

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ  
FAKULTA  
Univerzita Karlova

---

**Bc. Jan Zemčík**

**Přístup celočíselného programování  
k navrhnutí volitelného rozvrhu  
chirurgického oddělení**

Ekonometrický seminář 1 - delší referát

---

10. duben 2024

- Cíl práce
- Základní informace
- Plánování operačního sálu
- Formulace úlohy
- Způsob řešení + heuristika
- Data od nemocnice v Lisabonu
- Ukázka výpočtu a výsledku jednoho týdne
- Závěr

- Maximalizovat efektivitu chirurgického oddělení v konkrétní nemocnici v Lisabonu v Portugalsku

- Tato práce se zaměřuje na konkrétní nemocnici v Lisabonu v Portugalsku
- Bereme v úvahu přes 5000 lékařů ročně
- Nemocnice má 5 chirurgických zaměření
- Každé zaměření má 5 sálů, z nichž je vždy jeden určen pro urgentní pacienty
- Všechny místnosti chirurgického oddělení jsou vybaveny stejnou základní výbavou (nejsou mezi nimi podstatné rozdíly)
- Každé speciální vybavení je přenosné, ale kvůli jeho citlivosti na přesun se ho budeme snažit přemísťovat co nejméně

- Každá místnost je přiřazena k určitému chirurgickému zaměření, změna zaměření pro místnost zabere asi 1 hodinu
- Mezi 2 následujícími chirurgickými zákroky musí být pauza alespoň 30 minut z hygienických důvodů a úklidu místnosti
- Každá místnost má pevně daný tým pomocných zdravotních sestřiček
- Každý pacient je přiřazen ke konkrétnímu chirurgovi již během prvotního začlenění do čekacího systému
- Pracovní hodiny chirurga: Po-Pá od 8:30 do 20:00

- Plánování rozvrhu pro chirurgické oddělení se koná pro každou jeho specializaci zvlášť a je na týdenní bázi a vždy v pátek se uzavírá na následující týden
- Náhlé změny mohou být provedeny nejpozději do 12 hodin předchozího dne
- Zákrok je buď urgentní nebo volitelný, budeme se zabývat jen volitelným typem
- Volitelný zákrok může být: ambulantní a tradiční
- Ambulantní zákrok se musí provést do 24 h

- Volitelný zákrok se dělí do 4 skupin:
- **Okamžitý zákrok** - musí být splněn do 72 h
- **Vysoce prioritní zákrok** - musí být splněn do 14 dní
- **Prioritní zákrok** - musí být splněn do 2 měsíců
- **Běžný zákrok** - musí být splněn do 1 roku

- Ve stejné místnosti se provádí 3 akce:
- **Přijetí**
- **Zákrok**
- **Vzbuzení**
- Při akci přijetí a vzbuzení se musí podat anestetika a je zapotřebí speciálních sestřiček
- Při akci zákroku je zapotřebí chirurga a sestřiček určených na zákrok



- Tento problém se v minulosti řešil 3-fázovým postupem:
- 1) Strategické skupinové plánování
- 2) Operační - master plánování
- 3) Volitelný rozvrh - naše situace

- Rozvrh každého operačního sálu je rozdělen mezi skupiny lékařů
- Jedná se o strategická rozhodnutí obvykle na roční bázi
- Tato rozhodnutí jsou určena zejména množstvím a specializací lékařů společně s pomocným personálem a rozpočtem nemocnice

## 2. fáze - Operační - master plánování

- Jedná se o taktickou úroveň v řízení nemocnice
- Určuje opakující se rozvrh operačních sálů, zejména:
  - počet a typ dostupných operačních sálů
  - otevírací hodiny operačních sálů
  - přiřazení priority skupinkám lékařů

### 3. fáze - Volitelný rozvrh

- Každý lékař je přiřazen ke konkrétnímu operačnímu sálu v konkrétní den
- Každému lékaři se určí časové rozmezí, ve kterém může být přiřazen pro daný operační sál

- V pátek je dle priority vybrána množina zákroků  $C$  na další týden
- $C$  - je určena chirurgickou specializací (označuje jí  $J$ ),  $C_j^{SP}, j \in J$   
a také prioritou zákroku:  $C_1^{PR} \in C$  - označuje okamžitý zákrok,  
 $C_2^{PR} \in C$  - označuje vysoce prioritní zákrok
- $H$  - množina chirurgů
- $R$  - množina místností chirurgického oddělení
- $D$  - dny možné k provedení chirurgického výkonu
- $T$  - diskretizovaný čas na časové intervaly k provedení chirurgického výkonu

- Chirurgickému zákroku  $c \in C$  je přiřazen chirurg  $h_c \in H$ , je odhadnuté trvání výkonu, samotný zákrok může začít kdykoli v  $T_c \in T$  tak, aby skončil před koncem pracovní doby chirurga
- Denní a týdenní časové pracovní omezení chirurga  $h \in H$  značíme  $T_{hd}^{MAX_D}$  a  $T_h^{MAX_W}$
- $i_{ctd}$  - možnost ( $i_{ctd} = 1$ ) či nemožnost ( $i_{ctd} = 0$ ) zákroku  $c \in C$  v časovém období  $T_c$  a dni  $d \in D$  kvůli důvodu pacienta či chirurga
- $x_{crt d} = 1$ , pokud zákrok  $c \in C$  začne v období  $t \in T_c$  v den  $d \in D$  a místnosti  $r \in R$ , jinak  $x_{crt d} = 0$
- $y_{jrd} = 1$ , pokud zákrok v chirurgické specializaci  $j \in J$  začne v den  $d \in D$  a místnosti  $r \in R$ , jinak  $y_{jrd} = 0$

$$\max \sum_{c \in C} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T_c} \sum_{d \in D} p_c x_{crt d} \quad (1)$$

$$\text{subject to: } \sum_{r \in R} \sum_{t \in T_c} x_{crt 1} = 1, \forall c \in C_1^{\text{PR}} \quad (2)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{t \in T_c} \sum_{d \in D} x_{crt d} = 1, \forall c \in C_2^{\text{PR}} \quad (3)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{t \in T_c} \sum_{d \in D} x_{crt d} \leq 1, \forall c \in C \setminus (C_1^{\text{PR}} \cup C_2^{\text{PR}}) \quad (4)$$

$$\sum_{c \in C} \sum_{\substack{t'=t-p_c+1-\gamma \\ t' \in T_c}}^t x_{crt'd} \leq 1, \forall r \in R, t \in T, d \in D \quad (5)$$

$$\sum_{r \in R} x_{crt'd} \leq i_{ctd}, \forall c \in C, t \in T_c, d \in D \quad (6)$$

$$\sum_{j \in J} y_{jrd} \leq 1, \forall r \in R, d \in D \quad (7)$$

$$\sum_{c \in C_j^{\text{SP}}} \sum_{t \in T_c} x_{crt'd} \leq y_{jrd} |T|, \forall j \in J, r \in R, d \in D \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{c \in C: \\ h_c = h}} \sum_{\substack{t'=t-p_c+1 \\ t' \in T_c}}^t \sum_{r \in R} x_{crt'd} \leq 1, \forall h \in H, d \in D, t \in T \quad (9)$$



$$\sum_{\substack{c \in C: \\ h_c = h}} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T_c} p_c x_{crt d} \leq T_{hd}^{\text{MAX}_D}, \quad \forall d \in D, h \in H \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{c \in C: \\ h_c = h}} \sum_{d \in D} \sum_{r \in R} \sum_{t \in T_c} p_c x_{crt d} \leq T_h^{\text{MAX}_W}, \quad \forall h \in H \quad (11)$$

$$x_{crt d} \in \{0, 1\}, \quad \forall c \in C, r \in R, t \in T_c, d \in D \quad (12)$$

$$y_{jrd} \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J, r \in R, d \in D \quad (13)$$

- V pátek je dle priority vybrána množina zákroků  $C$  na další týden
- $C$  - je určena chirurgickou specializací (označuje jí  $J$ ),  $C_j^{SP}, j \in J$   
a také prioritou zákroku:  $C_1^{PR} \in C$  - označuje okamžitý zákrok,  
 $C_2^{PR} \in C$  - označuje vysoce prioritní zákrok
- $H$  - množina chirurgů
- $R$  - množina místností chirurgického oddělení
- $D$  - dny možné k provedení chirurgického výkonu
- $T$  - diskretizovaný čas na časové intervaly k provedení chirurgického výkonu

- Chirurgickému zákroku  $c \in C$  je přiřazen chirurg  $h_c \in H$ , je odhadnuté trvání výkonu, samotný zákrok může začít kdykoli v  $T_c \in T$  tak, aby skončil před koncem pracovní doby chirurga
- Denní a týdenní časové pracovní omezení chirurga  $h \in H$  značíme  $T_{hd}^{MAX_D}$  a  $T_h^{MAX_W}$
- $i_{ctd}$  - možnost ( $i_{ctd} = 1$ ) či nemožnost ( $i_{ctd} = 0$ ) zákroku  $c \in C$  v časovém období  $T_c$  a dni  $d \in D$  kvůli důvodu pacienta či chirurga
- $x_{crt d} = 1$ , pokud zákrok  $c \in C$  začne v období  $t \in T_c$  v den  $d \in D$  a místnosti  $r \in R$ , jinak  $x_{crt d} = 0$
- $y_{jrd} = 1$ , pokud zákrok v chirurgické specializaci  $j \in J$  začne v den  $d \in D$  a místnosti  $r \in R$ , jinak  $y_{jrd} = 0$

- Účelová funkce maximalizuje výkon chirurgického oddělení
- Omezení (2) nutí dát zařadit okamžitý zákrok na pondělí (poslední index  $x_{crt1}$ ), aby byla splněna lhůta 72 hodin
- Omezení (3) nutí dát zařadit vysoce prioritní zákrok během týdne, aby byla splněna lhůta 14 dní (ukazuje se, že takové "brzké" zařazení nevede k nepřijatelnému řešení, vše je OK)
- Omezení (4) udává, že zbylé druhy zákroků (prioritní a běžný) mohou či nemusí být v týdnu splněny
- Omezení (5) udává, že ve stejné místnosti nedojde ke dvěma různým zákrokům zároveň
- Omezení (6) udává možnost či nemožnost zákroku kvůli důvodu pacienta či chirurga

- Omezení (7) zaručuje, že v daný den  $d$  a místnosti  $r$  bude dělat zákroky pouze jedno zaměření z chirurgického oddělení
- Omezení (8) určuje vztah mezi  $x_{crt d}$  a  $y_{jrd}$
- Omezení (9) zaručuje, že žádný chirurg nepracuje během jednoho časového období na více zákrocích zároveň
- Omezení (10) a (11) zajišťují, že nebudou lékaři dělat přesčasy, přesčasy se mohou dělat pouze v pondělí, aby se stihly všechny okamžité zákroky (den 1 se uměle "prodlouží")
- Omezení (12) a (13) říkají, že proměnné  $x_{crt d}$  a  $y_{jrd}$  jsou binární

- 3. fáze - **Volitelný rozvrh**, byla ještě rozdělena na 2 po sobě jdoucí fáze podle typu volitelného zákroku - **ambulantní a tradiční**
- Takové rozdělení vede ke snížení dimenze problému a k rychlejšímu vyřešení úlohy
- Jako první se budou řešit tradiční zákroky - vyčleněno 5 pracovišť
- Dále se budou řešit ambulantní zákroky - vyčleněno 1 pracoviště
- Použijeme k oběma rozděleným fázím heuristiku

- Heuristika se dá popsat následujícími kroky:
- 1) V daný den ponecháme naplánované pořadí zákroků, avšak budeme se snažit posunout celý blok zákroků na co nejdřívější dobu (aby doktoři začali pracovat již od rána)
- 2) Snažíme se zařadit na konec každého dne ještě dosud nezařazené zákroky, přičemž stále respektujeme zaměření místnosti chirurgického oddělení a pracovní dobu lékařů (snažíme se maximálně využít volná místa a pracovní náplň doktorů)
- 3) Snažíme se vyměnit 2 až 3 po sobě následující prioritní zákroky za 1 zatím nezařazený zákrok (tím se zvýší účelová funkce, neb nebude potřeba 30 min pauza mezi zákroky)
- 4) Jestli není poslední zákrok dne "okamžitý zákrok", tak se snažíme tento zákrok vyměnit za zatím dosud nezařazený tak, aby se naplnila celá pracovní doba dne

- Máme údaje o 21 050 zákrocích z období 1.1.2004 - 28.12.2007
- Tabulka popisuje dobu trvání (v min) **tradičního** volitelného zákroku
- Medián je nižší než průměr

Surgical speciality	Mean	Median	St.dev.	Minimum	Maximum	Number
Otorhinolaryngology	92	77	61	0	410	2,371
Digestive and general surgery	75	61	53	0	562	6,529
Thorax surgery	110	96	62	5	476	2,148
Urology	72	54	58	2	473	4,165
Angiology and vascular surgery	72	54	54	1	413	1,652



- Tabulka popisuje dobu trvání (v min) **ambulantního** volitelného zákroku
- Medián je nižší než průměr, avšak zde je rozdíl již nepatrný

Surgical speciality	Mean	Median	St.dev.	Minimum	Maximum	Number
Otorhinolaryngology	28	27	13	2	107	1,484
Digestive and general surgery	41	40	22	1	155	1,359
Urology	31	27	18	0	147	412
Angiology and vascular surgery	40	38	18	5	132	488

# Data od nemocnice v Lisabonu

- Tabulka představuje ukázkou již konečného rozpisu čekací fronty pro 4 vybrané týdny, zákroků za týden je více než 2 000
- Převážně je vyjádřeno procentuální zastoupení

	9 February		23 February		2 March		9 March	
	Conv.	Amb.	Conv.	Amb.	Conv.	Amb.	Conv.	Amb.
Number of surgeries	2,043	264	1,984	274	1,944	265	1,899	287
Surgical specialty (%)								
Otorhinolaryngology	9.9	15.5	11.7	19.0	11.2	20.8	10.3	21.3
Digestive and general surgery	52.9	36.8	53.1	37.6	55.6	35.8	55.5	37.6
Thorax surgery	5.0	–	4.6	–	4.0	–	4.3	–
Urology	18.2	3.4	16.9	2.9	15.2	40.0	16.0	37.3
Angiology and vascular surgery	14.0	44.3	13.7	40.5	14.0	3.4	13.9	3.8
Priority level (%)								
Deferred urgency	0.98	0.7	1.2	0	1.0	0	0.8	0
High priority	0.05	0	0	0	0	0	0	0
Priority	3.67	2.3	2.8	2.9	2.7	3.4	2.9	2.8
Normal	95.3	97.0	96	97.1	96.1	96.6	96.3	97.2

# Ukázka výpočtu jednoho týdne

- Použit solver CPLEX 11.0 s časovým omezením cca 8 hodin pro plánování pro 250, 300, 500 a 1000 zákroků
- Plánování pro 1000 zákroků v týdnu nebylo možné dopočítat
- V IP gap - o.m. značí "out of memory"(přes 1 milion proměnných)

Instance	Variables	Consts.	LP time (s)	IP gap (%)	Time to gap (s)	H time (s)	Final gap (%)
Planning week: 12–16 February 2007							
Pw1C_250 <sub>1</sub>	242,200	11,934	1,571.76	9.97	13,895.5	0	6.55
Pw1C_250 <sub>2</sub>	243,525	11,934	435.71	5.27	12,865.3	0	5.17
Pw1C_300 <sub>1</sub>	294,225	11,984	616.66	10.02	6,526.5	0	3.78
Pw1C_300 <sub>2</sub>	295,800	11,984	595.17	7.65	9,131.5	0	5.76
Pw1C_500 <sub>1</sub>	503,625	12,184	444.52	3.74	18,743.2	0	3.46
Pw1C_500 <sub>2</sub>	506,725	12,184	355.71	12.98	9,677.8	0	5.83
Pw1C_1000 <sub>1</sub>	1,035,500	13,864	746.54	o.m.	–	–	–
Pw1C_1000 <sub>2</sub>	1,041,525	13,864	672.01	o.m.	–	–	–

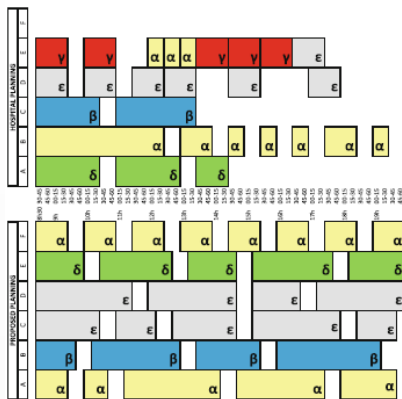
# Ukázka výpočtu jednoho týdne

- Tabulka představuje konečný výsledek pro celou fázi: **3. fáze - Volitelný rozvrh**, včetně zařazení heuristiky pro rozdělení fáze na **ambulantní a tradiční**
- Bez započtení času úklidu, tak výsledný rozvrh dosahuje až **81%** týdenního zaplnění, se započtením času úklidu je to dokonce přes **99%** zaplnění, které bylo i autorama považováno za nejlepší

Instance	Total time (s)	Total gap (%)	Time periods booked			OR occup. rate (%)		
			Conv.	Amb.	Total	Without cl. time	With cl. time	
Planning week: 12–16 February 2007								
Pw1C_250 <sub>1</sub> + Pw1.A_264 <sub>1</sub>	15,481.5	5.54	885	162	1,046	75.87	96.23	
Pw1C_250 <sub>2</sub> + Pw1.A_264 <sub>2</sub>	13,311.0	4.39	889	160	1,049	76.01	96.01	
Pw1C_300 <sub>1</sub> + Pw1.A_264 <sub>1</sub>	7,152.8	3.22	927	161	1,088	78.84	99.35	
Pw1C_300 <sub>2</sub> + Pw1.A_264 <sub>2</sub>	9,748.2	4.89	903	160	1,063	77.03	97.75	
Pw1C_500 <sub>1</sub> + Pw1.A_264 <sub>1</sub>	19,200.5	2.95	955	164	1,119	81.09	98.91	
Pw1C_500 <sub>2</sub> + Pw1.A_264 <sub>2</sub>	10,044.4	4.96	927	162	1,089	78.91	98.33	

# Ukázka výsledného týdenního rozvrhu

- Nahoře je **původní, použitý** rozvrh nemocnice, dole je rozvrh **navržený** autory

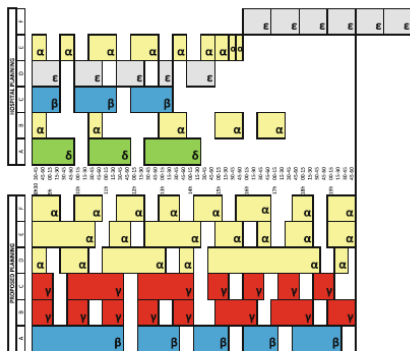


- α** Digestive and General Surgery
- β** Thorax Surgery
- γ** Angiology and Vascular Surgery
- δ** Otorhinolaryngology
- ε** Urology

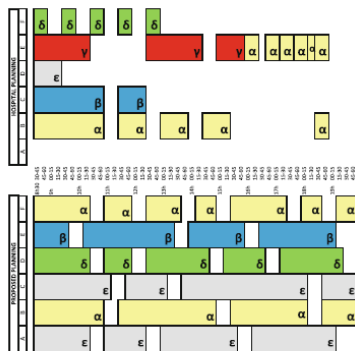
(e) Friday - 16 February 2007

# Ukázka výsledného týdenního rozvrhu

- V **původním** rozvrh nemocnice byly na pracovišti F v **pondělí** přesčasy, v **úterý** dokonce nebylo pracoviště A vůbec využito
- **Původní** plán neplánoval povinné 30 minutové uklízečské pauzy, v úterý **původní** plán neplánoval ani 1 h přestávku na výměnu specializace pracoviště E



(a) Monday - 12 February 2007



(b) Tuesday - 13 February 2007

# Ukázka výsledného týdenního rozvrhu

- **Proposed plan** značí navrhnutý týdenní plán za použití heuristiky, **IP plan** je naopak bez heuristiky
- **Total** značí celkový použitý počet časových bloků
- **Simulace** v sobě zahrnují například situaci, že pacient či lékař náhle svou plánovanou účast zruší

Table 7 Week balance: production indicators

	Time periods booked/used			Cause			Surg.
	Regular time	Over-time	Total	Different duration (%)	Surgery canceled (%)	Surgery added (%)	
Hospital plan	518	10	528				131
Hospital record	590	16	606	28.9	33.2	37.9	127
IP plan	1,039	0	1,039				162
IP simulation	920	52	972	71.6	28.4	–	158
Proposed plan	1,088	0	1,088				161
Prop. plan simulation	991	42	1,033	34.5	65.5	–	154

# Ukázka výsledného týdenního rozvrhu

- **Proposed plan** je více než 2x efektivnější než **plán nemocnice**
- Počet provedených zákroků byl vždy menší než plánovaných
- **Different duration** - značí rozdíl mezi skutečnou dobou trvání a plánovanou dobou trvání (ve smyslu časových bloků)
- **Plán nemocnice** jako jediný očekával méně než ve skutečnosti potřeboval - např. nezapočítával potřebné 30 min uklízečích pauzy

Table 7 Week balance: production indicators

	Time periods booked/used			Cause			Surg.
	Regular time	Over-time	Total	Different duration (%)	Surgery canceled (%)	Surgery added (%)	
Hospital plan	518	10	528				131
Hospital record	590	16	606	28.9	33.2	37.9	127
IP plan	1,039	0	1,039				162
IP simulation	920	52	972	71.6	28.4	–	158
Proposed plan	1,088	0	1,088				161
Prop. plan simulation	991	42	1,033	34.5	65.5	–	154



# Ukázka výsledného týdenního rozvrhu

- 2. sloupec - počet chirurgů nemajících přidělenou žádnou práci pro daný týden
- 3.-5. sloupec - údaje o počtu naplánovaných časových úsecích lékařům
- Po časovém přepočítání: průměrná doba strávená chirurgem v daném týdnu při aktivní službě je: **dle nemocnice** - 39, **dle autorů** s využitím heuristiky - 82 časových jednotek

	Surgeons with no surgeries scheduled (%)	Operating time periods per surgeon			Regular time occup. rate (%)	
		Min	Mean	Max	Without cl. time	With cl. time
Hospital plan	34.4	2	12.9	48	37.54	51.38
Hospital record	36.1	1	15.2	54	42.75	52.97
IP plan	34.4	3	26.0	97	75.29	95.00
IP simulation	34.4	3	24.3	102	66.67	86.09
Proposed plan	34.4	3	27.2	98	78.84	99.35
Prop. plan simulation	36.1	3	26.5	97	71.81	91.09

- Navrhnutý způsob rozvržení týdenních rozvrhů do nemocnice v Lisabonu splňuje všechny požadavky - oproti navržení nemocnice dokonce splňuje požadavků i mnohem více
- Dosahuje týdenní efektivity zaplnění místy i přes 99%
- Autoři doporučují zmíněný způsob řešení používat v praxi
- Zmíníme, že řešená úloha v sobě nezahrnovala omezení například na počet lůžek nemocnice - bylo by vhodné většího prozkoumání - motivace na případný vznik dalšího článku

# Děkuji Vám za pozornost!

## Hlavní zdroje:

General Direction of Health (ed.) (2004) Plano Nacional de Saúde 2004–2010: mais saúde para todos. General Direction of Health, Lisbon (in Portuguese).

Blake JT, Carter MW (2002) A goal programming approach to strategic resource allocation in acute care hospitals. *Eur J Oper Res* 140(3):541–561.

Hans E, Wullink G, van Houdenhoven M, Kazemier G (2008) Robust surgery loading. *Eur J Oper Res* 185(3):1038–1050.