupeň polynomu.

7,3.7. Pro polynomy ze cvič. 7,3.5 určete výšky jednotlivých členů, uspořádejte je a určete výšku a vedoucí člen polynomu.

7,3.8. Pro polynom f určete polynom g, který vznikne provedením permutace $\pi \in S_n$ na polynom f, jestliže:
a) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2x_3 + x_1^3x_3 + 2x_1x_2 + 4x_3, \pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 3, & 1, & 2 \end{pmatrix}$;
b) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3^2 - 2x_2x_3x_4 + \frac{3}{2}x_1^3x_2^2x_4 + 5x_3^2x_4^2, \pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 4, & 2, & 1 \end{pmatrix}$;
c) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, \pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 1, & 2, & 4 \end{pmatrix}$;
d) $n = 6, f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 3x_1x_2^2x_5 + x_1x_2x_4x_6 - 3x_1^3x_3 + 4x_1^2x_3^2x_6^2$,

$$\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \\ 2, & 3, & 6, & 1, & 5, & 4 \end{pmatrix}.$$

7,3.9. Je dán polynom $f \in \mathbf{Z}[x, y, z]$. Určete, jaký nejmenší počet členů a které konkrétně musíte přidat k f, aby nově utvořený polynom g byl symetrický polynom třech neurčitých nad $\mathbf{Z}$, a zapište nově utvořený polynom g pomocí jednoduchých symetrických polynomů (položte $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), jestliže:

a) $f(x, y, z) = 2x^2y + 3yz$;
b) $f(x, y, z) = 2xyz + x^2$;
c) $f(x, y, z) = x^3y^2z + x^2yz^3$;
d) $f(x, y, z) = 2xyz^2 + 3x^2y^2 - 5x^3$;
e) $f(x, y, z) = 5xyz$;
f) $f(x, y, z) = 3x^3y^3 + 2z^3$;
g) $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2$.

7,3.10. Rozhodněte, zda polynom $h \in \mathbf{Z}[x, y, z]$ je symetrický. V záporném případě uveďte, které členy je třeba doplnit, aby vzniklý polynom již symetrický byl. Symetrické polynomy vyjádřete jako součet jednoduchých symetrických polynomů v neurčitých x, y, z:

a) $h(x, y, z) = x + 2y + z$;
b) $h(x, y, z) = xy + xz - xyz + yz$;
c) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + xyz$;
d) $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$;
e) $h(x, y, z) = x + xy + xyz$;
f) $h(x, y, z) = x^3 - x^2y^2z^2 + y^3 + xyz + z^3$;
g) $h(x, y, z) = (y + z)^3 + 3(x + y)xy + x^2(x + 3z) + 3xz^2$;
h) $h(x, y, z) = (x + y)^3 + (x + z)^3 + (y + z)^3$.

7,3.11. Rozhodněte, zda polynom $f \in \mathbf{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je symetrický. V kladném případě zapište polynom f jako součet jednoduchých symetrických polynomů.

a) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2 + 3x_1x_3^2$;
b) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + x_1^3 + x_2^3 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$;
c) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3x_2x_3 + 3x_1x_2 + x_1^3x_2x_4 + x_2^3x_3x_4 + x_1x_3^3x_4 + 3x_1x_3 + 3x_1x_4 +$
$+ 3x_2x_3 + 3x_2x_4 + x_1x_2x_4^3 + 3x_3x_4$;
d) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4 + 2x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4^2 + 2x_1^2x_2x_3^2x_4 + 2x_1^2x_2x_3x_4^2$;
e) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4 - x_1x_3x_4 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_2x_3x_4$;
f) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2)$.

7,3.12. Polynomy ze cvič. 7,3.11, které nejsou symetrické, doplňte vhodnými členy tak, aby výsledné polynomy byly symetrické. Nově vzniklé polynomy zapište jako součet jednoduchých symetrických polynomů.

7,3.13. Zapište v normálním tvaru jednoduché symetrické polynomy a určete počet jejich členů:

a) $\sum^{(3)} x_1^2x_2^2$; b) $\sum^{(3)} x_1^3x_2$;
c) $\sum^{(3)} x_1^3$; d) $\sum^{(3)} x_1x_2x_3$;
e) $\sum^{(4)} x_1x_2$; f) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^2$;
g) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3$; h) $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2$.

7,3.14. Určete počet členů jednoduchého polynomu bez jeho zápisu v normálním tvaru:

a) $\sum^{(3)} x_1^3x_2^3$; b) $\sum^{(3)} x_1^3x_2x_3$;
c) $\sum^{(3)} x_1^4x_2^2$; d) $\sum^{(3)} x_1$;
e) $\sum^{(3)} x_1^2x_2^2x_3^2$; f) $\sum^{(3)} x_1^4x_2^2x_3$;
g) $\sum^{(4)} x_1^2x_2$; h) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^3$;
i) $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3$; j) $\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3x_4$;
k) $\sum^{(4)} x_1$; l) $\sum^{(4)} x_1x_2x_3x_4$;
m) $\sum^{(5)} x_1^2x_2^2$; n) $\sum^{(5)} x_1^3x_2x_3$;
o) $\sum^{(5)} x_1x_2x_3$; p) $\sum^{(5)} x_1^2x_2$;
q) $\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2$; r) $\sum^{(5)} x_1^4x_2^3x_3^2x_4$.

7,3.15. Určete počet členů a vypište všechny členy jednoduchého symetrického polynomu:

a) $\sum^{(3)} x_1x_2$; b) $\sum^{(3)} x_1^3x_2$;
c) $\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$; d) $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$;
e) $\sum^{(4)} x_1x_2x_3$; f) $\sum^{(4)} x_1^2$;
g) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3$.

7,3.16. Určete počet členů jednoduchého symetrického polynomu v n neurčitých, který obsahuje člen:

a) $x_1x_2^2x_4, n = 4$; b) $x_1x_2^3x_4, n = 5$;
c) $2x_1x_2x_3, n = 3$; d) $2x_1x_2x_3, n = 6$;
e) $x_1^2x_2^2x_3x_4x_5, n = 5$; f) $x_1^2x_2^2x_3x_4x_5, n = 7$.

7,3.17. Pro symetrické polynomy ze cvič. 7,3.11, 7,3.12 určete výšky všech členů, tyto výšky uspořádejte a určete výšku a stupeň polynomu.

7,3.18. Odhadněte počet členů součinu dvou jednoduchých symetrických polynomů a určete výšku vedoucího členu a všechny výšky menší:

a) $(\sum^{(3)} x_1^3)(\sum^{(3)} x_1x_2)$;
b) $(\sum^{(3)} x_1^2x_2)(\sum^{(3)} x_1)$;
c) $(\sum^{(3)} x_1^2x_2)(\sum^{(3)} x_1x_2x_3)$;

d) $(\sum^{(3)} x_1^3x_2)(\sum^{(3)} x_1^2x_2)$;
e) $(\sum^{(4)} x_1^2)(\sum^{(4)} x_1^2)$;
f) $(\sum^{(4)} x_1^2x_2)(\sum^{(4)} x_1^3x_2)$;
g) $(\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3)(\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3)$;
h) $(\sum^{(4)} x_1^2x_2^2)(\sum^{(4)} x_1x_2)$;
i) $(\sum^{(5)} x_1x_2)(\sum^{(5)} x_1^2)$;
j) $(\sum^{(5)} x_1^2x_2)(\sum^{(5)} x_1^3x_2^2)$;
k) $(\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3)(\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3^2x_4^2)$;
l) $(\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3)(\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4)$.

7,3.19. Rozhodněte, zda polynom f n neurčitých je elementární symetrický polynom, jestliže:
a) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$;
b) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^2x_2$;
c) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$;
d) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum^{(4)} x_1x_2$;
e) $n = 3, f(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1x_2x_3$;
f) $n = 4, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum^{(4)} x_1x_2x_3$;
g) $n = 6, f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \sum^{(6)} x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6$;
h) $n = 6, f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \sum^{(6)} x_1x_2x_3x_4x_5$;
i) $n = 7, f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = \sum^{(7)} x_1x_2x_3x_4x_5$.

7,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

4. a) $2x^3 + 6xy^2$; b) $6x^2y + 2y^3$; c) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6 = (x^2 - y^2)^3$; d) $x^6 - y^6$; e) $x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5$; f) $x^5 - x^3y^2 + x^2y^3 - y^5$; g) $2y^4 + 2y^2x^2 - 4yx^3$; h) $4y^6 + 24x^2y^4 + 36x^4y^2$; i) $[2(x^2 + y^2)]^3 = 8x^6 + 24x^4y^2 + 24x^2y^4 + 8y^6$; j) $-2x^3y^2 + 2x^2y^3$.
5. a) Ano; b) ne, $4x_1^2x_2x_3 + x_4^2 - x_1^2x_3^2$; c) ne, $x_1x_2x_3x_4 - 3x_1^2x_4 - 3x_1x_3x_4^2 + 2x_1x_3^2x_4$; d) ne, $-2x_1x_2 + 10x_1x_3 - 8x_1x_2x_3$; e) ano.
6. Stupně členů jsou uvedeny v pořadí, v němž se tyto členy vyskytují v zápisu polynomu f v normálním tvaru. a) 2, 4, 3, 1, st(f)=4; b) 4, 2, 4, st(f)=4; c) 4, 3, 4, 4, st(f)=4; d) 2, 2, 3, st(f)=3; e) 15, 2, 2, 2, 2, 4, st(f)=15.
7. a) $(2,1,1) > (1,2,0) > (1,1,0) > (0,0,1), (2,1,1), -6x_1^2x_2x_3$;
b) $(2,1,1,0) > (2,0,2,0) > (0,0,0,2), (2,1,1,0), 4x_1^2x_2x_3$;
c) $(2,0,0,1) > (1,1,1,1) > (1,0,2,1) > (1,0,1,2), (2,0,0,1), -3x_1^2x_4$;
d) $(1,1,1) > (1,1,0) > (1,0,1), (1,1,1), -8x_1x_2x_3$;
e) $(2,1,0,0,1) > (1,2,3,4,5) > (1,1,0,0,0) > (1,0,1,0,0) > (1,0,0,1,0) > (1,0,0,0,1)$,

$(2,1,0,0,1), -6x_1^2x_2x_5$.

8. a) $x_1x_2x_3^2 + x_2x_3^3 + 2x_1x_3 + 4x_2$; b) $x_2^2x_3 - 2x_1x_2x_4 + \frac{3}{2}x_1x_3^3x_4^2 + 5x_1^2x_2^2$; c) $\pi[f] = f$;
d) $3x_2x_3^2x_5 + x_1x_2x_3x_4 - 3x_2^3x_6 + 4x_2^2x_4^2x_6^2$.

9. a) $2x^2z, 2y^2z, 2y^2x, 2yz^2, 2xz^2, 3xz, 3xy$, tj. 7 členů, $f(x,y,z) = 2\sum^{(3)} x^2y + 3\sum^{(3)} xy$;
b) y^2, z^2, tj. 2 členy, $f(x,y,z) = \sum^{(3)} x^2 + 2\sum^{(3)} xyz$;
c) $x^3yz^2, xy^2z^3, x^2y^3z, xy^3z^2$, tj. 4 členy, $f(x,y,z) = \sum^{(3)} x^3y^2z$;
d) $2xy^2z, 2x^2yz, 3x^2z^2, 3y^2z^2, -5y^3, -5z^3$, tj. 6 členů, $f(x,y,z) = 2\sum^{(3)} x^2yz + 3\sum^{(3)} x^2y^2 - 5\sum^{(3)} x^3$;
e) polynom je symetrický, $f(x,y,z) = 5\sum^{(3)} xyz$;
f) $3x^3z^3, 3y^3z^3, 2x^3, 2y^3$, tj. 4 členy, $f(x,y,z) = 3\sum^{(3)} x^3y^3 + 2\sum^{(3)} x^3$;
g) $z^2, -xz, -yz$, tj. 3 členy, $f(x,y,z) = \sum^{(3)} x^2 - \sum^{(3)} xy$.

10. a) Ne, chybí členy x, z; b) ano, $h(x,y,z) = \sum^{(3)} xy - \sum^{(3)} xyz$; c) ne, chybí člen z^2;
d) ne, chybí členy $z^2, x; y$; e) ne, chybí členy y, z, xz, yz; f) ano,
$h(x,y,z) = \sum^{(3)} x^3 - \sum^{(3)} x^2y^2z^2 + \sum^{(3)} xyz$; g) ano, $h(x,y,z) = \sum^{(3)} x^3 + 3\sum^{(3)} x^2y$;
h) ano, $h(x,y,z) = 2\sum^{(3)} x^3 + 3\sum^{(3)} x^2y$.

11. a) Ne; b) ano, $f(x_1,x_2,x_3) = 2\sum^{(3)} x_1x_2 + \sum^{(3)} x_1^3$; c) ne; d) ne; e) ano;
$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum^{(4)} x_1x_2x_3x_4 - \sum^{(4)} x_1x_2x_3$; f) ano, $f(x_1,x_2,x_3) = \sum^{(3)} x_1^3x_2^2 + 2\sum^{(3)} x_1^3x_2x_3 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2^2x_3$.

12. a) $3x_1^2x_3, 3x_1x_2^2, 3x_2^2x_3, 3x_2x_3^2, 3x_1x_3, 3x_2x_3, \sum^{(3)} x_1x_2x_3 + 3\sum^{(3)} x_1^2x_2 + 3\sum^{(3)} x_1x_2$;
c) $x_1^3x_3x_4, x_1x_2^3x_3, x_1x_2^3x_4, x_1x_2x_3^3, x_2x_3^3x_4, x_1x_3x_4^3, x_2x_3x_4^3, \sum^{(4)} x_1^3x_2x_3 + 3\sum^{(4)} x_1x_2$;
d) $2x_1^2x_2x_3x_4^2$,
$2x_1x_2^2x_3^2x_4, 2x_1x_2^2x_3x_4^2, x_1x_2^2x_3^2x_4^2, x_1^2x_2^2x_3x_4^2, x_1^2x_2^2x_3^2x_4, \sum^{(4)} x_1x_2x_3x_4 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4 + \sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4$.

13. a) $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$; b) $x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$; c) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$;
d) $x_1x_2x_3$; e) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$;
f) $x_1^3x_2^2 + x_1^3x_3^2 + x_1^3x_4^2 + x_1^2x_2^3 + x_1^2x_3^3 + x_1^2x_4^3 + x_2^3x_3^2 + x_2^3x_4^2 + x_2^2x_3^3 + x_2^2x_4^3 + x_3^3x_4^2 + x_3^2x_4^3$;
g) $x_1^3x_2^2x_3 + x_1^3x_2^2x_4 + x_1^3x_2x_3^2 + x_1^3x_2x_4^2 + x_1^3x_3^2x_4 + x_1^3x_3x_4^2 + x_1^2x_2^3x_3 + x_1^2x_2^3x_4 + x_1^2x_2x_3^3 + x_1^2x_2x_4^3 + x_1^2x_3^3x_4 + x_1^2x_3x_4^3 + x_1x_2^3x_3^2 + x_1x_2^3x_4^2 + x_1x_2^2x_3^3 + x_1x_2^2x_4^3 + x_1x_3^3x_4^2 + x_1x_3^2x_4^3 + x_2^3x_3^2x_4 + x_2^3x_3x_4^2 + x_2^2x_3^3x_4 + x_2^2x_3x_4^3 + x_2x_3^3x_4^2 + x_2x_3^2x_4^3$;
h) $x_1^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2$.

14. a) $\frac{3!}{2!1!} = 3$; b) $\frac{3!}{1!2!} = 3$; c) $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$; d) $\frac{3!}{1!2!} = 3$; e) $\frac{3!}{3!} = 1$; f) $\frac{3!}{1!1!1!} = 6$; g) $\frac{4!}{1!1!2!} = 12$;
h) $\frac{4!}{2!2!} = 6$; i) $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$; j) $\frac{4!}{1!3!} = 4$; k) $\frac{4!}{1!3!} = 4$; l) $\frac{4!}{4!} = 1$; m) $\frac{5!}{2!3!} = 10$; n) $\frac{5!}{1!2!2!} = 30$;
o) $\frac{5!}{3!2!} = 10$; p) $\frac{5!}{1!1!3!} = 20$; q) $\frac{5!}{4!1!} = 5$; r) $\frac{5!}{1!1!1!1!1!} = 120$.

15. a) $\frac{3!}{2!1!} = 3, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$; b) $\frac{3!}{1!1!1!} = 6, x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2^3x_3 + x_2x_3^3$;
c) $\frac{3!}{1!2!} = 3, x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$;
d) $\frac{4!}{2!2!} = 6, x_1^2x_2^2x_3x_4 + x_1^2x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_2x_3x_4^2 + x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_1x_2^2x_3x_4^2 + x_1x_2x_3^2x_4^2$;
e) $\frac{4!}{3!1!} = 4, x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$; f) $\frac{4!}{1!3!} = 4, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$;
g) $\frac{5!}{4!1!} = 5, x_1^3x_2^3x_3^3x_4^3 + x_1^3x_2^3x_3^3x_5^3 + x_1^3x_2^3x_4^3x_5^3 + x_1^3x_3^3x_4^3x_5^3 + x_2^3x_3^3x_4^3x_5^3$.

16. a) $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$; b) $\frac{5!}{2!1!2!} = 30$; c) $\frac{3!}{3!} = 1$; d) $\frac{6!}{3!3!} = 20$; e) $\frac{5!}{2!3!} = 10$; f) $\frac{7!}{2!3!2!} = 210$.
17. a) $(2,1,0) > (2,0,1) > (1,2,0) > (1,1,1) > (1,1,0) > (1,0,2) > (1,0,1) > (0,2,1) > (0,1,2) > (0,1,1), (2,1,0), 3$;
b) $(3,0,0) > (1,1,0) > (1,0,1) > (0,3,0) > (0,1,1) > (0,0,3), (3,0,0), 3$;
c) $(3,1,1,0) > (3,1,0,1) > (3,0,1,1) > (1,3,1,0) > (1,3,0,1) > (1,1,3,0) > (1,1,0,3) > (1,1,0,0,) > (1,0,3,1) > (1,0,1,3) > (1,0,1,0) > (1,0,0,1) > (0,3,1,1) > (0,1,3,1) > (0,1,1,3) > (0,1,1,0) > (0,1,0,1) > (0,0,1,1), (3,1,1,0), 5$;
d) $(2,2,2,1) > (2,2,1,2) > (2,2,1,1) > (2,1,2,2) > (2,1,2,1) > (2,1,1,2) > (1,2,2,2) > (1,2,2,1) > (1,2,1,2) > (1,1,2,2) > (1,1,1,1), (2,2,2,1), 7$;
e) $(1,1,1,1) > (1,1,1,0) > (1,1,0,1) > (1,0,1,1) > (0,1,1,1), (1,1,1,1), 4$;
f) $(3,2,0) > (3,1,1) > (3,0,2) > (2,3,0) > (2,2,1) > (2,1,2) > (2,0,3) > (1,3,1) > (1,2,2) > (1,1,3) > (0,3,2) > (0,2,3), (3,2,0), 5$.
18. Výsledky jsou zapsány ve tvaru $r \times s = t$, kde r je počet členů prvního činitele, s počet členů druhého činitele a t horní odhad počtu členů součinu; pak následují výšky jednotlivých sčítanců součinu. a) $3 \times 3 = 9, (4,1,0), (3,1,1)$;
b) $6 \times 3 = 18, (3,1,0), (2,2,0), (2,1,1)$; c) $6 \times 1 = 6, (3,2,1)$;
d) $6 \times 6 = 36, (5,2,0), (5,1,1), (4,3,0), (4,2,1), (3,3,1), (3,2,2)$;
e) $4 \times 4 = 16, (4,0,0,0), (2,2,0,0)$; f) $12 \times 12 = 144, (5,2,0,0), (5,1,1,0), (4,3,0,0), (4,2,1,0), (3,3,1,0), (3,2,2,0), (3,2,1,1)$;
g) $12 \times 24 = 288, (6,3,2,0), (6,3,1,1), (6,2,2,1), (5,4,2,0), (5,4,1,1), (5,3,2,1), (4,4,3,0), (4,4,2,1), (4,3,3,1), (3,3,3,2)$;
h) $6 \times 6 = 36, (3,3,0,0), (3,2,1,0), (2,2,1,1)$; i) $10 \times 5 = 50, (3,1,0,0,0), (2,1,1,0,0)$;
j) $20 \times 20 = 400, (5,3,0,0,0), (5,2,1,0,0), (4,4,0,0,0), (4,3,1,0,0), (4,2,2,0,0), (3,3,2,0,0), (3,2,2,1,0)$; k) $60 \times 30 = 1800, (6,5,3,2,0), (6,5,2,2,1), (6,4,4,2,0), (6,4,3,3,0), (6,4,3,2,1), (6,4,2,2,2), (6,3,3,2,2), (5,4,3,2,2), (5,3,3,3,2), (4,4,3,3,2)$;
l) $30 \times 30 = 900, (5,5,2,1,0), (5,5,1,1,1), (5,4,3,1,0), (5,4,2,2,0), (5,4,2,1,1), (5,3,3,1,1), (5,3,2,2,1), (4,4,3,2,0), (4,4,2,2,1), (4,3,3,2,1), (4,3,2,2,2)$.
19. a) Ano, $\sigma_2(x_1,x_2,x_3)$; b) ne; c) ne; d) ano, $\sigma_2(x_1,x_2,x_3,x_4)$; e) ano, $\sigma_3(x_1,x_2,x_3)$; f) ano, $\sigma_3(x_1,x_2,x_3,x_4)$; g) ne; h) ano, $\sigma_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$;
i) ano, $\sigma_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$.

8 Součin jednoduchých symetrických polynomů

8,1. ZÁKLADNÍ POJMY

8,1.1. Věta. *Nechť*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}, \; g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$$

jsou dva jednoduché symetrické polynomy nad oborem integrity I. Nechť $r = \mathrm{st}(f)$, $s = \mathrm{st}(g)$. Potom pro symetrický polynom fg platí:

$$\mathrm{st}(fg) = r + s,$$

fg má vedoucí člen

$$x_1^{r_1+s_1} x_2^{r_2+s_2} \ldots x_n^{r_n+s_n}.$$

8,1.2. Věta. *Nechť*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_n^{r_n}, \; g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$$

jsou dva jednoduché symetrické polynomy nad oborem integrity I a nechť $r = \mathrm{st}(f)$, $s = \mathrm{st}(g)$. Potom součin fg lze vyjádřit ve tvaru lineární kombinace

$$\sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} a_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \left(\sum\nolimits^{(n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \right)$$

jednoduchých symetrických polynomů s výškami vedoucích členů $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, pro které platí:

(1) $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = r + s$,

(2) $(\forall j \in \mathrm{N}, 1 \leq j \leq n) \; r_1 + s_1 \geq k_j \geq r_n + s_n$,

(3) $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$.

Přitom koeficienty $a_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}$ u těchto jednoduchých symetrických polynomů jsou celočíselné a představují právě počet všech různých možností, kterými lze člen $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ získat jako součin jednoho členu polynomu f a jednoho členu polynomu g.

8,1.3. Poznámka. Je-li obor integrity I nekonečný, lze využít fakt, že $I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je izomorfní s $I\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Koeficienty $a_{(k_1, k_2, \ldots, k_n)}$ lineární kombinace lze určit ze soustav lineárních rovnic, které získáme vhodným dosazením prvků z I za $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

8,1.4. Věta. *Buďte $l_1, l_2, \dots, l_n$ nezáporná celá čísla a $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ elementární symetrické polynomy v n neurčitých $x_1, x_2, \dots, x_n$. Potom vedoucí člen součinu*

$$\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\dots\sigma_n^{l_n}$$

je

$$x_1^{l_1+l_2+\dots+l_n}x_2^{l_2+\dots+l_n}\dots x_{n-1}^{l_{n-1}+l_n}x_n^{l_n}$$

a všechny členy součinu mají stupeň

$$nl_n+(n-1)l_{n-1}+\dots+2l_2+l_1.$$

8,1.5. Věta. *Buďte $l_1, l_2, \dots, l_n$ nezáporná celá čísla, $k \in \mathbb{N}$ a $s_1, s_2, \dots, s_n$ součty k-tých mocnin v neurčitých $x_1, x_2, \dots, x_n$ nad oborem integrity I (viz kap. 7). Potom vedoucí člen součinu*

$$s_1^{l_1}s_2^{l_2}\dots s_k^{l_k}$$

je

$$x_1^{l_1+2l_2+\dots+kl_k}$$

a všechny členy součinu mají stupeň

$$l_1+2l_2+\dots+kl_k.$$

8,1.6. Poznámka. Součin libovolných dvou symetrických polynomů $f, g \in I_S[x_1, x_2, \dots, x_n]$ získáme takto: Každý z polynomů f, g zapíšeme jako součet jednoduchých symetrických polynomů a pomocí distributivního zákona tyto součty spolu roznásobíme. Tak získáme součin fg ve tvaru součtu součinů jednoduchých symetrických polynomů. Jednotlivé součiny jednoduchých symetrických polynomů roznásobíme podle věty 8,1.2 a dosadíme do součtu. Takto získaný součet nakonec zapíšeme v normálním tvaru.

8,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

8,2.1. Pro jednoduché symetrické polynomy

$$f(x_1,x_2,x_3)=\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2^2x_3^2,\quad g(x_1,x_2,x_3)=\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2$$

určeme výšku vedoucího členu součinu fg, počet členů f, g, odhadněme shora počet sčítanců součinu fg. Vyjádřeme fg jako součet jednoduchých symetrických polynomů.

Řešení. Podle věty 8,1.1 má součin fg vedoucí člen $x_1^6x_2^3x_3^2$. Stupeň součinu fg je tedy $6+3+2=11$. Podle věty 8,1.2 můžeme v součinu získat pouze členy s těmito výškami:

$$(6,3,2),(5,4,2),(5,3,3),(4,4,3).$$

První činit l součinu má 3 členy, druhý činitel 6 členů. V součinu tedy získáme nejvýše 18 různých sčítanců.

Podle věty 8,1.2 lze psát:

$$(fg)(x_1,x_2,x_3) = A\sum^{(3)} x_1^6x_2^3x_3^2 + B\sum^{(3)} x_1^5x_2^4x_3^2 + C\sum^{(3)} x_1^5x_2^3x_3^3 + D\sum^{(3)} x_1^4x_2^4x_3^3.$$

Člen s výškou $(6,3,2)$ lze získat pouze jako součin členů s výškami $(3,2,2)$ a $(3,1,0)$. Jiná možnost není. Proto

$$A = 1.$$

Člen s výškou $(5,4,2)$ můžeme získat pouze tak, že x_1 vezmeme jednou s exponentem 2 a jednou s exponentem 3. Protože x_2 má být ve čtvrté mocnině, nutně musíme vzít x_2 jednou s exponentem 3 a jednou s exponentem 1. Existuje tedy jediná možnost, a to součin členů s výškami $(2,3,2)$ a $(3,1,0)$. Proto

$$B = 1.$$

Člen s výškou $(5,3,3)$ můžeme již získat dvěma různými způsoby: Buď jakou součin členů s výškami $(2,3,2),(3,0,1)$, nebo $(2,2,3),(3,1,0)$. Proto

$$C = 2.$$

Konečně člen s výškou $(4,4,3)$ v součinu získat nelze; z daných členů zřejmě nelze v součinu získat dvě neurčité ve čtvrté mocnině současně. Proto

$$D = 0.$$

Pla'í tedy

$$(fg)(x_1,x_2,x_3) = \sum^{(3)} x_1^6x_2^3x_3^2 + \sum^{(3)} x_1^5x_2^4x_3^2 + 2\sum^{(3)} x_1^5x_2^3x_3^3.$$

Jiný způsob řešení vychází z možnosti vhodného dosazení za x_1, x_2, x_3 a řešení soustavy rovnic:

$$\left(\sum^{(3)} x_1^3x_2^2x_3^2\right)\left(\sum^{(3)} x_1^3x_2\right) =$$
$$= \sum^{(3)} x_1^6x_2^3x_3^2 + A\sum^{(3)} x_1^5x_2^4x_3^2 + B\sum^{(3)} x_1^5x_2^3x_3^3 + C\sum^{(3)} x_1^4x_2^4x_3^3.$$

Jednoduchou úvahou můžeme opět vyloučit možnost získání členu $x_1^4x_2^4x_3$ v součinu daných polynomů f,g. Proto $C = 0$ a stačí určit pouze A, B. Využijeme-li toho, že se na polynomy f,g můžeme dívat také jako na funkce tří proměnných nad Z, musí uvedený vztah platit pro všechna možná dosazení celých čísel x_1, x_2, x_3.

Dosaďme např. $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Potom platí:

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{(3)} 1^3 1^2 1^2 = 1^3 1^2 1^2 + 1^2 1^3 1^2 + 1^2 1^2 1^3 = 3 = f(1,1,1),\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^3 1^1 \quad = 1^3 1^1 + 1^3 1^1 + 1^1 1^3 + 1^1 1^3 + 1^3 1^1 + 1^1 1^3 = 6 = g(1,1,1),\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^6 1^3 1^2 = 1^6 1^3 1^2 + 1^6 1^2 1^3 + 1^3 1^6 1^2 + 1^3 1^2 1^6 + 1^2 1^3 1^6 + 1^2 1^6 1^3 = 6,\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^5 1^4 1^2 = 6,\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^5 1^3 1^3 = 3.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne

$$
\begin{aligned}
3.6 = 18 &= 6 + 6A + 3B,\\
12 &= 6A + 3B,\\
4 &= 2A + B.
\end{aligned}
$$

Dosadíme-li např. $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$, dostaneme:

$$
\begin{aligned}
&\sum\nolimits^{(3)} 1^3 1^2 (-1)^2 = 1^3 1^2 (-1)^2 + 1^2 1^3 (-1)^2 + 1^2 1^2 (-1)^3 = 1 = f(1,1,-1),\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^3 1^1 \quad = 1^3 1^1 + 1^3(-1)^1 + 1^1 1^3 + 1^1(-1)^3 + 1^3(-1)1 + 1^1(-1)^3 =\\
&\qquad = -2 = g(1,1,-1),\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^6 1^3 (-1)^2 = 1^6 1^3 (-1)^2 + 1^6 1^2 (-1)^3 + 1^3 1^6 (-1)^2 + 1^3 1^2 (-1)^6 +\\
&\qquad + 1^2 1^3 (-1)^6 + 1^2 1^6 (-1)^3 = 2,\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^5 1^4 (-1)^2 = 2,\\
&\sum\nolimits^{(3)} 1^5 1^3 (-1)^3 = -3.
\end{aligned}
$$

Odtud plyne

$$
\begin{aligned}
1.(-2) = -2 &= 2 + 2A + (-3)B,\\
-4 &= 2A - 3B.
\end{aligned}
$$

Řešením soustavy

$$
\begin{aligned}
4 &= 2A + B,\\
-4 &= 2A - 3B
\end{aligned}
$$

dostáváme

$$B = 2, A = 1.$$

Proto platí

$$(fg)(x_1, x_2, x_3) = \sum\nolimits^{(3)} x_1^6 x_2^3 x_3^2 + \sum\nolimits^{(3)} x_1^5 x_2^4 x_3^2 + 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^5 x_2^3 x_3^3.$$

8,2.2. Vyjádřeme součin $\sigma_1\sigma_2^2$ elementárních symetrických polynomů jako součet jednoduchých symetrických polynomů a) pro tři neurčité; b) pro čtyři neurčité.

Řešení. a) Výška vedoucího členu součinu je $(3,2,0)$. V úvahu přicházejí tyto výšky členů se stupněm 5:

$$(3,2,0) > (3,1,1) > (2,2,1).$$

Vedoucí člen s výškou $(3,2,0)$ lze vytvořit pouze jako součin vedoucích členů jednotlivých činitelů. Proto v součinu bude jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(3)} x_1^3 x_2$ obsažen právě jednou.

Vedoucí člen s výškou $(3,1,1)$ lze získat celkem dvěma různými způsoby. Z prvního činitele musíme vybrat vždy člen x_1 a pak buď z druhého činitele x_1x_2 a z třetího x_1x_3, nebo z druhého činitele x_1x_3 a z třetího x_1x_2. Proto jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(3)} x_1^3 x_2 x_3$ získáme v součinu dvakrát.

Konečně vedoucí člen s výškou $(2,2,1)$ můžeme získat pěti způsoby (možnosti zachytíme přehledně v tabulce):

$x_1^2x_2^2x_3$	σ_1	σ_2	σ_2
1.	x_1	x_1x_2	x_2x_3
2.	x_1	x_2x_3	x_1x_2
3.	x_2	x_1x_2	x_1x_3
4.	x_2	x_1x_3	x_1x_2
5.	x_3	x_1x_2	x_1x_2

Proto pro $n = 3$ platí

$$(\sigma_1\sigma_2^2)(x_1,x_2,x_3) = \sum^{(3)} x_1^3x_2^2 + 2\sum^{(3)} x_1^3x_2x_3 + 5\sum^{(3)} x_1^2x_2^2x_3.$$

b) Výška vedoucího členu součinu je $(3,2,0,0)$. V úvahu přicházejí tyto výšky členů se stupněm 5:

$$(3,2,0,0) > (3,1,1,0) > (2,2,1,0) > (2,1,1,1).$$

Podobně jako v a) získáme v součinu jednoduchý symetrický polynom s výškou $(3,2,0,0)$ jediným způsobem, s výškou $(3,1,1,0)$ dvěma způsoby a s výškou $(2,2,1,0)$ pěti způsoby.

Kromě toho je třeba ještě zjistit, kolika způsoby lze v součinu získat člen s výškou $(2,1,1,1)$. Možnosti opět zachytíme přehledně v tabulce:

$x_1^2x_2x_3x_4$	σ_1	σ_2	σ_2
1.	x_1	x_1x_2	x_3x_4
2.	x_1	x_1x_3	x_2x_4
3.	x_1	x_1x_4	x_2x_3
4.	x_1	x_2x_3	x_1x_4
5.	x_1	x_2x_4	x_1x_3
6.	x_1	x_3x_4	x_1x_2
7.	x_2	x_1x_3	x_1x_4
8.	x_2	x_1x_4	x_1x_3
9.	x_3	x_1x_2	x_1x_4
10.	x_3	x_1x_4	x_1x_2
11.	x_4	x_1x_2	x_1x_3
12.	x_4	x_1x_3	x_1x_2

Proto jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3x_4$ lze získat celkem dvanácti různými způsoby.

Proto pro $n = 4$ platí

$$(\sigma_1\sigma_2^2)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum^{(4)} x_1^3x_2^2 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3 + 5\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3 + 12\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3x_4.$$

8,2.3. Vypočtěme součin s_4s_2 (viz kap. 7) pro tři neurčité.

Řešení. Jde o zvláštní případ součinu jednoduchých symetrických polynomů:

$$(s_4s_2)(x_1, x_2, x_3) = \left(\sum^{(3)} x_1^4\right)\left(\sum^{(3)} x_1^2\right)$$

Podle věty 8,1.2 platí:

$$\begin{aligned}(s_4s_2)(x_1, x_2, x_3) &= \sum^{(3)} x_1^6 + A\sum^{(3)} x_1^5x_2 + B\sum^{(3)} x_1^4x_2^2 + C\sum^{(3)} x_1^4x_2x_3 + \\ &+ D\sum^{(3)} x_1^3x_2^3 + E\sum^{(3)} x_1^3x_2^2x_3 + F\sum^{(3)} x_1^2x_2^2x_3^2.\end{aligned}$$

Přitom je však zřejmé, že v součinu můžeme získat pouze ty členy, jejichž některá mocnina je aspoň 4. Proto je

$$D = 0, E = 0, F = 0.$$

Zbývá tedy určit pouze koeficienty A, B, C. Zřejmě však $A = 0$, $C = 0$, neboť nelze vytvořit člen s neurčitou v první mocnině. Dále $B = 1$, neboť tento člen lze vytvořit pouze tak, že v prvním činiteli vezmeme x_1^4 a ve druhém x_2^2. Celkem tedy

$$(s_4s_2)(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^6 + \sum^{(3)} x_1^4x_2^2.$$

8,3. CVIČENÍ

8,3.1. Vyjádřete jako součet jednoduchých symetrických polynomů součiny:

a) $(\sum^{(3)} x_1^3)(\sum^{(3)} x_1x_2)$;
b) $(\sum^{(3)} x_1^2x_2)(\sum^{(3)} x_1)$;
c) $(\sum^{(3)} x_1^2x_2)(\sum^{(3)} x_1x_2x_3)$;
d) $(\sum^{(3)} x_1^3x_2)(\sum^{(3)} x_1^2x_2)$;
e) $(\sum^{(4)} x_1^2)(\sum^{(4)} x_1^2)$;
f) $(\sum^{(4)} x_1^2x_2)(\sum^{(4)} x_1^3x_2)$;
g) $(\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3)(\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3)$;
h) $(\sum^{(4)} x_1^2x_2^2)(\sum^{(4)} x_1x_2)$;
i) $(\sum^{(5)} x_1x_2)(\sum^{(5)} x_1^2)$;
j) $(\sum^{(5)} x_1^2x_2)(\sum^{(5)} x_1^3x_2^2)$;
k) $(\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3)(\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3^2x_4^2)$;
l) $(\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3)(\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4)$.

8,3.2. Vyjádřete jako součet jednoduchých symetrických polynomů n neurčitých součiny:

a) $s_1s_1, n = 3$;	b) $s_2s_2, n = 3$;
c) $s_3s_3, n = 3$;	d) $s_2s_3, n = 4$;
e) $s_1s_2, n = 3$;	f) $s_1s_3, n = 4$;
g) $s_1s_2s_3, n = 5$;	h) $s_1^2s_2, n = 3$;
i) $s_2^3, n = 4$;	j) $s_1s_2^2, n = 5$;
k) $s_1s_3^2, n = 4$;	l) $s_2^2s_1^2, n = 5$;
m) $s_2^2s_3, n = 5$;	n) $s_2s_3^2, n = 5$;
o) $s_1^5, n = 3$;	p) $s_3^3, n = 4$.

8,3.3. Vyjádřete jako součet jednoduchých symetrických polynomů n neurčitých součiny:

a) $\sigma_1^2, n = 3$;	b) $\sigma_2^2, n = 3$;
c) $\sigma_3^2, n = 4$;	d) $\sigma_1\sigma_2, n = 3$;
e) $\sigma_2\sigma_3, n = 4$;	f) $\sigma_1\sigma_3, n = 4$;
g) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3, n = 5$;	h) $\sigma_1^2\sigma_2, n = 3$;
i) $\sigma_2^3, n = 4$;	j) $\sigma_1\sigma_2^2, n = 5$;
k) $\sigma_1\sigma_3^2, n = 4$;	l) $\sigma_2^2\sigma_1^2, n = 5$;
m) $\sigma_2^2\sigma_3, n = 5$;	n) $\sigma_2\sigma_3^2, n = 5$;
o) $\sigma_1^3, n = 3$;	p) $\sigma_3^3, n = 4$.

8,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $\sum^{(3)} x_1^4x_2 + \sum^{(3)} x_1^3x_2x_3$; b) $\sum^{(3)} x_1^3x_2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$; c) $\sum^{(3)} x_1^3x_2^2x_3$;

d) $\sum^{(3)} x_1^5x_2^2 + 2\sum^{(3)} x_1^5x_2x_3 + \sum^{(3)} x_1^4x_2^3 + \sum^{(3)} x_1^4x_2^2x_3 + 2\sum^{(3)} x_1^3x_2^3x_3 + 2\sum^{(3)} x_1^3x_2^2x_3^2$;
e) $\sum^{(4)} x_1^4 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2^2$; f) $\sum^{(4)} x_1^5x_2^2 + 2\sum^{(4)} x_1^5x_2x_3 + \sum^{(4)} x_1^4x_2^3 + \sum^{(4)} x_1^4x_2^2x_3 +$
$2\sum^{(4)} x_1^3x_2^3x_3 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3x_4$; g) $\sum^{(4)} x_1^6x_2^3x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^6x_2^3x_3x_4 +$
$2\sum^{(4)} x_1^6x_2^2x_3^2x_4 + \sum^{(4)} x_1^5x_2^4x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^5x_2^4x_3x_4 + \sum^{(4)} x_1^5x_2^3x_3^2x_4 + 2\sum^{(4)} x_1^4x_2^4x_3^3 +$
$2\sum^{(4)} x_1^4x_2^4x_3^2x_4 + 4\sum^{(4)} x_1^4x_2^3x_3^3x_4 + 2\sum^{(4)} x_1^4x_2^3x_3^2x_4^2 + 6\sum^{(4)} x_1^3x_2^3x_3^3x_4^2$;
h) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^3 + \sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3 + \sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$; i) $\sum^{(5)} x_1^3x_2 + \sum^{(5)} x_1^2x_2x_3$; j) $\sum^{(5)} x_1^5x_2^3 +$
$\sum^{(5)} x_1^5x_2^2x_3 + 2\sum^{(5)} x_1^4x_2^4 + \sum^{(5)} x_1^4x_2^3x_3 + 2\sum^{(5)} x_1^4x_2^2x_3^2 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3^2 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3^2x_4$;
k) $\sum^{(5)} x_1^6x_2^4x_3^3x_4^2 + \sum^{(5)} x_1^6x_2^4x_3^2x_4^2x_5 + 3\sum^{(5)} x_1^6x_2^3x_3^2x_4^2x_5^2 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^5x_3^3x_4^2 +$
$2\sum^{(5)} x_1^5x_2^5x_3^2x_4^2x_5 + \sum^{(5)} x_1^5x_2^4x_3^3x_4^2x_5 + 3\sum^{(5)} x_1^5x_2^4x_3^2x_4^2x_5^2 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^3x_3^3x_4^2x_5^2 +$
$2\sum^{(5)} x_1^4x_2^4x_3^3x_4^2x_5^2 + 6\sum^{(5)} x_1^4x_2^3x_3^3x_4^3x_5^2$;
l) $\sum^{(5)} x_1^5x_2^5x_3^2x_4 + 3\sum^{(5)} x_1^5x_2^5x_3x_4x_5 + \sum^{(5)} x_1^5x_2^4x_3^3x_4 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^4x_3^2x_4^2 +$
$2\sum^{(5)} x_1^5x_2^4x_3^2x_4x_5 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^3x_3^3x_4x_5 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^3x_3^2x_4^2x_5 + \sum^{(5)} x_1^4x_2^4x_3^3x_4^2 +$
$\sum^{(5)} x_1^4x_2^4x_3^2x_4^2x_5 + 2\sum^{(5)} x_1^4x_2^3x_3^3x_4^2x_5 + 3\sum^{(5)} x_1^4x_2^3x_3^2x_4^2x_5^2$.

2\. a) $\sum^{(3)} x_1^2 + 2\sum^{(3)} x_1x_2$; b) $\sum^{(3)} x_1^4 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2^2$; c) $\sum^{(4)} x_1^6 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^3$;
d) $\sum^{(4)} x_1^5 + \sum^{(4)} x_1^3x_2^2$; e) $\sum^{(3)} x_1^3 + \sum^{(3)} x_1^2x_2$; f) $\sum^{(4)} x_1^4 + \sum^{(4)} x_1^3x_2$;
g) $\sum^{(5)} x_1^6 + \sum^{(5)} x_1^5x_2 + \sum^{(5)} x_1^4x_2^2 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^3 + \sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3$;
h) $\sum^{(3)} x_1^4 + 2\sum^{(3)} x_1^3x_2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$;
i) $\sum^{(4)} x_1^6 + 3\sum^{(4)} x_1^4x_2^2 + 6\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2$; j) $\sum^{(5)} x_1^5 + \sum^{(5)} x_1^4x_2 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^2 + 2\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3$;
k) $\sum^{(4)} x_1^7 + \sum^{(4)} x_1^6x_2 + 2\sum^{(4)} x_1^4x_2^3 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^3x_3$; l) $\sum^{(5)} x_1^6 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2 +$
$3\sum^{(5)} x_1^4x_2^2 + 2\sum^{(5)} x_1^4x_2x_3 + 4\sum^{(5)} x_1^3x_2^3 + 4\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3 + 4\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4$;
m) $\sum^{(5)} x_1^7 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^2 + \sum^{(5)} x_1^4x_2^3 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3^2$;
n) $\sum^{(5)} x_1^8 + \sum^{(5)} x_1^6x_2^2 + 2\sum^{(5)} x_1^5x_2^3 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3^2$;
o) $\sum^{(3)} x_1^5 + 5\sum^{(3)} x_1^4x_2 + 10\sum^{(3)} x_1^3x_2^2 + 20\sum^{(3)} x_1^3x_2x_3 + 30\sum^{(3)} x_1^2x_2^2x_3$;
p) $\sum^{(4)} x_1^9 + 3\sum^{(4)} x_1^6x_2^3 + 6\sum^{(4)} x_1^3x_2^3x_3^3$.

3\. a) $\sum^{(3)} x_1^2 + 2\sum^{(3)} x_1x_2$; b) $\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$; c) $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$;
d) $\sum^{(3)} x_1^2x_2 + 3\sum^{(3)} x_1x_2x_3$; e) $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3 + 3\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3x_4$;
f) $\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3 + 4\sum^{(4)} x_1x_2x_3x_4$;
g) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3 + 3\sum^{(5)} x_1^3x_2x_3x_4 + 3\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3^2 + 8\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4 + 22\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4x_5$;
h) $\sum^{(3)} x_1^3x_2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + 5\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$;
i) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^3 + 3\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3 + 6\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3x_4 + 6\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2 + 15\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$;
j) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^2 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2x_3 + 5\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3 + 12\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4 + 30\sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4x_5$;
k) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3x_4 + 7\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4$;
l) $\sum^{(5)} x_1^4x_2^2 + 2\sum^{(5)} x_1^4x_2x_3 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^3 + 8\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3 + 18\sum^{(5)} x_1^3x_2x_3x_4 +$
$15\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3^2 + 32\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4 + 78\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4x_5$; m) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3^2 +$
$5\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3x_4 + 12\sum^{(5)} x_1^3x_2x_3x_4x_5 + 12\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4 + 31\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4x_5$;
n) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3^2 + 2\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3x_4 + 5\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3^2x_4 + 12\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3x_4x_5 +$
$12\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 + 31\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4x_5$; o) $\sum^{(3)} x_1^3 + 3\sum^{(3)} x_1^2x_2 + 6\sum^{(3)} x_1x_2x_3$;
p) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^3x_3^3 + 3\sum^{(4)} x_1^3x_2^3x_3^2x_4 + 6\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3^2x_4^2$.

9. Hlavní věta o symetrických polynomech a její užití

9,1. ZÁKLADNÍ POJMY

9,1.1. Věta. *Nechť $n \in \mathrm{N}$, I je obor integrity a $f \in I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jednoduchý symterický polynom,*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Potom pro nezáporná čísla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ určená jednoznačně vztahy

$$r_n = k_n, r_{n-1} = k_{n-1} - k_n, \ldots, r_1 = k_1 - k_2$$

je součin elementárních symetrických polynomů

$$\sigma_1^{r_1} \sigma_2^{r_2} \ldots \sigma_n^{r_n}$$

n neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ symetrický polynom nad oborem integrity I s vedoucím členem

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

9,1.2. Důsledek. Každý jednoduchý symetrický polynom

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

nad oborem integrity I lze podle věty 9,1.1 vyjádřit pomocí součinu

$$\sigma_1^{r_1} \sigma_2^{r_2} \ldots \sigma_n^{r_n}$$

elementárních symetrických polynomů a jednoduchých symetrických polynomů

$$\sum\nolimits^{(n)} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n},$$

jejichž vedoucí členy mají výšky menší než je výška $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, ale stejný stupeň.

9,1.3. Věta (hlavní věta o symetrických polynomech). *Nechť $n \in \mathrm{N}$, I je obor integrity a $f \in I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jednoduchý symterický polynom,*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Potom existuje právě jeden polynom $F \in I[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ nad týmž oborem integrity takový, že po dosazení elementárních symetrických polynomů $\sigma_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ za neurčitou y_j, $1 \leq j \leq n$, platí:

$$F(\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \sum\nolimits^{(n)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

9,1.4. Poznámka. Ve větě 9,1.3 není podstatné, že f je jednoduchý symetrický polynom. Každý symetrický polynom totiž může být podle věty 7,1.13 zapsán pomocí jednoduchých symetrických polynomů. Proto může být také libovolný symetrický polynom vyjádřen jako polynom v elementárních symetrických polynomech.

9,1.5. Věta (Newtonovy formule). *Buďte $k, n \in \mathbb{N}$ a $x_1, x_2, \ldots x_n$ neurčité nad oborem integrity I. Potom pro součty k-tých mocnin s_k neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a elementární symetrické polynomy platí vztahy*

$$\begin{aligned} &\textit{pro } k \leq n: \quad && s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \ldots - (-1)^k k\sigma_k = 0, \\ &\textit{pro } k > n: \quad && s_k - \sigma_1 s_{k-1} + \sigma_2 s_{k-2} - \ldots - (-1)^k n\sigma_n s_{k-n} = 0. \end{aligned}$$

9,1.6. Důsledek. Pomocí Newtonových formulí lze rekurentně odvodit vyjádření pro součty s_k k-tých mocnin neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad I pomocí elementárních symetrických polynomů:

$$s_1 = \sigma_1, s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \ldots.$$

9,1.7. Definice. *Diskriminantem v n neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$* nad oborem integrity I rozumíme symetrický polynom D_n daný vztahem

$$D_n = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2.$$

9,1.8. Definice. *Van der Mondovým determinantem $V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$* rozumíme polynom n neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad oborem integrity I daný vztahem

$$V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

9,1.9. Poznámka. Platí

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\check{V}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = D_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

a odtud podle věty o součinu determinantů lze odvodit vztah

$$D_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots, & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1}, & s_n, & \dots, & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

9,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Poznámka. Pro zjednodušení zápisu nebudeme v příkladech vypisovat při výpočtech neurčité u polynomů σ_i a s_i.

9,2.1. Zapišme jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(4)} x_1^3 x_2^2 x_3^2$ pomocí elementárních symetrických polynomů.

Řešení. Vedoucí člen daného polynomu má výšku $(3, 2, 2, 0)$ a stupeň 7. Vedoucí člen se stejnou výškou má součin tří elementárních polynomů $\sigma_1\sigma_3^2$. Tento fakt plyne z věty 9,1.1. Můžeme ho ověřit také přímo: Neurčitá x_3 má stupeň 2, proto lze použít dvakrát polynom σ_3; potom však už zbývá doplnit pouze x_1 v první mocnině, a tedy jedenkrát použít σ_1.)

Kromě jednoduchého symetrického polynomu s vedoucím členem s výškou $(3, 2, 2, 0)$ však v součinu můžeme získat i členy se stupněm 7, ale s menšími výškami. V úvahu proto přicházejí jednoduché symetrické polynomy s výškami $(3, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 1)$. Obecně lze součin zapsat ve tvaru

$$\sigma_1\sigma_3^2 = \sum^{(4)} x_1^3 x_2^2 x_3^2 + A \sum^{(4)} x_1^3 x_2^2 x_3 x_4 + B \sum^{(4)} x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4,$$

kde koeficienty A, B jsou celá čísla. K určení těchto koeficientů mohou posloužit kombinatorické úvahy nebo tabulka možností vytvoření vedoucího členu ze členů jednotlivých činitelů.

K určení koeficientu A použijeme kombinatorické úvahy. Vzhledem k tomu, že x_1 má být v součinu ve třetí mocnině, nutně musíme v každém z činitelů zajistit vybrání mocniny x_1. Tím je dán jednoznačně výběr členu v σ_1. Podobně x_2 má mít v součinu stupeň 2 a lze vybírat pouze ze druhého a třetího činitele. Proto v každém členu druhého a třetího činitele musíme vždy použít neurčitou x_2. Protože v σ_3 jsou obsaženy součiny tří neurčitých, musíme ve druhém, resp. ve třetím činiteli zajistit vybrání neurčité x_3 (zbývající neurčitá musí být vybrána ve zbývajícím činiteli). Výběr x_1, x_2 je tedy určen jednoznačně, pro výběr x_3 máme dvě možnosti. Proto $A = 2$.

K určení koeficientu B použijeme tabulku možností - výběr neurčité po řadě z činitelů $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ provedeme výčtem možností:

$x_1^2x_2^2x_3^2x_4$	σ_1	σ_2	σ_3
1.	x_1	$x_1x_2x_3$	$x_2x_3x_4$
2.	x_1	$x_2x_3x_4$	$x_1x_2x_3$
3.	x_2	$x_1x_2x_3$	$x_1x_3x_4$
4.	x_2	$x_1x_3x_4$	$x_1x_2x_3$
5.	x_3	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_4$
6.	x_3	$x_1x_2x_4$	$x_1x_2x_3$
7.	x_4	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$

Je-li ze σ_1 vybrán člen x_1, pak z druhého i třetího činitele musí být v obou vybrány neurčité x_2, x_3. Neurčitá x_1 je pak vybrána ve druhém a x_4 ve třetím činiteli či naopak. Tím jsou dány možnosti v prvním a druhém řádku tabulky a jiná situace při výběru x_1 z prvního činitele nastat nemůže. Analogická je situace ve třetím a čtvrtém, resp. pátém a šestém řádku tabulky. Je-li v prvním činiteli vybrána neurčitá x_4, pak ve druhém i třetím činiteli musí být vybrány současně x_1, x_2 i x_3, a je tedy jediná možnost, jak požadovaný vedoucí člen vytvořit.

Popsané způsoby určují, kolika různými způsoby lze vytvořit vedoucí člen jednoduchých symetrických polynomů. Platí tedy:

$$\sigma_1\sigma_3^2 = \sum\nolimits^{(4)} x_1^3x_2^2x_3^2 + 2\sum\nolimits^{(4)} x_1^3x_2^2x_3x_4 + 7\sum\nolimits^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2x_4.$$

9,2.2. Zapišme jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(3)} x_1^3x_2$ pomocí elementárních symetrických polynomů.

<u>Řešení.</u> Vedoucí člen má výšku $(3,1,0)$ a stupeň 4. Tento člen lze vytvořit (viz větu 9,1.1) jako součin tří elementárních symetrických polynomů $\sigma_1^2\sigma_2$. Kromě vedoucího členu s výškou $(3,1,0)$ se v součinu objeví ještě další polynomy se stupněm 4 a menšími výškami $(2,2,0),(2,1,1)$. Proto pro součin bude platit

$$\sigma_1^2\sigma_2 = \sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2 + A\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 + B\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

K určení koeficientů A, B lze využít např. dosazování za x_1, x_2, x_3 a výpočet řešení soustavy rovnic pro A, B. Využijeme přitom toho, že nad nekonečným oborem integrity (např. $I = \mathrm{Z}$) jsou obory integrity polynomů n neurčitých a polynomů n proměnných izomorfní.

Položíme-li $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$, je:

$$\begin{aligned}\sigma_1(1,-1,0) &= 1-1+0 = 0,\\ \sigma_2(1,-1,0) &= 1.(-1)+1.0+(-1).0 = -1.\end{aligned}$$

Protože

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^3 x_2 = x_1^3 x_2 + x_1^3 x_3 + x_1 x_2^3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3,$$

je hodnota tohoto polynomu pro $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$ rovna

$$(-1) + 0 + (-1) + 0 + 0 + 0 = -2.$$

Obdobně je

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^2 x_2^2 = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2,$$

tedy pro $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$ je hodnota tohoto polynomu rovna

$$1 + 0 + 0 = 1.$$

Konečně je

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^2 x_2 x_3 = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2,$$

tedy pro $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$ je hodnota tohoto polynomu rovna

$$0 + 0 + 0 = 0.$$

První rovnice soustavy pro A, B má tedy tvar

$$0 = -2 + 1.A + 0.B, \text{odkud } A = 2.$$

Pro určení koeficientu B stačí dosadit jinou vhodnou trojici hodnot za proměnné x_1, x_2, x_3 a získat druhou (nezávislou) rovnici soustavy. Položme $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Potom platí:

$$\begin{aligned} \sigma_1(1,1,1) &= 1 + 1 + 1 = 3, \\ \sigma_2(1,1,1) &= 1.1 + 1.1 + 1.1 = 3. \end{aligned}$$

Dále pro hodnoty jednotlivých polynomů platí:

$$\begin{aligned} \sum\nolimits^{(3)} x_1^3 x_2 :&\quad 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6, \\ \sum\nolimits^{(3)} x_1^2 x_2^2 :&\quad 1 + 1 + 1 = 3, \\ \sum\nolimits^{(3)} x_1^2 x_2 x_3 :&\quad 1 + 1 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Po dosazení dostáváme druhou, na první nezávislou, rovnici soustavy pro neznámé A, B:

$$\begin{aligned} 3^2.3 &= 6 + 3A + 3B, \\ 21 &= 3A + 3B, \\ 7 &= A + B. \end{aligned}$$

Jeli $A = 2$, je nutně $B = 5$. Proto platí

$$\sigma_1^2\sigma_2 = \sum^{(3)} x_1^3x_2 + 2\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + 5\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

9,2.3. Vyjádřeme součet s_4 čtvrtých mocnin tří proměnných x_1, x_2, x_3 jako polynom v elementárních polynomech.

Řešení. Budeme postupovat podle věty 9,1.3. Protože

$$s_4 = \sum^{(3)} x_1^4,$$

je výška vedoucího členu $(4,0,0)$. Menší výšky stejného stupně 4 jsou

$$(3,1,0) > (2,2,0) > (2,1,1).$$

Vedoucí člen s výškou $(4,0,0)$ můžeme získat pouze jako součin čtyř elementárních symetrických polynomů σ_1. Proto počítáme

$$\sigma_1^4 = \sum^{(3)} x_1^4 + A\sum^{(3)} x_1^3x_2 + B\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + C\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Určíme koeficienty A, B, C:

A	Ze čtyř činitelů musíme ve třech případech vybrat x_1, ve zbylém činiteli x_2. Celkem je $\binom{4}{3} = 4$ možností výběru.	$A = 4$
B	Ve dvou ze čtyř činitelů musíme vybrat x_1, ve zbývajících x_2. Celkem je $\binom{4}{2} = 6$ možností výběru.	$B = 6$
C	Ve dvou ze čtyř činitelů musíme vybrat x_1, v jednom ze zbývajících činitelů x_2. Celkem je $\binom{4}{2}\binom{2}{1} = 12$ možností výběru.	$C = 12$

Platí tedy

$$\sigma_1^4 = \sum^{(3)} x_1^4 + 4\sum^{(3)} x_1^3x_2 + 6\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + 12\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Odtud plyne

$$\begin{aligned} s_4 &= \sum^{(3)} x_1^4 = \\ &= \sigma_1^4 - 4\sum^{(3)} x_1^3x_2 - 6\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 - 12\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Dále vyjádříme pomocí elementárních symetrických polynomů jednoduchý symetrický polynom s nejbližší menší výškou, tj. polynom $\sum^{(3)} x_1^3x_2$. Vedoucí člen tohoto polynomu je také vedoucím členem součinu $\sigma_1^2\sigma_2$ a pro vhodná D, E bude platit

$$\sigma_1^2\sigma_2 = \sum^{(3)} x_1^3x_2 + D\sum^{(3)} x_1^2x_2^2 + E\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Koeficient D určíme tabulkou možností:

$x_1^2x_2^2$	σ_1	σ_1	σ_2
1.	x_1	x_2	x_1x_2
2.	x_2	x_1	x_1x_2

Proto

$$D = 2.$$

Podobně určíme koeficient E:

$x_1^2x_2x_3$	σ_1	σ_1	σ_2
1.	x_1	x_1	x_2x_3
2.	x_1	x_2	x_1x_3
3.	x_1	x_3	x_1x_2
4.	x_2	x_1	x_1x_3
5.	x_3	x_1	x_1x_2

Proto

$$E = 5.$$

Platí tedy

$$\sigma_1^2\sigma_2 = \sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2 + 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 + 5\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3,$$

odkud

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 - 5\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Dosazením do výrazu pro s_4 dostáváme

$$\begin{aligned} s_4 &= \sigma_1^4 - 4\left(\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 - 5\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3\right) - \\ &- 6\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 - 12\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Tedy

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 + 8\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Dále vyjádříme obdobně další jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(3)} x_1^2x_2^2$. Ten zřejmě získáme součinem σ_2^2. Tedy

$$\sigma_2^2 = \sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 + F\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Určíme F. Zřejmě z obou činitelů je třeba vždy vybrat neurčitou x_1. Neurčitou x_2 musíme vybrat z jednoho činitele. Máme tedy dvě možnosti výběru, proto

$$F = 2.$$

Platí tedy

$$\sigma_2^2 = \sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 + 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Odtud

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 = \sigma_2^2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3.$$

Dosazením do výrazu pro s_4 dostáváme

$$\begin{aligned} s_4 &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\left(\sigma_2^2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3\right) + 8\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3 = \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3. \end{aligned}$$

Konečně jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(3)} x_1^2x_2x_3$ je přímo součinem elementárních symetrických polynomů σ_1 a σ_3. Celkem tedy platí

$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3.$$

9,2.4. Vyjádřeme součin $\sigma_1^2\sigma_3 s_4$ ve čtyřech neurčitých pomocí elementárních symetrických polynomů.

Řešení. Při řešení tohoto příkladu je výhodné využít Newtonovy formule:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1, \\ s_2 &= s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ s_3 &= s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \\ s_4 &= s_3\sigma_1 - s_2\sigma_2 + s_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = \\ &= \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4 = \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4. \end{aligned}$$

Potom už snadno vypočteme daný součin:

$$\begin{aligned} &\sigma_1^2\sigma_3(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4) = \\ &= \sigma_1^6\sigma_3 - 4\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_1^4\sigma_3^2 + 2\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3 - 4\sigma_1^2\sigma_3\sigma_4. \end{aligned}$$

9,2.5. Vyjádřeme součin $s_3^2 s_2$ ve třech neurčitých pomocí elementárních symetrických polynomů.

Řešení. Při řešení tohoto příkladu opět využijeme Newtonovy formule:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1, \\ s_2 &= s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\ s_3 &= s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \\ &= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3. \end{aligned}$$

Nakonec roznásobíme součin:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3)(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\
&= \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 6\sigma_1^5\sigma_3 + 21\sigma_1^4\sigma_2^2 + \\
&-30\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 36\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 9\sigma_1^2\sigma_3^2 - 18\sigma_2\sigma_3^2 - 18\sigma_1^2\sigma_2^3.
\end{aligned}$$

9,2.6. Vyjádřeme součin $(\sum^{(3)} x_1^3x_2)s_3$ pomocí ementárních symetrických polynomů.

Řešení. Nejprve vyjádříme s_3 pomocí Newtonových formulí:

$k = 0$	$s_0 = \sum^{(3)} x_1^0 = 1 + 1 + 1 = 3$
$k = 1$	$s_1 - \sigma_1 = 0 \Rightarrow s_1 = \sigma_1$
$k = 2$	$s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0 \Rightarrow s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
$k = 3$	$s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = 0 \Rightarrow s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$

Jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(3)} x_1^3x_2$ vyjádříme pomocí hlavní věty o symetrických polynomech (věta 9,1.3):

$$\begin{aligned}
\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2 &= \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 - 5\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3, \\
\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 &= \sigma_2^2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3, \\
\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3 &= \sigma_1\sigma_3.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^3x_2 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3.$$

Z obou mezivýsledků vypočteme součin a ten vyjádříme v normálním tvaru:

$$\begin{aligned}
&(\sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3)(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = \\
&= \sigma_1^5\sigma_2 - \sigma_1^4\sigma_3 - 5\sigma_1^3\sigma_2^2 + 6\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 6\sigma_1\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_3^2 - 6\sigma_2^2\sigma_3.
\end{aligned}$$

9,2.7. Vypočtěme hodnotu diskriminantu D_2 z definice a vyjádřeme D_2 pomocí jednoduchých i elementárních symetrických polynomů.

Řešení.

$$\begin{aligned}
D_2(x_1, x_2) &= (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = \\
&= \sum\nolimits^{(2)} x_1^2 - 2\sum\nolimits^{(2)} x_1x_2.
\end{aligned}$$

Vyjádříme-li jednoduchý symetrický polynom $\sum^{(2)} x_1^2$ pomocí elementárních symetrických polynomů (např. pomocí Newtonových formulí), dostaneme

$$s_2 = \sum\nolimits^{(2)} x_1^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2.$$

Odtud plyne

$$D_2(x_1, x_2) = \sigma_1^2 - 4\sigma_2.$$

9,3. CVIČENÍ

9,3.1. Vyjádřete pomocí elementárních symetrických polynomů n neurčitých nad oborem integrity $\mathbf{Z}$ polynomy:
a) $\sum^{(3)} x_1^2x_2^2$; b) $\sum^{(3)} x_1^3x_2$; c) $\sum^{(3)} x_1^4x_2$; d) $\sum^{(3)} x_1^3x_2^3$;
e) $\sum^{(4)} x_1^3x_2^2$; f) $\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3$; g) $\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3$; h) $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2$;
i) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^2x_3^2x_4$; j) $\sum^{(5)} x_1^3x_2^3x_3^2x_4$; k) $\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3x_4$; l) $\sum^{(5)} x_1^4x_2^3x_3^2x_4$.

9,3.2. Vyjádřete pomocí elementárních symetrických polynomů n neurčitých nad oborem integrity $\mathbf{Z}$ polynomy:
a) $s_2 = \sum^{(4)} x_1^2$; b) $s_3 = \sum^{(4)} x_1^3$; c) $s_4 = \sum^{(4)} x_1^4$; d) $s_5 = \sum^{(4)} x_1^5$;
e $s_1s_2^2, n = 4$; f) $s_2^2s_3, n = 4$; g) $s_1s_2s_3, n = 4$; h) $s_2^2s_4, n = 4$;
i) $\sigma_2^2s_3, n = 3$; j) $\sigma_1\sigma_2s_2^2, n = 4$; k) $\sigma_1\sigma_3s_3^2, n = 3$; l) $\sigma_3^2s_2^3, n = 4$.

9,3.3. Vyjádřete pomocí elementárních symetrických polynomů hodnotu diskriminantu D_3 nad oborem komplexních čísel.

9,3.4. Pomocí hlavní věty o symetrických polynomech 9,1.3 dokažte platnost Newtonových formulí pro $k \leq n$ a pro $k > n$.

9,3.5. Pomocí věty o součinu determinantů použité na součin Van der Mondových determinantů dokažte, že pro diskriminant v n neurčitých nad libovolným oborem integrity platí

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & \dots, & s_{n-1} \\ s_1, & s_2, & \dots, & s_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n-1}, & s_n, & \dots, & s_{2n-2} \end{vmatrix}$$

9,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3$; b) $\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2$; c) $\sigma_1^3\sigma_2 - 3\sigma_1\sigma_2^2 - \sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_2\sigma_3$;
d) $\sigma_2^3 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$; e) $\sigma_1\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4$; f) $\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$;
g) $\sigma_1^2\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_4$; h) $\sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_4$; i) $\sigma_1\sigma_3\sigma_4 - 3\sigma_1\sigma_2\sigma_5 - 4\sigma_4^2 + 6\sigma_3\sigma_5$;
j) $\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 3\sigma_2^2\sigma_5 - 3\sigma_1\sigma_4^2 + 4\sigma_1\sigma_3\sigma_5 + 7\sigma_4\sigma_5$; k) $\sigma_2\sigma_4 - 4\sigma_1\sigma_5$;
l) $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 - 3\sigma_1\sigma_2^2\sigma_5 - 3\sigma_1^2\sigma_4^2 + 4\sigma_1^2\sigma_3\sigma_5 - 3\sigma_3^2\sigma_4 + 4\sigma_2\sigma_4^2 + 5\sigma_2\sigma_3\sigma_5 - 23\sigma_5^2$.

2. a) $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$; b) $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$; c) $\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$;
d) $\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_2\sigma_3$; e) $\sigma_1^5 - 4\sigma_1^3\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_2^2$;
f) $\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 16\sigma_1^3\sigma_2^2 - 12\sigma_1\sigma_2^3 + 3\sigma_1^4\sigma_3 - 12\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_2^2\sigma_3$;
g) $\sigma_1^6 - 5\sigma_1^4\sigma_2 + 3\sigma_1^3\sigma_3 + 6\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1\sigma_2\sigma_3$; h) $\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 4\sigma_1^5\sigma_3 + 22\sigma_1^4\sigma_2^2 - 4\sigma_1^4\sigma_4 - 16\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 - 24\sigma_1^2\sigma_2^3 + 16\sigma_1^2\sigma_2\sigma_4 + 16\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 + 8\sigma_2^4 - 16\sigma_2^2\sigma_4$; i) $\sigma_1^3\sigma_2^2 - 3\sigma_1\sigma_2^3 + 3\sigma_2^2\sigma_3$;
j) $\sigma_1^5\sigma_2 - 4\sigma_1^3\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_2^3$; k) $\sigma_1^7\sigma_3 + 9\sigma_1^3\sigma_2^2\sigma_3 + 9\sigma_1\sigma_3^3 - 6\sigma_1^5\sigma_2\sigma_3 - 18\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + 6\sigma_1^4\sigma_3^2$;
l) $\sigma_1^6\sigma_3^2 - 6\sigma_1^4\sigma_2\sigma_3^2 + 12\sigma_1^2\sigma_2^2\sigma_3^2 - 8\sigma_2^3\sigma_3^2$.

3. $\sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$.

5. Návod. Vypočtěte součin determinantů $V_n V_n^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & x_1^2 & \ldots, & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2 & \ldots, & x_2^{n-1} \\ 1, & x_3, & x_3^2 & \ldots, & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1, & x_n, & x_n^2 & \ldots, & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

10. Využití symetrických polynomů u algebraických rovnic jedné neznámé

10,1. ZÁKLADNÍ POJMY

10,1.1. Definice. Buď $f(x) = b_0x^k + \ldots + b_{k-1}x + b_k$ libovolný polynom jedné neurčité x nad tělesem T. *Algebraickou rovnicí jedné neznámé x stupně k (nad tělesem T)* rozumíme každou rovnici

$$b_0x^k + \ldots + b_{k-1}x + b_k = 0. \tag{1}$$

Je-li T' nadtěleso tělesa T, potom *řešením* (resp. *kořenem*) *rovnice* (1) *v tělese T'* rozumíme každý kořen $\alpha \in T'$ polynomu f.

10,1.2. Důsledek. *Algebraická rovnice jedné neznámé stupně k nad tělesem T má nejvýše k řešení.*

10,1.3. Věta (o kořenových vztazích). *Buďte $k \in \mathrm{N}$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ elementární symetrické polynomy v k neurčitých nad oborem integrity I a nechť polynom $f(y) = y^k + a_1y^{k-1} + \ldots + a_{k-1}y + a_k$ z $I[y]$ má v nadtělese T oboru integrity I právě k kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Potom v T platí tyto rovnosti:*

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) &= -a_1;\\
\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) &= a_2;\\
\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) &= -a_3;\\
&\vdots\\
\sigma_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) &= (-1)^k a_k.
\end{aligned}$$

10,1.4. Poznámka. Buď $n \in \mathrm{N}$, nechť $f \in I_S[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je symetrický polynom a $g(y) = y^n + \ldots + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y + a_n \in I[y]$ polynom jedné neurčité, který má v nějakém kořenovém nadtělese T kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Potom hodnota $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ z T je dokonce prvkem oboru integrity I a lze ji určit pomocí věty 9,1.3 (hlavní věta o symterických polynomech) a věty 10,1.3 i bez znalosti prvků $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a tělesa T.

10,1.5. Definice. Buď $n \in \mathrm{N}$, buď $f(y) = y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y + a_n \in I[y]$ polynom jedné neurčité, který má v nějakém rozkladovém nadtělese T kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. *Diskriminantem polynomu f* rozumíme prvek $D_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ z oboru integrity I, který vznikne dosazením kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ za neurčité $x_1, x_2, \ldots, x_n$ do diskriminantu D_n v neurčitých $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

10,1.6. Poznámka. Vzhledem k tomu, že D_n je symetrický polynom, nezáleží na tom, v jakém pořadí kořeny za neurčité dosazujeme.

10,1.7. Věta. *Polynom $f(y) = y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y + a_n \in I[y]$ stupně $n \geq 1$ má vícenásobné kořeny, právě když*

$$D_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0.$$

10,1.8. Poznámka. Podle hlavní věty o symetrických polynomech (věta 9,1.3) lze symetrický polynom D_n vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů. Existuje tedy polynom $F \in I[z_1, z_2, \ldots, z_n]$ takový, že po dosazení σ_j za z_j pro $1 \leq j \leq n$ platí:

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(\sigma_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \sigma_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \sigma_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)).$$

Proto diskriminant $D_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ polynomu f lze vypočítat ze vztahu

$$D_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = F(\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ldots, \sigma_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n))$$

i bez znalosti prvků $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a tělesa T (viz větu 10,1.3).

10,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

10,2.1. Je dán polynom $x^3 + 7x - 2$ jedné neurčité x nad oborem integrity $\mathbf{Z}$. Určeme bez přímého výpočtu kořenů tohoto polynomu součet třetích mocnin těchto kořenů.

Řešení. Polynom $x^3 + 7x - 2$ je stupně 3, proto má tři kořeny. Vyjádříme nejprve součet s_3 třetích mocnin ve třech neurčitých x_1, x_2, x_3 nad $\mathbf{Z}$ pomocí elementárních symetrických polynomů (nejlépe pomocí Newtonových formulí - viz 9,1.5):

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Z kořenových vztahů (viz větu 10,1.3) plyne

$$\begin{aligned} \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -0 = 0, \\ \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 7, \\ \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -(-2) = 2. \end{aligned}$$

Odtud již po dosazení dostáváme

$$s_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0^3 - 3.0.7 + 3.2 = 6.$$

Součet třetích mocnin kořenů daného polynomu je tedy 6.

10,2.2. Je dán polynom $y^2+(1+2\mathrm{i})y+(3-4\mathrm{i})$ jedné neurčité y nad tělesem komplexních čísel $\mathbf{C}$. Určeme diskriminant tohoto polynomu a rozhodněme, zda polynom má násobné kořeny.

Řešení. Polynom je stupně 2, proto hledáme diskriminant D_2. Platí

$$D_2=\begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix}=2s_2-s_1^2=2(\sigma_1^2-2\sigma_2)-\sigma_1^2=\sigma_1^2-4\sigma_2.$$

Z kořenových vztahů plyne (kořeny označíme α_1,α_2)

$$\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2)=-(1+2\mathrm{i}),\ \sigma_2(\alpha_1,\alpha_2)=3-4\mathrm{i}.$$

Odtud dostáváme

$$D_2(\alpha_1,\alpha_2)=(1+2\mathrm{i})^2-4(3-4\mathrm{i})=-15+20\mathrm{i}.$$

Protože $D_2(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$, má polynom pouze jednoduché kořeny.

10,2.3. Je dán polynom $f(x)=2x^4-4x^2+3x+5$. Nalezněme polynom g, jehož kořeny jsou dvojnásobky kořenů polynomu f.

Řešení. Polynom f upravíme do normovaného tvaru $\overline{f}$:

$$\overline{f}(x)=x^4-2x^2+\tfrac{3}{2}x+\tfrac{5}{2}.$$

Z kořenových vztahů plyne

$$\begin{aligned}\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)&=0,\\ \sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)&=-2,\\ \sigma_3(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)&=-\frac{3}{2},\\ \sigma_4(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)&=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Označme $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ kořeny polynomu g. Pak platí

$$\beta_j=2\alpha_j, 1\leq j\leq 4.$$

Proto

$$\begin{aligned}\sigma_1(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)&=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=2\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4=\\ &=2\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=0,\\ \sigma_2(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)&=\beta_1\beta_2+\beta_1\beta_3+\ldots+\beta_3\beta_4=2\alpha_1.2\alpha_2+2\alpha_1.2\alpha_3+\ldots+2\alpha_3.2\alpha_4=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_3\alpha_4) = 4\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 4.(-2) = -8,\\
\sigma_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= \beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_2\beta_4 + \ldots + \beta_2\beta_3\beta_4 =\\
&= 8(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_2\alpha_3\alpha_4) = 8\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =\\
&= 8.(-\frac{3}{2}) = -12,\\
\sigma_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4 =\\
&= 16\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = 16\sigma_4(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 16.\frac{5}{2} = 40.
\end{aligned}
$$

Pro hledaný polynom $g(x) = x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$ platí

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\sigma_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = -0 = 0, & b_2 &= \sigma_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = -8,\\
b_3 &= \sigma_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = -(-12) = 12, & b_4 &= \sigma_4(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = 40.
\end{aligned}
$$

Proto

$$g(x) = x^4 - 8x^2 + 12x + 40.$$

10,2.4. Je dán polynom $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Nalezněme polynom g, jehož kořeny jsou rovny kořenům polynomu f zvětšeným o 2.

Řešení. Označme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kořeny daného polynomu f, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ kořeny hledaného polynomu g. Platí

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -2,\\
\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 0,\\
\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 3.
\end{aligned}
$$

Proto

$$
\begin{aligned}
\sigma_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = (2 + \alpha_1) + (2 + \alpha_2) + (2 + \alpha_3) =\\
&= 6 + \sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 6 - 2 = 4,\\
\sigma_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 =\\
&= (2 + \alpha_1)(2 + \alpha_2) + (2 + \alpha_1)(2 + \alpha_3) + (2 + \alpha_2)(2 + \alpha_3) = 4,\\
\sigma_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) &= \beta_1\beta_2\beta_3 =\\
&= (2 + \alpha_1)(2 + \alpha_2)(2 + \alpha_3) = 3.
\end{aligned}
$$

Hledaný polynom je tedy

$$g(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3.$$

10,2.5. Je dán polynom $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Nalezněme polynom g, jehož kořeny jsou rovny druhým mocninám kořenů polynomu f.

Řešení. Nechť $g(x) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou kořeny polynomu f, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ kořeny polynomu g. Platí

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1, \sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1, \sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -1.$$

Kořeny $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ jsou vázány vztahy $\beta_1 = \alpha_1^2, \beta_2 = \alpha_2^2, \beta_3 = \alpha_3^2$. Proto

$$\sigma_1(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Víme však, že $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Proto platí

$$s_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1)^2 - 2.1 = -1.$$

Dále

$$\sigma_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2.$$

Pomocí hlavní věty o symetrických polynomech 9,1.3 určíme

$$\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2^2 = \sigma_2^2 - 2\sum\nolimits^{(3)} x_1^2x_2x_3 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3.$$

Proto

$$\sum\nolimits^{(3)} \alpha_1^2\alpha_2^2 = 1^2 - 2(-1)(-1) = -1.$$

Tedy

$$b_2 = \sigma_2(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = -1.$$

Konečně

$$\sigma_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_1\beta_2\beta_3 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Tedy

$$b_3 = -\sigma_3(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = -1.$$

Odtud dostáváme, že hledaný polynom g má tvar

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

10,2.6. Určeme absolutní člen c polynomu $x^3 + 3x^2 - 7x + c$, jestliže víme, že jeden jeho kořen je roven součtu ostatních.

Řešení. Položme $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$. Z kořenových vztahů plyne

$$\begin{aligned}
\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2),\\
\sigma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -7 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2,\\
\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -c = \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Z uvedených vztahů postupně dostáváme

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{3}{2},$$

a tedy

$$(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 = \frac{9}{4}.$$

Přitom současně má platit

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 3\alpha_1\alpha_2 = -7.$$

Dosazením z předchozího vztahu dostáváme

$$\frac{9}{4} + \alpha_1\alpha_2 = -7,$$

a tedy

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{-28-9}{4} = \frac{-37}{4}.$$

Konečně

$$\sigma_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{-37}{4}.(-\frac{3}{2}) = \frac{111}{8}.$$

Absolutní člen je tedy

$$c = -\frac{111}{8}.$$

10,2.7. Určeme kořeny a koeficienty p, q polynomu $x^3 + px + q$ stupně 3, jestliže pro kořeny platí $\alpha_2 = 2\alpha_1, \alpha_3 = \alpha_1^2$.

Řešení. Platí

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 + 2\alpha_1 + \alpha_1^2 = \alpha_1(\alpha_1 + 3) = 0.$$

Proto

$$\alpha_1 = 0 \text{ nebo } \alpha_1 = -3.$$

Dále víme, že

$$p = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 2\alpha_1^2 + \alpha_1^3 + 2\alpha_1^3 = 2\alpha_1^2 + 3\alpha_1^3.$$

Pro $\alpha_1 = 0$ je $p = 0$, pro $\alpha_1 = -3$ je $p = 2.9 + 3(-3)^3 = -63$. Konečně

$$q = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = (-\alpha_1)(2\alpha_1)\alpha_1^2 = -2\alpha_1^4.$$

Proto buď $q = 0$, nebo $q = -2.81 = -162$. Úloha má dvě řešení:

$$x^3 \text{ a } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \text{nebo } x^3 - 63x - 162 \text{ a } \alpha_1 = -3, \alpha_2 = -6, \alpha_3 = 9.$$

10,3. CVIČENÍ

10,3.1. Bez výpočtu kořenů daného polynomu $f \in Z[x]$ stupně n určeme hodnotu symetrického polynomu $g \in Z_S[x_1, x_2, \dots, x_n]$, jestliže:
a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 7$, $g(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^3 x_2$;
b) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 4$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum^{(4)} x_1^2 x_2$;
c) $f(x) = x^3 - 5x - 2$, $g(x_1, x_2, x_3) = \sum^{(3)} x_1^2 x_2^2$;
d) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x + 3$, $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum^{(4)} x_1^3$.

10,3.2. K danému polynomu $f \in Z[x]$ určete polynom $g \in Z[x]$, je-li dán vztah mezi kořeny polynomů f, g:
a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, $\beta_i = \alpha_i + 3$, $1 \leq i \leq 3$;
b) $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$, $\beta_i = 3\alpha_i$, $1 \leq i \leq 3$;
c) $f(x) = 3x^3 - x^2 + 2x - 5$, $\beta_i = 1/\alpha_i$, $1 \leq i \leq 3$;
d) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$, $\beta_i = 2\alpha_i + 1$, $1 \leq i \leq 4$;
e) $f(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3x - 7$, $\beta_i = \alpha_i^2$, $1 \leq i \leq 4$;
f) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$, $\beta_i = 1/\alpha_i^2$, $1 \leq i \leq 4$.

10,3.3. Určete neznámý koeficient a polynomu f, víte-li, že:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + a$, $\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$;
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax - 5$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$;
c) $f(x) = x^3 - 5x + a$, $\alpha_2 = 2\alpha_1$;
d) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$.

10,3.4. Určete diskriminant polynomu f a rozhodněte, zda tento polynom má vícenásobné kořeny, jestliže:

a)	$f(x) = 9x^3 - 12x^2 - 11x - 2$;	b)	$f(x) = x^3 - 3,1x + 2$;
c)	$f(x) = 4x^3 - 16x^2 + 21x - 9$;	d)	$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5x$;
e)	$f(x) = 25x^3 - 80x^2 + 69x - 18$;	f)	$f(x) = x^3 + 2x - 7$;
g)	$f(x) = 20x^3 - 12x^2 - 3x + 2$;	h)	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$.

U polynomů, které mají vícenásobné kořeny, určete největší společný dělitel $D(f, f')$ a s jeho pomocí určete $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.
(Návod. $D_3 = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3 - 27\sigma_3^2$.)

10,3.5. Určete konstanty $a, b \in \mathbf{R}$ tak, aby pro kořeny polynomu $f \in Z[x]$ platilo $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_1 + 2$, jestliže:
a) $f(x) = x^3 + ax + b$;
b) $f(x) = x^3 + ax^2 + b$.

10,3.6. Určete konstanty $a, b \in \mathbb{C}$ tak, aby polynom $x^4 + ax^2 + bx + 1$ měl dva různé dvojnásobné kořeny.

10,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $\sum^{(3)} x_1^3 x_2 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3, g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 16$;
b) $\sum^{(4)} x_1^2 x_2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3, g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 9$;
c) $\sum^{(3)} x_1^2 x_2^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3, g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 25$;
d) $\sum^{(4)} x_1^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = -16$.
2. a) $x^3 - 11x^2 + 39x - 42$; b) $x^3 - \frac{27}{2}x + \frac{27}{2}$; c) $x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$;
d) $x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 46x + 39$; e) $x^4 - 5x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{63}{4}x + \frac{49}{4}$; f) $x^4 + \frac{4}{9}x^3 + \frac{10}{9}x^2 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{9}$.
3. a) $a = 0, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2$; b) $a = -4, \alpha_1 = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \alpha_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \alpha_3 = -1$;
c) dvě možná řešení $a = 6(\sqrt{\frac{5}{7}})^3, \alpha_1 = \sqrt{\frac{5}{7}}, \alpha_2 = 2\sqrt{\frac{5}{7}}, \alpha_3 = -3\sqrt{\frac{5}{7}}$, nebo
$a = -6(\sqrt{\frac{5}{7}})^3, \alpha_1 = -\sqrt{\frac{5}{7}}, \alpha_2 = -2\sqrt{\frac{5}{7}}, \alpha_3 = 3\sqrt{\frac{5}{7}}$; d) Návod. Z podmínek $\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 = 3$ a $\alpha_1^2\alpha_2 = 1$ můžeme získat rovnici $\alpha_1^3 - 3\alpha_1 + 2 = 0$, která má celočíselné řešení $\alpha_1 = 1$ nebo $\alpha_1 = -2$; pro $\alpha_1 = 1$ je $\alpha_3 = 1$, a tedy nejsou splněny podmínky úlohy; pro $\alpha_1 = -2$ je $\alpha_3 = \frac{1}{4}, a = \frac{15}{4}$.
4. a) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, tím lze získat $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{1}{3}, \alpha_3 = 2$; b) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$;
c) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, tím lze získat $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{2}, \alpha_3 = 1$; d) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$, ale $\alpha_1 = 0$, a tedy $\alpha_2 = -1 + 2\mathrm{i}, \alpha_3 = -1 - 2\mathrm{i}$; e) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, tím lze získat $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{5}, \alpha_3 = 2$; f) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$; g) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$, tím lze získat $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = -\frac{2}{5}$; h) $D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$.
5. a) $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{2}{3}, \alpha_3 = \frac{4}{3}, a = -\frac{4}{3}, b = -\frac{16}{27}$; b) dvě možná řešení:
$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 2, a = -2, b = 0$, nebo $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{4}{3}, \alpha_3 = \frac{2}{3}, a = 2, b = -\frac{32}{27}$.
6. Označíme-li kořeny α, β, potom $\alpha = -\beta$ a nutně $b = 0$. Dále $\alpha^2\beta^2 = 1$, odkud $\alpha \in \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$. Je-li $\alpha = \pm 1$, pak $a = -2$. Je-li $\alpha = \pm\mathrm{i}$, pak $a = 2$.

11. Obecný tvar algebraické rovnice, binomická rovnice, algebraické rovnice stupně 2, 3 a 4

11,1. ZÁKLADNÍ POJMY

11,1.1. Definice. Nechť T je těleso, T' jeho nadtěleso (příp. nadobor integrity), $n \in \mathbb{N}$. *Obecnou algebraickou rovnicí* (v jedné neznámé x) *nad tělesem* T rozumíme každý zápis tvaru

$$f(x) = g(x), \text{ kde } f, g \in T[x]. \tag{1}$$

Prvek $\alpha \in T'$ nazveme *řešením* této rovnice, jakmile v T' platí rovnost

$$f(\alpha) = g(\alpha).$$

Množinu všech řešení rovnice (1) v T' budeme značit $\mathcal{P}$.

Je-li $f = g$, nazýváme (1) *triviální rovnicí* (zřejmě v tomto případě $\mathcal{P} = T'$). Je-li $g = 0$ a f polynom stupně n, pak rovnici

$$f(x) = 0 \tag{2}$$

nazýváme *algebraickou rovnicí stupně* n (viz též kap. 10).

11,1.2. Poznámka. Řešit rovnici (1) vlastně znamená matematickou úlohu popsat (tak, aby nemohlo dojít k nedorozumění) všechny prvky množiny $\mathcal{P}$. Pojem "řešení rovnice" je zde tedy chápán jednak jako označení pro určité prvky z T, jednak jako proces, jehož cílem je určení množiny $\mathcal{P}$ jiným (srozumitelným) způsobem, např. výčtem prvků nebo vzorcem. Otázka, kdy lze rovnici pokládat za vyřešenou, je proto již v samé podstatě věcí určité dohody. Z tohoto hlediska pojmy "řešení" a "vyřešení" rovnice v sobě skrývají úskalí správného metodického přístupu.

11,1.3. Definice. Buďte $f, g, r, s \in T[x]$. Obecné algebraické rovnice $f(x) = g(x)$ a $r(x) = s(x)$ nazveme *ekvivalentními*, jestliže se rovnají jejich množiny řešení.

11,1.4. Věta. *Buďte $g \neq h$ dva polynomy z $T[x]$ a nechť $k \in T$ je libovolný nenulový prvek. Potom pro každý polynom $f = k(g - h)$ jsou rovnice*

$$f(x) = 0 \text{ a } g(x) = h(x)$$

ekvivalentní.

11,1.5. Důsledek. K libovolné (netriviální) obecné algebraické rovnici (1) lze přiřadit s ní ekvivalentní algebraickou rovnici stupně n, ve které polynom f je normovaný zapsaný v normálním tvaru.

11,1.6. Poznámka. Řešení algebraické rovnice $f(x) = 0$ je zároveň kořenem polynomu $f \in T[x]$. Řešit algebraickou rovnici $f(x) = 0$ proto znamená určit všechny kořeny polynomu f.

11,1.7. Definice. Buď $k \leq n$. Řekneme, že prvek $\alpha \in T$ je *k-násobným řešením* rovnice $f(x) = 0$ stupně n, jestliže α je k-násobným kořenem polynomu $f \in T[x]$.

11,1.8. Věta. *Buď $f \in T[x]$ stupně n a T algebraicky uzavřené těleso. Označme $\mathcal{P} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ množinu všech řešení algebraické rovnice $f(x) = 0$. Jsou-li $n_1, n_2, \ldots, n_k$ po řadě násobnosti kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ polynomu f, pak platí*

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$$

Poznámka. V tomto případě říkáme, že $\mathcal{P}$ má n prvků $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ počítaných s jejich násobností.

11,1.9. Definice. Nechť T' je nadtěleso tělesa T, nechť $0 \neq c \in T, n \in \mathrm{N}, n \geq 1$. Rovnici tvaru

$$x^n - c = 0 \tag{3}$$

nazýváme *binomickou rovnicí (stupně n) nad tělesem T*. Každé její řešení $\alpha \in T'$ nazýváme *n-tou odmocninou z c v T'* a píšeme $\alpha = \sqrt[n]{c}$.

11,1.10. Úmluva. V dalším výkladu budeme uvažovat pouze případ $T = T' = \mathrm{C}$ a budeme hovořit krátce o n-té odmocnině z c.

11,1.11. Definice. Nechť $n \in N$. Pak *n-tou odmocninou z jedné* rozumíme každé řešení binomické rovnice

$$x^n - 1 = 0$$

v tělese C komplexních čísel. *Primitivní n-tou odmocninou z jedné* rozumíme každou n-tou odmocninu z jedné, která není řešením žádné jiné binomické rovnice $x^k - 1 = 0$, kde $k < n$.

11,1.12. Věta. *Nechť ε je libovolná primitivní n-tá odmocnina z jedné. Potom prvky $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ představují právě n navzájem různých řešení binomické rovnice*

$$x^n - 1 = 0.$$

11,1.13. Věta. *Nechť ε je libovolná primitivní n-tá odmocnina z jedné a nechť α je libovolná n-tá odmocnina z c. Potom komplexní čísla*

$$\alpha, \alpha\varepsilon, \alpha\varepsilon^2, \ldots, \alpha\varepsilon^{n-1}$$

jsou všechna navzájem různá řešení binomické rovnice $x^n - c = 0$.

11,1.14. Poznámka. Je-li komplexní číslo $c \neq 0$ dáno v goniometrickém tvaru $c = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, potom každé řešení $\alpha_k, 1 \leq k \leq n$, binomické rovnice $x^n - c = 0$ je tvaru

$$\alpha_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Primitivní n-tou odmocninou z jedné je každé číslo

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},$$

kde k je nesoudělné s n.

11,1.15. Definice. Buď T těleso, $n \in \mathrm{N}$ a nechť $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou prvky z T. Řekneme, že *prvek b lze racionálně vyjádřit v T pomocí prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$*, jestliže b lze získat jako výsledek konečného počtu tělesových operací (tj. sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovými prvky) prováděných na prvky $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

11,1.16. Definice. Nechť $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \in \mathrm{C}[x]$. Řekneme, že algebraická rovnice $f(x) = 0$ (v jedné neznámé x) je *algebraicky řešitelná*, jestliže existuje konečná posloupnost binomických rovnic

$$\begin{aligned} y^{n_1} - b_1 &= 0, \\ y^{n_2} - b_2 &= 0, \\ &\vdots \\ y^{n_k} - b_k &= 0 \end{aligned}$$

taková, že

- b_1 lze racionálně vyjádřit v C pomocí prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$;
- pro každé $1 \leq j < k$ lze prvek b_{j+1} racionálně vyjádřit v C pomocí prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_j$;
- každé řešení rovnice $f(x) = 0$ lze racionálně vyjádřit v C pomocí prvků $a_1, a_2, \ldots, a_n$, ale i všech řešení binomických rovnic z této posloupnosti.

Posloupnost binomických rovnic nazýváme *řetězcem algebraické řešitelnosti algebraické rovnice* $f(x) = 0$.

11,1.17. Důsledek. *Každá binomická rovnice je v* $\mathbb{C}$ *algebraicky řešitelná.*

11,1.18. Věta. *Každá algebraická rovnice stupně* $1, 2, 3, 4$ *je v* $\mathbb{C}$ *algebraicky řešitelná.*

11,1.19. Věta. *Mezi algebraickými rovnicemi stupně aspoň* 5 *existují takové, které nejsou algebraicky řešitelné.*

11,1.20. Poznámka. Pro algebraické rovnice stupně aspoň 5 neexistují (a ani nemohou existovat) obecně platné vzorce pro výpočet kořenů. Přestože kořeny nelze určit vzorci, lze je určit aspoň přibližnými metodami. Algebraická řešitelnost některých rovnic vyšších stupňů souvisí úzce s problematikou grup a je propracována v Galoisově teorii.

11,1.21. Věta (vzorec pro řešení kvadratické rovnice). *Nechť je dána kvadratická rovnice* $x^2 + px + q = 0$, *kde* $p, q \in \mathbb{C}$. *Potom každé řešení* α_1, α_2 *této rovnice je tvaru*

$$\alpha_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{D_2}}{2},$$

kde $D_2(\alpha_1, \alpha_2) = p^2 - 4q$ *a* $\sqrt{D_2}$ *je libovolná druhá odmocnina z komplexního čísla* $D_2(\alpha_1, \alpha_2)$.

11,1.22. Věta (vzorec pro řešení kubické rovnice - Cardanovy formule). *Nechť je dána kubická rovnice* $x^3 + px + q = 0$, *kde* $p, q \in \mathbb{C}$. *Je-li* ε *libovolná primitivní třetí odmocnina z jedné a* $D_3 = -4p^3 - 27q^2$ *diskriminat této rovnice, potom má rovnice řešení* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *tvaru*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}},\\
\alpha_2 &= \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}},\\
\alpha_3 &= \varepsilon^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \varepsilon\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}.
\end{aligned}$$

11,1.23. Poznámka. Substitucí

$$x = y - \frac{a_1}{3}$$

lze obecnou kubickou rovnici

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

převést na tvar

$$y^3 + py + q = 0.$$

11,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

11,2.1. V oboru C nalezněme všechna řešení rovnice

$$(x+2)^3 = (x-3)^3.$$

Řešení. Obecnou rovnici upravíme na slgebraickou rovnici stupně $n \leq 3$:

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= x^3 - 9x^2 + 27x - 27, \\ 15x^2 - 15x + 35 &= 0, \\ 3x^2 - 3x + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení poslední kvadratické rovnice určíme pomocí vzorce:

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 84}}{6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{6}\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

11,2.2. Převedením na binomickou rovnici nalezněme v oboru C všechna řešení kvadratické rovnice

$$x^2 + 2(2+\mathrm{i})x + (1+2\mathrm{i}) = 0.$$

Řešení. Rovnici upravíme doplněním na druhou mocninu součtu:

$$x^2 + 2(2+2\mathrm{i})x + (2+\mathrm{i})^2 - (3+4\mathrm{i}) + 1 + 2\mathrm{i} = 0,$$

tj.

$$[x + (2+\mathrm{i})]^2 - (2+2\mathrm{i}) = 0.$$

Substitucí $y = x + (2+\mathrm{i})$ převedeme tuto rovnici na binomickou rovnici stupně 2

$$y^2 - (2+2\mathrm{i}) = 0.$$

Jestliže číslo $2 + 2\mathrm{i}$ zapíšeme v goniometrickém tvaru, dostaneme

$$y^2 - \sqrt{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Odtud

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right), \\ y_2 &= \sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{8}\right), \end{aligned}$$

a tedy pro řešení x_1, x_2 dané rovnice platí

$$x_1 = y_1 - (2+\mathrm{i}), x_2 = y_2 - (2+\mathrm{i}).$$

11,2.3. Určeme primitivní a) druhé odmocniny z jedné; b) třetí odmocniny z jedné.

Řešení. a) Binomická rovnice $x^2 - 1 = 0$ má pouze dvě řešení $1, -1$. Číslo 1 však vyhovuje i rovnici $x^1 - 1 = 0$. Proto primitivní druhá odmocnina z jedné je jen číslo -1.

b) Binomická rovnice $x^3 - 1 = 0$ má celkem tři řešení

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x_3 &= \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Čísla $-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ jsou obě primitivní třetí odmocniny z jedné.

11,2.4. Určeme všechna řešení kubické rovnice

$$x^3 - 2x + 3 = 0.$$

Řešení. Platí

$$D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = -4.(-2)^3 - 27.3^2 = -211.$$

Podle Cardanových formulí je

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{633}} + \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{633}} \doteq \\ &\doteq \sqrt[3]{-0{,}1022505} + \sqrt[3]{-2{,}8977495} \doteq -1{,}8932892, \\ x_2 &= \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{633}} + \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{633}} = \\ &= -\frac{1}{2}x_1 + \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{633}} - \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{633}}\right], \\ x_3 &= -\frac{1}{2}x_1 - \mathrm{i}\sqrt{\frac{3}{2}}\left[\sqrt[3]{-\frac{3}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{633}} - \sqrt[3]{-\frac{3}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{633}}\right]. \end{aligned}$$

Při přibližném numerickém výpočtu lze psát

$$\begin{aligned} x_1 &\doteq -1{,}8932892, \\ x_2 &\doteq 0{,}9466446 + 0{,}82970343\,\mathrm{i}, \\ x_3 &\doteq 0{,}9466446 - 0{,}82970343\,\mathrm{i}. \end{aligned}$$

11,2.5. Nalezněme všechna řešení kubické rovnice

$$x^3 + 2x^2 - 3x + \frac{128}{27} = 0.$$

Řešení. Rovnici upravíme substitucí $x = y - \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}
&\left(y - \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - 3\left(y - \frac{2}{3}\right) + 4 = \\
&= y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y - \frac{8}{27} + 2\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) - 3y + 2 + 4 = \\
&= y^3 - \frac{13}{3}y + \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

Pro výpočet kořenů $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ rovnice $y^3 - \frac{13}{3}y + \frac{22}{3} = 0$ použijeme Cardanovy formule. V našem případě $p = -\frac{13}{3}, q = \frac{22}{3}$. Proto

$$\begin{aligned}
D_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -4p^3 - 27q^2 = -4\left(-\frac{13}{3}\right)^3 - 27\left(\frac{22}{3}\right)^2 = \\
&= \frac{-30.416}{27}, \\
y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{11}{3} + \frac{1}{18}\sqrt{\frac{30.416}{9}}} + \sqrt[3]{-\frac{11}{3} - \frac{1}{18}\sqrt{\frac{30.416}{9}}} \doteq \\
&\doteq -2{,}662, \\
y_2 &= \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{11}{3} + \frac{1}{18}\sqrt{\frac{30.416}{9}}} + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{11}{3} - \frac{1}{18}\sqrt{\frac{30.416}{9}}} \doteq \\
&\doteq 0{,}9310 + 0{,}9907\,\mathrm{i}, \\
y_3 &= \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{11}{3} + \frac{1}{18}\sqrt{\frac{30.416}{9}}} + \\
&\quad + \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{-\frac{11}{3} - \frac{1}{18}\sqrt{\frac{30.416}{9}}} \doteq \\
&\doteq 0{,}9310 - 0{,}9907\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Kořeny x_1, x_2, x_3 dostaneme substitucí $x = y - \frac{2}{3}$. Při výpočtu na čtyři desetinná místa je

$$\begin{aligned}
x_1 &\doteq -3{,}3286, \\
x_2 &\doteq -0{,}2871 + 0{,}9907\,\mathrm{i}, \\
x_3 &\doteq -0{,}2871 - 0{,}9907\,\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

11,2.6. V oboru C nalezněme všechna řešení binomické rovnice

$$x^6 - 16 = 0.$$

Řešení. K nalezení všech řešení stačí znát jednu z šestých odmocnin ze 16 a primitivní šestou odmocninu z jedné. Platí:

$$\sqrt[6]{16} = (2^4)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4}{6}} = \sqrt[3]{4}.$$

Šesté odmocniny z jedné nalezneme pomocí vyjádření v goniometrickém tvaru:

$$\begin{aligned}
y_1 &= \cos 60^\circ + \mathrm{i}\sin 60^\circ = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
y_2 &= \cos 120^\circ + \mathrm{i}\sin 120^\circ = -\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
y_3 &= \cos 180^\circ + \mathrm{i}\sin 180^\circ = -1,\\
y_4 &= \cos 240^\circ + \mathrm{i}\sin 240^\circ = -\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
y_5 &= \cos 300^\circ + \mathrm{i}\sin 300^\circ = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2},\\
y_6 &= \cos 360^\circ + \mathrm{i}\sin 360^\circ = 1.
\end{aligned}$$

Přitom primitivní šesté odmocniny z jedné jsou pouze čísla y_1, y_5. Pro řešení zadané binomické rovnice tedy platí

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2},\\
x_2 &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2},\\
x_3 &= -\sqrt[3]{4},\\
x_4 &= -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2},\\
x_5 &= \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{2},\\
x_6 &= \sqrt[3]{4}.
\end{aligned}$$

11,3. CVIČENÍ

11,3.1. V oboru C nalezněte všechna řešení algebraických rovnic:
a) $(x-1)^3 = (x+3)^3$;
b) $(2x-1)^3 = (2x+3)(2x+1)^2$;
c) $(x+1)^3 + (x-2)^3 = (x+2)^3 + (x-1)^3$;
d) $(x+1)(x-2)(x+3) = (x-1)(x+2)(x-3)$.

11,3.2. V oboru C nalezněte všechna řešení kvadratických rovnic s komplexními koeficienty:
a) $x^2 - (2 + 4i)x + (-3 + 4i) = 0$;
b) $x^2 - (3 + 2i)x + (5 + 5i) = 0$;
c) $x^2 + 5 - 12i = 0$;
d) $x^2 + 1 + 2i\sqrt{6} = 0$;
e) $x^2 + ix + 1 = 0$;
f) $x^2 - x + i = 0$.

11,3.3. Pomocí Cardanových formulí určete všechna řešení kubické rovnice v oboru C, jestliže:
a) $x^3 - 5x + 4 = 0$;
b) $x^3 - 3x + 4 = 0$;
c) $x^3 - 5x - 2 = 0$;
d) $x^3 - 6x + 5 = 0$;
e) $x^3 - 2 + 2i = 0$;
f) $x^3 - 12 - 5i = 0$.

11,3.4. V oboru C nalezněte všechna řešení binomických rovnic:
a) $x^5 - 1 = 0$; b) $x^6 - 1 = 0$;
c) $x^7 - 1 = 0$; d) $x^8 - 1 = 0$;
e) $x^9 - 1 = 0$; f) $x^{10} - 1 = 0$;
g) $x^5 - 1024 = 0$; h) $x^6 - 729 = 0$;
i) $x^7 + 128 = 0$; j) $x^8 + 625 = 0$;
k) $x^9 - 343 = 0$; l) $x^{10} + 32 = 0$.

11,3.5. Nalezněte všechna řešení kubické rovnice v oboru C, jestliže víte, že lze určit aspoň jedno řešení:
a) $x^3 + 6x^2 - 3x - 4 = 0$;
b) $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$;
c) $x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0$;
d) $2x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$;
e) $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$;
f) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;
g) $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$;
h) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$.

11,3.6. V oboru C nalezněte řešení kubické rovnice pomocí Cardanových formulí, jestliže:
a) $x^3 + (1 + i)x + (2 - i) = 0$;

b) $x^3 + (2 + 3\mathrm{i})x + (-5 + \mathrm{i}) = 0$;
c) $x^3 + (1 - 2\mathrm{i})x + (1 + 2\mathrm{i}) = 0$;
d) $x^3 + (2 - \mathrm{i})x + (3 - 2\mathrm{i}) = 0$;
e) $x^3 + (1 + \mathrm{i})x + (1 - \mathrm{i}) = 0$;
f) $x^3 + (2 - \mathrm{i})x + (1 + 2\mathrm{i}) = 0$.

11,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $x_{1,2} = -1 \pm \frac{2\mathrm{i}\sqrt{3}}{3}$; b) $x_{1,2} = \frac{-5\pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{8}$; c) $x_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{7}{3}}$; d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.
2. a) $x_{1,2} = 1 + 2\mathrm{i}$;
b) $x_{1,2} = \frac{3+2\mathrm{i}\pm\sqrt{-15-8\mathrm{i}}}{2}$; protože $-15 - 8\mathrm{i} \doteq 17(\cos\ 208^\circ + \mathrm{i}\ \sin\ 208^\circ)$, je
$\sqrt{-15 - 8\mathrm{i}} \doteq 4{,}1231(-0{,}2419 + 0{,}9703\,\mathrm{i})$; přibližné hodnoty:
$x_1 \doteq 1{,}999 - 1{,}000\,\mathrm{i}, x_2 \doteq 1{,}001 + 3{,}000\,\mathrm{i}$; zkouškou se můžete přesvědčit, že
$x_1 = 2 - \mathrm{i}, x_2 = 1 + 3\mathrm{i}$;
c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-5 + 12\mathrm{i}}$; protože $-5 + 12\mathrm{i} \doteq 13(\cos\ 112^\circ 36' + \mathrm{i}\sin\ 112^\circ 36')$, je
$\sqrt{-5 + 12\mathrm{i}} \doteq 1{,}999 + 3\mathrm{i}$; skutečná hodnota: $x_1 = 2 + 3\mathrm{i}, x_2 = -2 - 3\mathrm{i}$;
d) $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1 - 2\mathrm{i}\sqrt{6}} = \pm\sqrt{5(\cos\ 258{,}3^\circ + \mathrm{i}\sin\ 258{,}3^\circ)} = \pm(-1{,}4142 + 1{,}732\,\mathrm{i})$;
přesná hodnota: $x_1 = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3}$;
e) $x_{1,2} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)\mathrm{i}$;
f) $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1-4\mathrm{i}}}{2}$, kde $1 - 4\mathrm{i} \doteq \sqrt{17}(\cos\ 76^\circ - \sin\ 76^\circ)$.
3. Uvádíme pouze první řešení podle Cardanových formulí.
a) $x_1 = \sqrt[3]{-2 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{204}}{18}} + \sqrt[3]{-2 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{204}}{18}}, D_3 = 68$;
b) $x_1 = \sqrt[3]{-2 + \frac{\sqrt{972}}{18}} + \sqrt[3]{-2 - \frac{\sqrt{972}}{18}}, D_3 = -324$;
c) $x_1 = \sqrt[3]{1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{1176}}{18}} + \sqrt[3]{1 - \mathrm{i}\frac{\sqrt{1176}}{18}}, D_3 = 392$;
d) $x_1 = \sqrt[3]{-\frac{5}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{567}}{18}} + \sqrt[3]{-\frac{5}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{567}}{18}}, D_3 = 189$; e) jde o binomickou rovnici
$x^3 = \sqrt{8}(\cos\ 315^\circ + \mathrm{i}\ \sin\ 315^\circ)$, proto $x_1 = \sqrt[6]{8}(\cos\ 105^\circ + \mathrm{i}\ \sin\ 105^\circ)$; f) jde
o binomickou rovnici $x^3 = 13(\cos\ 85{,}6^\circ + \mathrm{i}\ \sin\ 85{,}6^\circ)$, proto
$x_1 = \sqrt[3]{13}(\cos\ 28{,}5^\circ + \mathrm{i}\ \sin\ 28{,}5^\circ)$.
4. a) $x_k = \cos\ \frac{2\pi k}{5} + \mathrm{i}\sin\ \frac{2\pi k}{5}, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
b) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_{3,4} = \frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_{5,6} = \frac{-1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$; c) $x_k = \cos\ \frac{2\pi k}{7} + \mathrm{i}\sin\ \frac{2\pi k}{7}, 1 \le k \le 7$;
d) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \mathrm{i}, x_4 = -\mathrm{i}, x_{5,6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}, x_{7,8} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$;
e) $x_k = \cos\ \frac{2\pi k}{9} + \mathrm{i}\sin\ \frac{2\pi k}{9}, 1 \le k \le 9$; f) protože $(x^5 - 1)(x^5 + 1) = x^{10} - 1$, můžete
hledat řešení jako řešení dvou rovnic nižšího stupně;
$x_k = \cos\ \frac{2\pi k}{10} + \mathrm{i}\sin\ \frac{2\pi k}{10}, 1 \le k \le 10$; g) $x_k = 4(\cos\frac{2\pi k}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{5}), 1 \le k \le 5$;
h) $x_k = 3(\cos\frac{2\pi k}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{6}), 1 \le k \le 6$; i) $x_k = (-2)(\cos\frac{2\pi k}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{7}), 1 \le k \le 7$;
j) $x_k = (-\sqrt{5})(\cos\frac{2\pi k}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{8}), 1 \le k \le 8$; k) $x_k = (\sqrt[3]{7})(\cos\frac{2\pi k}{9} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{9}), 1 \le k \le 9$.
5. a) $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-7\pm\sqrt{33}}{2}$; b) $x_1 = -1, x_2 = -2, x_3 = -1$; c) $x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$;

d) $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}$; e) $x_1 = -1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; f) $x_1 = -1, x_{2,3} = \pm i$;
g) $x_1 = 1, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$; h) $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$.

6. Uvádíme pouze řešení x_1 (bez dalších úprav).

a) $D_3 = -73 + 100i, x_1 = \sqrt[3]{-\frac{2-i}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{219 - 300i}} + \sqrt[3]{-\frac{2-i}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{219 - 300i}}$;
b) $D_3 = -464 + 234i, x_1 = \sqrt[3]{\frac{5-i}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{\frac{5-i}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$;
c) $D_3 = 125 - 116\,i, x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1+2i}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{1+2i}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$;
d) $D_3 = -143 + 368\,i, x_1 = \sqrt[3]{\frac{-3+2i}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{\frac{-3+2i}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$;
e) $D_3 = 8 + 46\,i, x_1 = \sqrt[3]{\frac{-1+i}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{\frac{-1+i}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$;
f) $D_3 = 73 - 64\,i, x_1 = \sqrt[3]{-\frac{1+2i}{2} + \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}} + \sqrt[3]{-\frac{1+2i}{2} - \frac{1}{18}\sqrt{-3D_3}}$.

12. Algebraická řešitelnost některých speciálních typů rovnic v C

12,1. ZÁKLADNÍ POJMY

A. Snížení stupně algebraické rovnice pomocí součinu polynomů

12,1.1. Věta. *Buď dána algebraická rovnice $f(x) = 0$ v oboru C a nechť v C$[x]$ platí $f = gh$. Jsou-li rovnice $g(x) = 0, h(x) = 0$ algebraicky řešitelné s množinami řešení $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, potom řešeními rovnice $f(x) = 0$ jsou právě všechny prvky množiny $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.*

12,1.2. Poznámka. Věta 12,1.1 nedává (a ani nemůže dávat) obecný návod k řešení algebraické rovnice. Lze ji použít pouze tehdy, když se podaří odhalit způsob, jak polynom f vhodně upravit do tvaru součinu dvou či více polynomů. To by se mělo odrážet i ve formulaci úloh na řešení rovnic touto metodou. Zvláštním případem je tzv. odstranění známého kořene α polynomu f v jeho násobnosti k. V tomto případě lze psát $f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$. V praxi to znamená "uhodnout" nějaký kořen polynomu f (např. celočíselný nebo racionální u polynomů ze Z$[x]$) a určit polynom g.

B. Snížení stupně algebraické rovnice substitucí typu $y = x^n$

12,1.3. Věta. *Nechť je dána algebraická rovnice typu*

$$a_{kn}x^{kn} + a_{k(n-1)}x^{k(n-1)} + \ldots + a_k x^k + a_0 = 0. \qquad (1)$$

a nechť rovnice

$$a_{kn}y^n + a_{k(n-1)}y^{n-1} + \ldots + a_k x + a_0 = 0 \qquad (2)$$

je algebraicky řešitelná v C. Potom každé řešení α rovnice (1) je řešením některé binomické rovnice

$$x^k - \beta = 0,$$

kde β je vhodné řešení rovnice (2), a tedy (1) je algebraicky řešitelná.

12,1.4. Poznámka. Tvar rovnice (1) dává ihned návod, jak její řešení určit — pomocí substituce $y = x^k$ snížit stupeň rovnice. Nejjednodušším případem jsou tzv. ***bikvadratické*** *rovnice*

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

kde $p, q \in \mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$, se kterými se setkáváme i ve středoškolské matematice. Stejně tak nepřekvapí ani tzv. *trikvadratická rovnice* typu

$$x^6 + px^3 + q = 0.$$

Umíme-li řešit kubické rovnice, můžeme takto řešit i rovnice

$$x^6 + ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ resp. } x^9 + ax^6 + bx^3 + c = 0,$$

kde $a, b, c \in \mathbf{R}$ či $\mathbf{C}$.

C. Reciproké rovnice

12,1.5. <u>Definice.</u> Polynom $f \in \mathbf{C}[x]$ nazveme *reciprokým*, jestliže pro každý kořen $\alpha \in \mathbf{C}$ je jeho kořenem i číslo $1/\alpha$.

12,1.6. <u>Poznámka.</u> Kořeny reciprokého polynomu mohou být také čísla $1, -1$, pro která je podmínka o převrácené hodnotě automaticky splněna. Ostatní kořeny vystupují ve dvojicích a umožňují snížit stupeň reciproké rovnice.

12,1.7. <u>Věta.</u> *V reciprokém polynomu $f \in \mathbf{C}[x]$ tvaru*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

platí buď

(a) $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \ldots, a_k = a_{n-k}, \ldots,$
nebo

(b) $a_0 = -a_n, a_1 = -a_{n-1}, \ldots, a_k = -a_{n-k}, \ldots.$

Naopak polynom f, pro jehož koeficienty platí (a) *nebo* (b), *je polynom reciproký.*

12,1.8. <u>Definice.</u> Rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

ve které platí pro koeficienty vztahy (a) z věty 12,1.7 nazýváme *kladně reciprokou rovnicí*. Platí-li pro koeficienty vztah (b) z věty 12,1.7, hovoříme o *záporně reciproké rovnici.*

12,1.9. <u>Věta.</u> *Záporně reciproká rovnice $f(x) = 0$ má vždy řešení* 1. *Je-li k násobnost kořene* 1 *polynomu f a je-li*

$$f(x) = (x-1)^k g(x),$$

potom $g(x) = 0$ je kladně reciproká rovnice.

12,1.10. Věta. *Každá kladně reciproká rovnice lichého stupně má vždy řešení* -1.

12,1.11. Důsledek. Kladně reciproká rovnice, jejímž kořenem není číslo -1, je nutně sudého stupně.

12,1.12. Věta. *Každá reciproká rovnice stupně* $n \leq 9$ *je algebraicky řešitelná.*

12,1.13. Poznámka. Kladně reciproký polynom f stupně $2m \leq 8$ zapíšeme při řešení do tvaru

$$f(x) = x^m \left[a_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + a_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + a_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_m\right].$$

Substituce $y = x + 1/x$ umožňuje určit všechna řešení, nebot' platí:

$$\begin{aligned} y &= x + \tfrac{1}{x}, & & \\ y^2 &= (x + \tfrac{1}{x})^2 = (x^2 + \tfrac{1}{x^2}) + 2 & &\Rightarrow x^2 + \tfrac{1}{x^2} = y^2 - 2, \\ y^3 &= (x + \tfrac{1}{x})^3 = (x^3 + \tfrac{1}{x^3}) + 3(x^2\tfrac{1}{x} + x\tfrac{1}{x^2}) & &\Rightarrow x^3 + \tfrac{1}{x^3} = y^3 - 3y. \end{aligned}$$

Analogicky lze vyjádřit rekurentně pomocí $y, y^2, \ldots, y^k$ další výrazy typu $x^k + 1/x^k$. Substituce $x + 1/x$ tak vlastně umožňuje snížit stupeň na polovinu a převést řešení reciproké rovnice na řešení jiné algebraické rovnice stupně $m \leq 4$, která je algebraicky řešitelná.

12,1.14. Důsledek. Při řešení reciprokých rovnic vyšších stupňů nejprve určíme násobnost kořenů 1 a -1 a tyto kořeny odstraníme. K dalšímu snížení stupně může případně posloužit odstranění vícenásobných kořenů. Algebraickou řešitelnost lze zaručit pouze tehdy, jestliže po snížení stupně reciproké rovnice dostaneme rovnici nejvýše stupně 8.

12,2. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

12,2.1. V oboru C řešme rovnici

$$x^4 + x^2 + 1 = 0.$$

Řešení. Rovnici lze řešit a) jako rovnici bikvadratickou, b) jako rovnici reciprokou.
a) Řešeními bikvadratické rovnice pro $z = x^2$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

jsou čísla

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Řešeními původní rovnice jsou proto čísla

$$x_{1,2} = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}, \quad x_{3,4} = \sqrt{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}.$$

Tyto výrazy by bylo možné ještě dále upravit tak, aby neobsahovaly druhou odmocninu z komplexního čísla.

b) Řešme zadanou rovnici jako reciprokou rovnici. Tento způsob je v našem případě jednodušší a výsledky dostaneme už přímo v algebraickém tvaru. Položíme-li $y = x + 1/x$, je možné rovnici upravit do tvaru

$$(y^2 - 2) + 1 = 0,$$

která má dvě řešení $y_1 = 1, y_2 = -1$. K nalezení řešení původní rovnice stačí řešit dvě rovnice

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ a } x + \frac{1}{x} = -1,$$

což po úpravě vede na kvadratické rovnice

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ a } x^2 + x + 1 = 0.$$

Všechna řešení zadané rovnice proto jsou

$$x_1 = \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_3 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_4 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

12,2.2. V oboru C nalezněme všechna řešení kvadratické rovnice s komplexními koeficienty

$$x^2 + (2 - 6\mathrm{i})x + (1 + 2\mathrm{i}) = 0.$$

Řešení. Lze postupovat dvěma způsoby. a) Můžeme upravit rovnici pomocí substituce $y = x + (1 - 3\mathrm{i})$ a řešit binomickou rovnici pro y. b) Můžeme využít vzorec $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ pro řešení kvadratické rovnice s tím, že číslo $\sqrt{D}$ je řešením binomické rovnice $z^2 - D = 0$. Z hlediska početní náročnosti jsou oba postupy srovnatelné.

a) Postupně dostáváme

$$\begin{aligned} x^2 + 2(1 - 3\mathrm{i})x + (1 - 3\mathrm{i})^2 - (1 - 3\mathrm{i})^2 + (1 + 2\mathrm{i}) &= 0, \\ [x + (1 - 3\mathrm{i})]^2 - (1 - 6\mathrm{i} - 9) - (-1 - 2\mathrm{i}) &= 0, \\ y^2 - (-9 - 8\mathrm{i}) &= 0. \end{aligned}$$

Převedeme číslo $-9 - 8\mathrm{i}$ do goniometrického tvaru:

$$-9 - 8\mathrm{i} \doteq 12{,}0416(\cos 221°38' + \mathrm{i} \sin 221°38').$$

Pro řešení této rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &\doteq 3{,}4701(\cos 110°49' + \mathrm{i}\sin 110°49'), \\ y_2 &\doteq 3{,}4701(\cos 290°49' + \mathrm{i}\sin 290°49'). \end{aligned}$$

Vyjádříme-li y_1, y_2 v algebraickém tvaru, máme přibližně

$$y_1 \doteq -1{,}7257 + 3{,}2435\mathrm{i}; \; y_2 \doteq 1{,}7257 - 3{,}2435\mathrm{i}.$$

Pomocí substituce $x = y - 1 + 3\mathrm{i}$ vyjádříme zpětně hodnoty pro x:

$$x_1 \doteq -2{,}7257 + 6{,}2435\mathrm{i}; \; x_2 \doteq 0{,}7257 - 0{,}2435\mathrm{i}.$$

b) Platí

$$D = (2 - 6\mathrm{i})^2 - 4.1.(1 + 2\mathrm{i}) = -36 - 32\mathrm{i}.$$

Abychom mohli určit $\sqrt{D}$, vyjádříme D v goniometrickém tvaru:

$$D = \sqrt{2320}(\cos 221°38' + \mathrm{i}\sin 221°38');$$

odtud dostáváme

$$\sqrt{D} \doteq -3{,}4514 + 6{,}4870\mathrm{i}.$$

Pro řešení x_1, x_2 tedy platí vztahy

$$\begin{aligned} x_1 &\doteq \frac{-(2-6\mathrm{i}) + (-3{,}4514 + 6{,}4870\mathrm{i})}{2} = -2{,}7257 + 6{,}2435\mathrm{i}, \\ x_2 &\doteq \frac{-(2-6\mathrm{i}) - (-3{,}4514 + 6{,}4870\mathrm{i})}{2} = 0{,}7257 - 0{,}2435\mathrm{i}. \end{aligned}$$

12,2.3. Je dán polynom $x^4 + px^2 + qx + 1$. Určeme koeficienty $p, q \in \mathbb{C}$ a zbývající kořeny, jestliže víme, že $\alpha_1 = 1 + 2\mathrm{i}, \alpha_2 = 1 - 2\mathrm{i}$.

Řešení. Uvedeme dva možné způsoby řešení.

a) Podle kořenových vztahů víme, že

$$\begin{aligned} -(\alpha_3 + \alpha_4 + 1 + 2\mathrm{i} + 1 - 2\mathrm{i}) &= 0, \\ \alpha_3\alpha_4(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i}) &= 1. \end{aligned}$$

Proto pro kořeny α_3, α_4 platí

$$\begin{aligned} -\alpha_3 - \alpha_4 &= 2, \\ \alpha_3\alpha_4 &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Čísla α_3, α_4 jsou proto řešením kvadratické rovnice

$$y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0.$$

Pomocí vzorce pro řešení kvadratické rovnice dostáváme

$$\alpha_{3,4} = y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - \frac{4}{5}}}{2} = -1 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

Ze znalosti kořenů již snadno určíme i zbývající koeficienty p, q daného polynomu:

$$\begin{aligned} -q &= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \\ &= \alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3\alpha_4 = 5.(-2) + 2.\frac{1}{5} = -\frac{48}{5}. \end{aligned}$$

Tedy

$$q = \frac{48}{5}.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} p &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4 = \\ &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4) = 5 + \frac{1}{5} + 2.(-2) = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

b) Úlohu řešíme dosazením:

$$f(1+2i) = (1+2i)^4 + p(1+2i)^2 + q(1+2i) + 1 = 0,$$

odkud dostáváme jednu lineární rovnici o neznámých p, q nad C

$$0 = -6 - 24i + p(-3+4i) + q(1+2i).$$

Analogicky

$$f(1-2i) = (1-2i)^4 + p(1-2i)^2 + q(1-2i) + 1 = 0,$$

odkud dostáváme druhou lineární rovnici o neznámých p, q nad C

$$0 = -6 + 24i + p(-3-4i) + q(1-2i).$$

Komplexní čísla p, q jsou tedy řešeními soustavy dvou rovnic o dvou neznámých v C

$$\begin{aligned} p(-3+4i) + q(1+2i) &= 6 + 24i, \\ p(-3-4i) + q(1-2i) &= 6 - 24i. \end{aligned}$$

Soustavu vyřešíme pomocí matic:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3+4i, & 1+2i & 6+24i \\ -3-4i, & 1-2i & 6-24i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4i, & 2i & 24i \\ -3, & 1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 2, & 1 & 12 \\ -3, & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1, & 0 & \frac{6}{5} \\ 0, & 1 & \frac{48}{5} \end{array}\right)$$

Tedy

$$p = \tfrac{6}{5}, q = \tfrac{48}{5}.$$

Nyní vypočteme podíl $f(x) : [(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)] = (x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$:

$$\begin{array}{l}
(x^4 \quad +\frac{6}{5}x^2+\frac{48}{5}x+1) : (x^2-2x+5) = x^2+2x+\frac{1}{5} \\
-(x^4 \; -2x^3 \; +5x^2) \\
\hline
\qquad 2x^3-\frac{19}{5}x^2+\frac{48}{5}x+1 \\
\quad -(2x^3 \; -4x^2+10x) \\
\hline
\qquad\qquad \frac{1}{5}x^2 \; -\frac{2}{5}x+1 \\
\qquad -(\frac{1}{5}x^2 \; -\frac{2}{5}x+1) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Odtud dostaneme zbývající řešení α_3, α_4:

$$\alpha_{3,4} = x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-\frac{4}{5}}}{2} = -1 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}.$$

c) Uveďme ještě třetí, nejrychlejší způsob, který používá Hornerovo schéma. Platí

	1	0	p	q	1
$1+2i$	0	$1+2i$	$-3+4i$	$(1+2i)p-11-2i$	$(1+2i)q+(-3+4i)p-7-24i$
	1	$1+2i$	$p-3+4i$	$q+(1+2i)p-11-2i$	$\boxed{(1+2i)q+(-3+4i)p-6-24i}$
$1-2i$	0	$1-2i$	$2-4i$	$(1-2i)p-1+2i$	
	1	2	$p-1$	$\boxed{q+2p-12}$	

Protože α_1, α_2 jsou kořeny daného polynomu, dostáváme soustavu rovnic (maticově) pro p, q:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1, & 2 & 12 \\ 1+2i, & -3+4i & 6+24i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1, & 2 & 12 \\ 0, & -5 & -6 \end{array}\right),$$

takže $q = \frac{6}{5}, p = \frac{48}{5}$. Z posledního řádku Hornerova schématu vidíme, že α_3 a α_4 jsou kořeny polynomu $y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0$, který má uvedené kořeny.

12,2.4. V oboru C určeme všechna řešení kladně reciproké rovnice

$$x^8 + 2x^7 - 3x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Řešení. Ověříme, zda (a případně v jaké násobnosti) je řešením číslo 1:

	1	2	-3	-2	4	-2	-3	2	1
$t = 1$	0	1	3	0	-2	2	0	-3	-1
	1	3	0	-2	2	0	-3	-1	$\boxed{0}$
$t = 1$	0	1	4	4	2	4	4	1	
	1	4	4	2	4	4	1	$\boxed{0}$	

Tedy $x = 1$ je řešení násobnosti 2 (v dalším kroku Hornerova schématu už nemůže vyjít 0, protože všechny koeficienty v posledním vypočítaném řádku jsou kladné). Dále ověříme, zda je řešením číslo -1:

	1	4	4	2	4	4	1	
$t = -1$	0	-1	-3	-1	-1	-3	-1	
	1	3	1	1	3	1	$\boxed{0}$	
$t = -1$	0	-1	-2	1	-2	-1		
	1	2	-1	2	1	$\boxed{0}$		
$t = -1$	0	-1	-1	2	-4			
	1	1	-2	4	$\boxed{-3}$	$\neq 0$		

Tedy $x = -1$ je řešení opět násobnosti 2. Rovnici lze psát ve tvaru

$$(x+1)^2(x-1)^2(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1) = 0.$$

K určení dalších řešení je třeba řešit reciprokou rovnici

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$(x^4 + 1) + 2x(x+1) - x^2 = 0.$$

Vynásobíme-li poslední rovnici výrazem $1/x^2$ a použijeme substituci $y = x + 1/x$, dostaneme

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Přitom platí $y^2 = (x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$, a tedy

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Odtud máme

$$(y^2 - 2) + 2y - 1 = 0, \text{ tj. } (y+3)(y-1) = 0.$$

Poslední kvadratická rovnice má dvě řešení $y_1 = 1, y_2 = -3$. Pro x tedy platí

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ a } x + \frac{1}{x} = -3.$$

Odtud dostáváme dvě kvadratické rovnice pro x:

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ a } x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Ze vzorců pro rešení kvadratické rovnice máme

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \\ x_{3,4} &= \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Daná reciproká rovnice má proto celkem osm řešení

$$\begin{array}{llll} x_1 = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, & x_2 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, & x_3 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, & x_4 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \\ x_5 = -1, & x_6 = -1, & x_7 = 1, & x_8 = 1. \end{array}$$

12,2.5. V oboru C nalezněme všechna řešení rovnice $x^{12} - 1 = 0$.

Řešení. Můžeme určit všechna řešení v goniometrickém tvaru, příp. převést tato řešení do tvaru algebraického. Na druhé straně však můžeme polynom $x^{12} - 1$ rozložit v součin:

$$\begin{aligned} x^{12} - 1 &= (x^3 - 1)(x^3 + 1)(x^6 + 1) = \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření lze okamžitě určit kořeny

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = \mathrm{i}, \alpha_4 = -\mathrm{i}, \alpha_{5,6} = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \alpha_{7,8} = \frac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Dále pro $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 - ax + 1)$ roznásobením dostaneme $2 - a^2 = -1$, tj. $a = \sqrt{3}$. Zbývající kořeny tedy jsou

$$\alpha_{9,10} = \frac{\sqrt{3} \pm \mathrm{i}}{2}, \alpha_{11,12} = \frac{-\sqrt{3} \pm \mathrm{i}}{2}.$$

12,3. CVIČENÍ

12,3.1. V oboru C nalezněte všechna řešení algebraické rovnice $f(x) = 0$, jestliže:
a) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6$; b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 15$;
c) $f(x) = x^6 + 3x^3 - 4$; d) $f(x) = x^6 - 5x^3 - 14$;
e) $f(x) = x^8 - 6x^4 + 8$; f) $f(x) = x^8 - 5x^4 + 6$;
g) $f(x) = x^9 - 3x^3 + 2$; h) $f(x) = x^9 - 2x^3 - 21$.

12,3.2. V oboru C nalezněte všechna řešení reciproké rovnice $f(x) = 0$, jestliže:
a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$;
b) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
c) $f(x) = x^4 + 1$;
d) $f(x) = x^4 - 1$;
e) $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
f) $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$;
g) $f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$;
h) $f(x) = x^5 - 1$;
i) $f(x) = x^5 + 1$;
j) $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$;
k) $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
l) $f(x) = x^6 - 1$;
m) $f(x) = x^6 + 1$.

12,3.3. V oboru C nalezněte všechna řešení reciproké rovnice $f(x) = 0$, jestliže:
a) $f(x) = x^8 - 4x^7 + 2x^6 + 5x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 1$;
b) $f(x) = x^9 - x^8 - 7x^7 + 15x^6 - 8x^5 - 8x^4 + 15x^3 - 7x^2 - x + 1$;
c) $f(x) = x^{10} - 4x^8 - 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 1$;
d) $f(x) = x^{10} - 6x^8 - 6x^7 + 5x^6 + 12x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 6x^2 + 1$.

12,3.4. Popište všechna řešení reciproké rovnice $f(x) = 0$ v oboru C, jestliže:
a) $f(x) = x^4 + (1 + \mathrm{i})x^3 + (1 - \mathrm{i})x^2 + (1 + \mathrm{i})x + 1$;
b) $f(x) = x^4 + \mathrm{i}x^3 + x^2 + \mathrm{i}x + 1$;
c) $f(x) = x^5 + \mathrm{i}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - \mathrm{i}x - 1$;
d) $f(x) = x^5 + \mathrm{i}x^4 - x^3 + x^2 - \mathrm{i}x - 1$;
e) $f(x) = 2x^4 + (3 + \mathrm{i})x^3 + 4x^2 + (3 + \mathrm{i})x + 2$.

12,4. VÝSLEDKY CVIČENÍ

1. a) $y^2 + 5y - 6 = 0, y = x^2, x_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{6}, x_{3,4} = \pm 1$;

b) $y^2 - 2y - 15 = 0, y = x^2, x_{1,2} = \pm\sqrt{5}, x_{3,4} = \pm\mathrm{i}\sqrt{3}$; c) $y^2 + 3y - 4 = 0, y = x^3, x_1 = -\sqrt[3]{4}, x_2 = \sqrt[3]{4}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_3 = \sqrt[3]{4}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_4 = 1, x_5 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, x_6 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$;
d) $y^2 - 5y - 14 = 0, y = x^3, x_1 = \sqrt[3]{7}, x_2 = \sqrt[3]{7}(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_3 = \sqrt[3]{7}(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_4 = -\sqrt[3]{2}, x_5 = -\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_6 = -\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})$;
e) $y^2 - 6y + 8 = 0, y = x^4, x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2}, x_{3,4} = \pm\mathrm{i}\sqrt[4]{2}, x_{5,6} = \pm\sqrt{2}, x_{7,8} = \pm\mathrm{i}\sqrt{2}$;
f) $y^2 - 5y + 6 = 0, y = x^4, x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2}, x_{3,4} = \pm\mathrm{i}\sqrt[4]{2}, x_{5,6} = \pm\sqrt[4]{3}, x_{7,8} = \pm\mathrm{i}\sqrt[4]{3}$;
g) $y^3 - 3y + 2 = (y + 2)(y - 1)^2 = 0, y = x^3, x_1 = -\sqrt[3]{2}, x_2 = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_3 = \sqrt[3]{2}(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_{4,5} = 1, x_{6,7} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, x_{8,9} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; h) $y^3 - 2y - 21 = 0, y = x^3, x_1 = \sqrt[3]{3}, x_2 = \sqrt[3]{3}(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_3 = \sqrt[3]{3}(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}), x_{4,5,6} = \sqrt[3]{\frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}}, x_{7,8,9} = \sqrt[3]{\frac{-3-\mathrm{i}\sqrt{19}}{2}}$.

2. Substituce $y = x + 1/x$.
a) $y^2 + 2y - 1 = 0, x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}, x_{3,4} = \frac{-1+\sqrt{2}\pm\mathrm{i}\sqrt{2\sqrt{2}+1}}{2}$;
b) $y^2 + y - 1 = 0, x_{1,2} = \frac{-1-\sqrt{5}\pm\mathrm{i}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, x_{3,4} = \frac{-1+\sqrt{5}\pm\mathrm{i}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$;
c) $y^2 - 2 = 0, x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2}\pm\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}, x_{3,4} = \frac{\sqrt{2}\pm\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$; d) rozkladem na součin $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1), x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \pm\mathrm{i}$; e) rozkladem na součin $(x + 1)(x^4 + x^2 + 1), x_{1,2} = \frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_{3,4} = \frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_5 = -1$; f) rozkladem na součin $(x - 1)(x^4 + x^2 + 1), x_{1,2} = \frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_{3,4} = \frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_5 = 1$; g) rozkladem na součin $(x - 1)(x^4 - x^2 + 1), x_{1,2} = \frac{\sqrt{3}\pm\mathrm{i}}{2}, x_{3,4} = \frac{-\sqrt{3}\pm\mathrm{i}}{2}, x_5 = 1$; h) rozkladem na součin $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$, viz b); i) rozkladem na součin $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1), x_{1,2} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, x_{3,4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, x_5 = -1$;
j) lze položit $y = x^2$ a řešit rovnici $y^3 + y^2 + y + 1 = (y + 1)(y^2 + 1) = 0$, odkud $x_{1,2} = \pm\mathrm{i}, x_{3,4} = \pm\sqrt{\mathrm{i}}, x_{5,6} = \pm\sqrt{-\mathrm{i}}$; k) $y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0$, další substituce $y = z - \frac{1}{3}$ převede na $z^3 - \frac{7}{3}z - \frac{7}{27} = 0$; jiný postup: původní rovnici rozšíříme výrazem $x - 1$ a řešíme binomickou rovnici $x^7 - 1 = 0$, řešení úlohy jsou všechna řešení této rovnice různá od 1; l) rozkladem na součin $(x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1), x_{1,2} = \frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_{3,4} = \frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_{4,5} = \pm 1$;
m) $y^3 - 3y = 0, x_{1,2} = \frac{\sqrt{3}\pm\mathrm{i}}{2}, x_{3,4} = \frac{-\sqrt{3}\pm\mathrm{i}}{2}, x_5 = \pm\mathrm{i}$.

3. a)
$x_{1,2} = \pm 1, x_{3,4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x_{5,6} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{13} \pm \sqrt{2\sqrt{13} - 2}), x_{7,8} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{13} \pm \mathrm{i}\sqrt{2\sqrt{13} + 2})$ (návod: odstaňte kořeny 1, -1 násobnosti 1 a substitucí $y = x + 1/x$ převeďte na řešení rovnice $y^3 - 4y^2 + 9 = (y - 3)(y^2 - y - 3) = 0$);
b) $x_{1,2} = 1, x_3 = -1, x_{4,5} = \frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, x_{6,7} = \frac{\sqrt{33}-1\pm\sqrt{18-2\sqrt{33}}}{4}, x_{8,9} = \frac{-\sqrt{33}-1}{4} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{18+2\sqrt{33}}}{4}$ (návod: odstraňte kořen 1 násobnosti 2 a kořen -1 násobnosti 1 a substitucí $y = x + 1/x$ převeďte na řešení rovnice $y^3 - 9y + 8 = 0$);
c) $x_{1,2} = 1, x_{3,4,5,6} = -1, x_{7,8} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}), x_{9,10} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{2\sqrt{2} + 1})$ (návod: odstraňte kořen 1 násobnosti 2 a kořen -1 násobnosti 4 a substitucí $y = x + 1/x$ převeďte na řešení rovnice $y^2 - 2y - 1 = 0$);
d) $x_{1,2} = 1, x_{3,4,5,6} = -1, x_{7,8} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, x_{9,10} = \frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ (návod: odstraňte kořen 1

násobnosti 2 a kořen -1 násobnosti 4 a substitucí $y = x + 1/x$ převeďte na řešení rovnice $y^2 - 2y - 3 = 0$).

4. Uvádíme pouze převedení na řešení jednodušších algebraických rovnic. a) Substituce $y = x+1/x$, $y^2+(1+\mathrm{i})y-1-\mathrm{i} = 0$, $y_{1,2} = \frac{-1-\mathrm{i}\pm\sqrt{4+6\mathrm{i}}}{2}$; b) substituce $y = x+1/x$, $y^2+\mathrm{i}y-1 = 0$, $y_{1,2} = \frac{-\mathrm{i}\pm\sqrt{3}}{2}$; c) $x_1 = 1$, vytknutí $x-1$ a substituce $y = x+1/x$, $y^2+(1+\mathrm{i})y-3+\mathrm{i} = 0$, $y_{1,2} = \frac{-1-\mathrm{i}\pm\sqrt{12-2\mathrm{i}}}{2}$; d) $x_1 = 1$, vytknutí $x-1$ a substituce $y = x+1/x$, $y^2+(1+\mathrm{i})y-2+\mathrm{i} = 0$, $y_{1,2} = \frac{-1-\mathrm{i}\pm\sqrt{8-2\mathrm{i}}}{2}$; e) substituce $y = x+1/x$, $2y^2+(3+\mathrm{i})y = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = -\frac{3+\mathrm{i}}{2}$ ($x_{1,2} = \pm\mathrm{i}$, $x_3 = -1-\mathrm{i}$, $x_4 = \frac{-1+\mathrm{i}}{2}$).