### *mathematical economics*: nástroje, koncepty, modely…

efektivní alokace zdrojů – optimalizace

*bonus*–*melior*–*optimus* … *magnus*–*maior*–*maximus* … *exterus*–*exterior*–*extremus*

### Optimalizační úlohy

1. **Co se vyplatí?** Od kolika ujetých kilometrů ročně se vyplatí pořídit si slevový průkaz ČD IN 25 (25% sleva na jízdném), resp. IN 50 (50% sleva na jízdném)? Aktuálně stojí IN 25 ročně 600 Kč, IN 50 pak 3.600 Kč; počítejte, že cena za 1 km při běžném jízdném je průměrně 1,80 Kč.

---

1. **Optimalizace funkce jedné proměnné.** Firma poskytující internetové připojení zajišťuje příjem pro 25 000 domácností a účtuje si 850 Kč měsíčně. Výzkum trhu ukázal, že každá stokoruna, o kterou vzroste měsíční poplatek, způsobí ztrátu přibližně 1 000 zákazníků, naopak každý pokles ceny o 100 Kč přiláká přibližně 1 000 nových zákazníků.

Jakou nastavíte cenu (můžete zvolit libovolnou celočíselnou), abyste dosáhli nejvyššího zisku?

Zároveň vše přehledně shrňte: najděte předpisy funkce počtu zákazníků $q$ na nastavené ceně $p$ a funkce zisku $r$ na ceně $p$ a načrtněte jejich grafy.

*Nápověda:*

1. Sestavte si tabulku několika trojic hodnot $p$, $q$ a $r$.
2. Vyneste několik bodů $\left[p;q\right]$ do prvního grafu, určete, jaká funkce jimi prochází, a na základě toho dopočítejte její předpis.
3. Dosaďte $q$ určené pomocí $p$ do předpisu $r(p,q)$, zjistěte, co je to za funkci (teď už jen jedné proměnné $p$), a pomocí předpisu nebo grafu najděte její maximum.

**Bonus – dobrovolný domácí úkol:** Zkuste vyřešit variaci této úlohy. Ponechme výchozí zadání: *při 850 Kč máme 25 000 zákazníků*. Ovšem tentokrát: *…výzkum trhu ukázal, že každý nárůst ceny o 100 Kč způsobí ztrátu přibližně 10 % zákazníků a naopak…* Absolutní změnu počtu zákazníků tak nahradíme změnou relativní. Postup bude obdobný, výsledná funkce ovšem jiného druhu – zde už se při hledání maxima neobejdete bez derivace, případně za vás maximum spočítá třeba Wolfram Alpha nebo Excel. Obdobně si můžete zkusit ještě další dvě možné variace (relativní $∆p$, relativní $∆q$ a relativní $∆p$, absolutní $∆q$). Výsledky můžete přinést zítra, případně mi je poslat mailem.

1. Absolutní $∆p$, relativní $∆q$

*Každé zvýšení ceny o 100 Kč způsobí ztrátu přibližně 10 % zákazníků a naopak:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  850 Kč | … |  25 000 zák. |
| $+$ 100 Kč | … |  $-$ 10 % zák. |
| *a naopak* |

1. Relativní $∆p$, relativní $∆q$

*Každé zvýšení ceny o 10 % vyvolá pokles počtu zákazníků o 10 % a naopak:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 850 Kč | … | 25 000 zák. |
| $+$10 % | … | $-$10 % zák. |
| *a naopak* |

1. Relativní $∆p$, absolutní $∆q$

*Každé zvýšení ceny o 10 % vyvolá pokles počtu zákaz-níků o 1 000 a naopak:*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 850 Kč | … | 25 000 zák. |
| $+$10 % | … | $-$1 000 zák. |
| *a naopak* |
|  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Koláč** | **Mák** | **Tvaroh** |
| Makovo-tvarohový | 200 g | 50 g |
| Tvarohovo-makový | 50 g | 200 g |

1. **Optimalizace funkce více proměnných.** Malá cukrárna se chystá péct posvícenské koláče. Receptura požaduje, aby byly plněné mákem a tvarohem; množství máku a tvarohu použité na jeden koláč v jednotlivých variantách uvádí tabulka:

Jeden makovo-tvarohový koláč se tradičně prodává za 48 Kč, jeden tvarohovo-makový za 56 Kč. Spotřeba ostatních surovin je přibližně stejná v obou variantách. Vzhledem k tomu, že těsně před posvícením jsou obě suroviny v okolí rozprodány, musí cukrář vystačit pouze se zásobami – má k dispozici 25 kg máku a 30 kg tvarohu.

Kolik má upéct kterých koláčů, aby dosáhl maximálního zisku? Řešení znázorněte také graficky.

*Nápověda*:

1. Vhodně si označte proměnné a sestavte (ne)rovnice pro spotřebu máku a spotřebu tvarohu.
2. Zakreslete je do grafu, sestavte funkci zisku a určete, pro jako kombinaci bude maximální.
3. Ověřte, která z možných celočíselných kombinací dává skutečně nejvyšší zisk.

---

1. Cukrárna se na svátky chystá péci dva druhy koláčů: makovo-tvarohové a tvarohovo-makové. První se prodává za 50 Kč za kus a je na něj potřeba 150 gramů máku a 50 gramů tvarohu, druhý se prodává za 40 Kč za kus a je na něj naopak potřeba 150 gramů tvarohu a 50 gramů máku. Cukrárna má k dispozici 20 kg máku a 15 kg tvarohu.
2. Situaci ve vhodném měřítku znázorněte graficky: pomocí omezení spotřeby máku a tvarohu ohraničte všechny možné kombinace, kolik může cukrárna napéci jednotlivých druhů koláčů. ↓

Spočítejte, při jaké kombinaci dosáhne cukrárna maximálního zisku a kolik bude činit. (Předpokládáme, že všechny koláče se prodají.) →

Bonus: Na kolik by se za jinak stejných podmínek musela zvýšit cena makovo-tvarohových koláčů, aby se nejvíce vyplatilo napéci pouze je a žádné tvarohovo-makové? →

---

### Obecně optimalizace funkce více proměnných

„…*la solution des questions générales auxquelles donne lieu la théorie des richesses dépend essentiellement non pas de l’algèbre élémentaire, mais de cette branche de l’analyse qui a pour objet des fonctions arbitraires, assujetties seulement à satisfaire à certaines conditions*…“ Cournot

Hledání vázaných extrémů. Např. maximum funkce $f(x,y)$ na křivce $g\left(x,y\right)=c$. Metody: jakobián, Lagrangeovy multiplikátory…



### K dalšímu čtení

Pro celkový kontext i konkrétní příklady: příslušná hesla na (anglické) Wikipedii.

Holman, Robert. *Ekonomie*. 3. aktualizované vydání. Praha: Beck, 2002.

Sokol, Jan. *Moc, peníze a právo: esej o společnosti a jejích institucích*. Praha: Vyšehrad, 2015.

Brealey, Myers, Allen: *Teorie a praxe firemních financí*.

### Klasická díla

Keynes: *General Theory of Employment, Interest and Money*.

Hayek: *Road to Serfdom*.

Mises: *Lidské jednání*.

Fuller: *Morálka práva*.