Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

Tomáš Krupa

Ekonometrický seminář 1

Referát

17. apríla 2024

Zdroj

M.T. Claessens, N.M. van Dijk, P.J.Zwaneveld (1998).
Cost optimal allocation of rail passenger lines
European Journal of Operational Research,**110**,474-489.
https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/...

Obsah

- Motivácia
- Riešená úloha (zadanie)
- Značenie
- Formálny zápis
- Výpočet a heuristiky
- Príklad na skutočných dátach

Motivácia

V roku 1998 má Holandská železničná sieť 2800 km, 372 staníc, a denne ňou prejde milión ľudí a 60000 ton tovaru. Zaujímavé vlastnosti cestovného poriadku:

- periodicita
- požiadavka na priame spoje
- dôsledky tejto požiadavky
- ako požiadavku na priame spoje oslabíme

Holandské železnice sa teda rozhodli optimalizovať cestovný poriadok z hľadiska ceny...

Zadanie

Už vieme, že nám ide o minimalizáciu ceny. Budeme limitovaný týmito obmedzeniami:

- počet vlakov na danú koľaj
- počet cestujúcich, ktorý sa potrebujú po danej koľaji dopraviť
- maximálny počet vozňov v súprave

Môžeme meniť tieto parametre:

- trasa liniek
- frekvencia liniek
- počet vagónov súprav jednotlivých liniek

Ako veľmi túto úlohu zjednodušíme?
V akom poradí k tomu pôvodne pristupovali Holandské železnice?

Značenie

Indexy:

- c : počet vozňov
- f : frekvencia danej linky $(f = 1, \ldots, f^{\max})$
- i, j : stanice $(i, j = 1, \ldots, s^{\max})$
- k : koľaj $(k = 1, \ldots, k^{\max})$
- r : trasa danej linky (liniek) $(r = 1, \ldots, r^{\max})$
- t : typ linky $(t \in T \rightarrow \{IC, IR, AR\})$

Parametre:

- $c_t^{\max}$: maximálne množstvo vagónov súpravy daného typu linky t
- $c_t^{\min}$: minimálne množstvo vagónov súpravy daného typu linky t
- $ccap_t$: kapacita vozňov daného typu linky t
- $cfix_t$: cena hodiny prevádzky vozňa daného typu linky t

Značenie

Parametre:

- ckm_t : cena za vozňom prejdený kilometer (závisí na type linky t)
- cp_{ij}^{rt} : multiplikatívna konštanta ku frekvencii
- d_{ij}^{rt} : vzdialenosť medzi stanicami i a j na trase r linky typu t
- f_k^{max} : maximálny počet súprav na koľaj k
- f_k^{min} : minimálny počet súprav na koľaj k
- i_{ijk}^{rt} : indikátor linky (danej indexami)
- n_k : počet cestujúcich na koľaji k
- $trkm_t$: cena jedného kilometra lokomotívy typu t

Formálny zápis

$$\text{minimize} \quad \sum_{r=1}^{r^{\max}} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^{s^{\max}} \sum_{j=i+1}^{s^{\max}} cfix_t \cdot \lceil cp_{ij}^{rt} F_{ij}^{rt} \rceil C_{ij}^{rt} + d_{ij}^{rt}\ \mathrm{ckm}_t\ F_{ij}^{rt}\ C_{ij}^{rt} + d_{ij}^{rt}\ \mathrm{trkm}_t\ F_{ij}^{rt}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{r=1}^{r^{\max}} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^{s^{\max}} \sum_{j=i+1}^{s^{\max}} i_{ijk}^{rt}\ \mathrm{ccap}_t\ F_{ij}^{rt}\ C_{ij}^{rt} \geqslant n_k \qquad \forall k,$$

$$f_k^{\min} \leqslant \sum_{r=1}^{r^{\max}} \sum_{t \in T} \sum_{i=1}^{s^{\max}} \sum_{j=i+1}^{s^{\max}} i_{ijk}^{rt}\ F_{ij}^{rt} \leqslant f_k^{\max} \qquad \forall k,$$

$$c_t^{\min}\ F_{ij}^{rt} \leqslant F_{ij}^{rt} C_{ij}^{rt} \leqslant c_t^{\max}\ F_{ij}^{rt} \qquad \forall i, j > i, r, t,$$

$$0 \leqslant F_{ij}^{rt} \leqslant f^{\max} \text{ and integer} \qquad \forall i, j > i, r, t,$$

$$C_{ijk}^{rt} \geqslant 0 \text{ and integer} \qquad \forall i, j > i, r, t.$$

Formálny zápis - lineárna formulácia

$$\text{minimize} \quad \sum_{r=1}^{r^{\max}} \sum_{t \in T} \sum_{f=1}^{f^{\max}} \sum_{c=c_t^{\min}}^{c_t^{\max}} \sum_{i=1}^{s^{\max}} \sum_{j=i+1}^{s^{\max}} \left(cfix_t \lceil cp_{ij}^{rt}\, f \rceil c X_{ij}^{rtfc} + d_{ij}^{rt}\ \mathrm{ckm}_t\ f c X_{ij}^{rtfc} + d_{ij}^{rt}\ \mathrm{trkm}_t\ f X_{ij}^{rtfc} \right)$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{r=1}^{r^{\max}} \sum_{t \in T} \sum_{f=1}^{f^{\max}} \sum_{c=c_t^{\min}}^{c_t^{\max}} \sum_{i=1}^{s^{\max}} \sum_{j=i+1}^{s^{\max}} i_{ijk}^{rt}\ \mathrm{ccap}_t\ f\ c\, X_{ij}^{rtfc} \geqslant n_k \qquad \forall\ k,$$

$$f_k^{\min} \leqslant \sum_{r=1}^{r^{\max}} \sum_{t \in T} \sum_{f=1}^{f^{\max}} \sum_{c=c_t^{\min}}^{c_t^{\max}} \sum_{i=1}^{s^{\max}} \sum_{j=i+1}^{s^{\max}} i_{ijk}^{rt}\, f\, X_{ij}^{rtfc} \leqslant f_k^{\max} \qquad \forall\ k,$$

$$\sum_{f=1}^{f^{\max}} \sum_{c=c_t^{\min}}^{c_t^{\max}} X_{ij}^{rtfc} \leqslant 1 \qquad \forall\ i, j > i, r, t,$$

$$X_{ij}^{rtfc} \in \{0, 1\} \qquad \forall\ i, j > i, r, t, f, c.$$

Výpočet

Autori hľadali optimálny cestovný poriadok pre nejakú menšiu časť železničnej siete (elaborujeme neskôr), ale aj v tomto prípade bola úloha pomerne veľká:

- 5629 premenných
- 194 obmedzení
- 110000 nenulových koeficientov

Túto úlohu nebolo možné načítať do operačnej pamäte, preto bolo ešte nutné problém reformulovať a použiť nejaké heuristiky (pred použitím metódy Branch and Bound). Konkrétne použili 3 prístupy:

- redukcia problému
- lepšie spodné ohraničenie
- zameranie sa na podproblém

Heuristiky

V rámci redukcie problému autori (okrem využitia štandardných procedúr pre CPLEX 3.0 MIP):

- odstránili nadbytočné koľaje
- odstránili nepotrebné koeficienty, o niektorých linkách sa dá s istotou obmedziť ich frekvencia alebo počet vozňov, nech: $\exists i, j, r, t, f, c : \forall k, i_{ijk}^{rt} = 1 : (n_k - (f * c * ccap_t + (f_k^{min} - f)^+ * min\{ccap_{t'} c_{t'}^{min} | i_{i'j'k}^{r't'} = 1, i \neq i' \vee j \neq j' \vee r \neq r' \vee t \neq t'\})) \leq 0$, potom pre $c^* > c$ je $X_{ij}^{rtfc^*}$ nepotrebné, alebo nech: $\exists i, j, r, t, f, c : \forall k, i_{ijk}^{rt} = 1 : f * c * ccap_t \geq n_k \wedge f \geq f_k^{min}$ potom pre $f^* \geq f \wedge c^* \geq c$ (aspoň jedna nerovnosť je ostrá) je $X_{ij}^{rtf^*c^*}$ nepotrebné, alebo nech: $\exists i, j, r, t, f, c : f > min\{f_k^{max} | i_{ijk}^{rt} = 1\}$ potom pre $f^* \geq f \wedge c^* \geq 0$ je $X_{ij}^{rtf^*c^*}$ nepotrebné.
- použitie dominujúcich premenných, teda keď vie nejaká linka dopraviť väčšie množstvo cestujúcich za nižšiu cenu bez porušenia predpokladov frekvencie

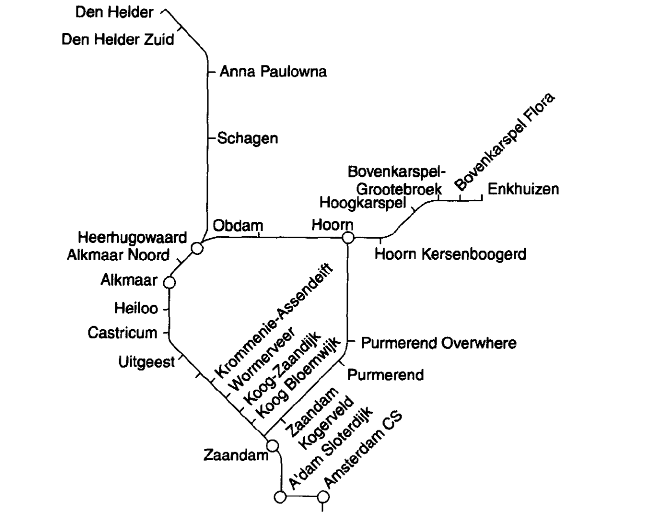
Heuristiky

Pre zlepšenie spodného ohraničenia:

- zaokrúhlenie n_k na pravej strane nahor, na najbližšiu dosiahnuteľnú hodnotu kapacity (súprav)
- nerovnosti pokrytia (cover inequalities)

A nakoniec zameranie sa na podproblém - resp. použitie nejakého dobrého čiastočného riešenia, táto metóda pomáha nájsť slušné riešenia v rozumnom čase.

Príklad



Obr.: Mapa severozápadnej časti Holandskej železničnej siete

Príklad

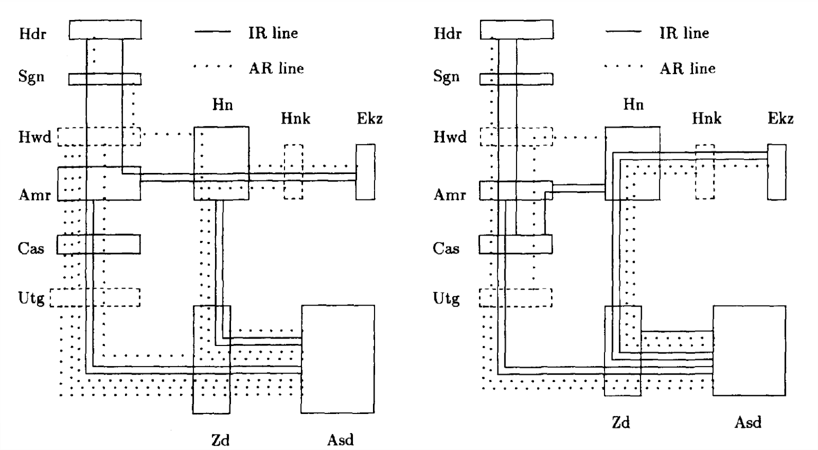
	Initial	Tech 1	Tech 2	Tech 3	Tech 5	Tech 4	Total%
# Variables	5629	5629	1708	1548	1548	1547	−73
# Constraints	194	143	143	143	143	139	−28
# Nonzeros	111,733	64,591	21,313	19,913	19,913	18,192	−84
Lower bound	6920	6920	6975	6975	7255	7577	+10

Obr.: V tabuľke vidíme v akom poradí boli aplikované redukcie a heuristiky, a o koľko zjednodušili úlohu. Proces zabral 10 sekúnd.

	CPU time (s)
Solving LP	0.82
10% MIP gap	29
5% MIP gap	77
0% MIP gap	3989

Obr.: V tabuľke vidíme časy nutné na nájdenie a overenie riešení danej kvality.

Príklad



Obr.: Vľavo vidíme trasy liniek optimalizované podľa ceny, v pravo sú pôvodné trasy.

Line system	Direct travelers	Cost optimal	Difference	
Costs/hour	9473.3	7845.9	−1627.4	(−17.2%)
Unused seats	10,335	5900	−4435	(−42%)
Empty seat kilometers	66,391	33,606	−32,785	(−49%)
Car kilometers	1970	1573	−397	(−20%)
Train kilometers	619	670	+51	(+8%)
Cars needed per day	100	77	−23	(−23%)
Av. train length (in cars)	3.2	2.7	−0.5	(−15%)
Av. route length (in km)	51.6	37.2	−14.4	(−27%)

Obr.: Porovnanie riešení z hľadiska ceny a využitia súprav.

Line system	Direct travelers	Cost optimal	Difference	
Direct travelers (max = 68200)	65,996	62,051	−3945	(−6%)
Direct links (max = 351)	210	154	−56	(−26.6%)
Average number of travelers on a direct link	314	398	+84	(+26.8%)

Obr.: Porovnanie riešení z hľadiska priameho cestovania.

Ďakujem za pozornosť!