

Cost optimal periodic train scheduling

Thomas Linder, Uwe T. Zimmermann

Adam Hlas

Duben 2024

- Vlakové plánování se skládá z příjezdů a odjezdů vlaků a volby typu vlaku na určitou trať.
- Naším cílem je minimalizovat náklady na provoz vlaků za podmínky dodržení jízdniho řádu.
- Jízdní řád je typicky periodický.
- Cestující, kteří přestupují mezi vlaky, nechtějí na přestup čekat moc dlouho, ale zase potřebují určitý čas na přestup mezi vlaky.
- Algoritmus na plánování musí být dostatečně jednoduchý, aby bylo plánování možné provést na průměrných počítačích a v dostatečně krátkém čase.

- Železniční síť je modelována pomocí grafu $G = (V, E)$, kde V je množina dopravních uzlů, například stanice nebo výhybky, a E je množina hran, což jsou tratě spojující jednotlivé uzly.
- Obecně požadujeme, aby jednotlivé linky, například jednotlivé tratě mezi Amsterdamem a Rotterdamem, byly obslouženy v určitém časovém intervalu T . Množinu všech linek označme \mathbf{R} .
- Jednotlivé vlakové spoje na sebe musí „navazovat“. To znamená, že čas mezi příjezdem a_1^S vlaku linky 1 do stanice S a časem odjezdu d_2^S vlaku linky 2 ze stanice S , nesmí být moc dlouhý, aby cestující nemuseli čekat, ale ani moc krátký, aby cestující stihli přestoupit z linky 1 na linku 2.
- Například pro čas na přestup 8 – 15 minut dostaneme podmínku

$$8 \leq a_1^S - d_2^S + z \cdot T \leq 15, \quad z \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

- Hledání proveditelného jízdního řádu se nazývá **periodic event scheduling problem** (*PESP*).
- Problém. Praktické jízdní řády mohou být neproveditelné a je nutné zrelaxovat podmínky.
- Naším cílem je minimalizovat náklady na provoz vlaků. Uvažujme dva typy nákladů.
 - **Fixní náklady**, což jsou náklady na údržbu, parkování přes noc atd.
 - **Operační náklady**, což jsou náklady na ujeté kilometry.
- V našem modelu uvažujeme náklady podle typu vlaku, který je přiřazen na určitou linku. Vlaky se liší v ceně, kapacitě, maximálním počtu vagonů a rychlosti.
- Označme množinu všech vlaků jako **\mathbf{Tr}** . Naším cílem je přiřadit vlaky na jednotlivé linky tak, aby byl dodržen proveditelný plán a abychom minimalizovali náklady na provoz všech linek.

- Pro řešení této úlohy využijeme **mixed integer linear program (MIP)**.
- Budeme uvažovat následující proměnné

$w_{r,\rho,c}$ Linka $r \in \mathbf{R}$ používá vlak typu $\rho \in \mathbf{Tr}$ a $c \in \{\underline{W}, \dots, \overline{W}\}$ vagonů. Binární proměnná,

$a_{r,\mu}^S$ Příjezd vlaku na lince r se směrem μ do stanice S ,

$d_{r,\mu}^S$ Odjezd vlaku na lince r se směrem μ do stanice S ,

z Vektor celých čísel pro PESP podmínku (1).

μ nabývá hodnot 0, 1 podle směru linky, \underline{W} je minimální počet vagonů a \overline{W} je maximální počet vagonů. Celkový model se nazývá **minimum cost scheduling problem (MCSP)**.

$$\min \sum_{r \in \mathbf{R}} \sum_{\rho \in \mathbf{Tr}} \sum_{c=\underline{W}}^{\overline{W}} (\hat{t}_{r,\rho}/T) \cdot (C_{\rho}^{\text{fix}} + c \cdot C_{\rho}^{\text{fix}C}) w_{r,\rho,c} + d_r \cdot (C_{\rho}^{\text{km}} + c \cdot C_{\rho}^{\text{km}C}) w_{r,\rho,c}$$

$$\sum_{r \in \mathbf{R}, r \ni e} \sum_{\rho \in \mathbf{Tr}} \sum_{c=\underline{W}}^{\overline{W}} \Gamma_{\rho} \cdot c \cdot w_{r,\rho,c} \geq N_e \quad \text{pro všechny } e \in E \quad (2)$$

$$\sum_{\rho \in \mathbf{Tr}} \sum_{c=\underline{W}}^{\overline{W}} w_{r,\rho,c} = 1 \quad \text{pro všechny } r \in \mathbf{R} \quad (3)$$

$$\sum_{\rho \in \mathbf{Tr}} \sum_{c=\underline{W}}^{\overline{W}} \underline{\Delta}_{\rho}^{S,S'} w_{r,\rho,c} \leq a_{r,\rho}^{S'} - d_{r,\rho}^S \leq \sum_{\rho \in \mathbf{Tr}} \sum_{c=\underline{W}}^{\overline{W}} \overline{\Delta}_{\rho}^{S,S'} w_{r,\rho,c} \quad (4)$$

pro všechny $r \in \mathbf{R}, (S, S') \in \mathbf{r}$

PESP podmínky (1)

$w_{r,\rho,c} \in \mathbb{Z}, a_{r,\rho}^{S'} \in \mathbb{R}, d_{r,\rho}^S \in \mathbb{R}$, z je vektor celých čísel.

$\hat{t}_{r,\rho}$ je čas, který potřebuje vlak typu ρ na projetí linky r tam a zase zpět.

C_{ρ}^{fix} jsou fixní náklady na provoz jednoho vlak typu ρ .

C_{ρ}^{fixC} jsou fixní náklady na provoz jednoho vagonu typu ρ .

C_{ρ}^{km} jsou náklady na ujetí 1 kilometru vlakem typu ρ .

C_{ρ}^{kmC} jsou náklady na ujetí 1 kilometru vagonem typu ρ .

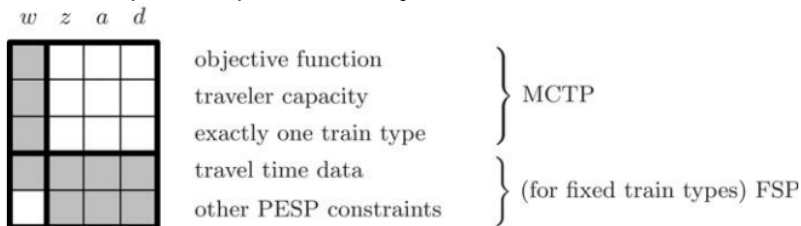
Γ_{ρ} je kapacita jednoho vagonu typu ρ .

N_e je požadovaná minimální kapacita pro hranu e .

$\underline{\Delta}_{\rho}^{S,S'}$ je minimální čas, který potřebuje vlak typu ρ na ujetí vzdálenosti mezi stanicemi S a S' .

$\overline{\Delta}_{\rho}^{S,S'}$ je maximální čas, který potřebuje vlak typu ρ na ujetí vzdálenosti mezi stanicemi S a S' .

- *MCSP* lze rozložit na několik podproblémů, všechny jsou však složité.
- Výběr optimálního typu vlaku ρ a optimálního počtu vagonů c jsou *NP-hard* problémy a generování proveditelného plánu (*PESP*) je *NP-complete* problém.^[1]
- Rozdělíme problém podle následujícího schématu,



kde šedé bloky jsou aktivní proměnné a bílé jsou neaktivní. První problém je takzvaný **minimum cost train problem** (*MCTP*) a druhý problém je **feasible schedule problem** (*FSP*).

^[1] Serafini P, Ukovich W (1989) A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM Journal of Discrete Mathematics* 2(4):550–581

- Celý problém *MSCP* se vyřeší pomocí metody *branch-and-bound*, kde v každé větvi vyřešíme zrelaxovaný problém *MCTP* pro určitý typ vlaku. Označme takové řešení w .
- Poté zjistíme, zda w splňuje *FSP*.
- Jak volit jednotlivé větve? Nesplňuje-li w *FSP*, tak je nutné vyměnit alespoň jeden typ vlaku. Označme Tr_r množinu typu vlaků, které jsou přípustné pro linku $r \in \mathbf{R}$, ρ_r typ vlaku na lince r a $P = |\mathbf{R}|$. Pak větvení provádíme

$$\begin{aligned} Tr_1 \times \cdots \times Tr_P \setminus (\rho_1, \dots, \rho_P) \\ = (Tr_1 \setminus \rho_1) \times \cdots \times Tr_P \cup \cdots \cup Tr_1 \times \cdots \times (Tr_P \setminus \rho_P). \end{aligned}$$

- Problém. Generujeme vždycky $|\mathbf{R}|$ nových problémů. Chtěli bychom vygenerovat méně nových problémů $\mathbf{R}' \subset \mathbf{R}$. Najít takovou množinu linek \mathbf{R}' je *NP-hard* problém. Lze však řešit heuristicky.

- Pro reálná data jsou komerční solvery moc pomalé. Řešení - vhodný *cutting plane*.

Věta

Pro $n \geq 2$, necht' $e \in E$ je hrana obsluhovaná linkami $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{R}$.
 Uvažujme $\delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \{1, \dots, N_e - 1\}$ splňující $\delta := \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i < N_e$. Pak

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\rho \in Tr_i} \sum_{c=\underline{W}_\rho; c \cdot \Gamma_\rho > \delta_i}^{\overline{W}_\rho} w_{r_i, \rho, c} \right) + \sum_{\rho \in Tr_n} \sum_{c=\underline{W}_\rho; c \cdot \Gamma_\rho > N_e - \delta}^{\overline{W}_\rho} w_{r_n, \rho, c} \geq 1 \quad (5)$$

jsou přípustné nerovnosti pro MCTP.

- I pro $n = 2$ máme příliš mnoho nevhodných řezů. Musí se vybrat jen nějaké.

- Pro $n = 2$ označme $\Gamma_i^1 < \dots < \Gamma_i^{k_i}$ všechny potenciální vlakové kapacity na linkách $r_i, i = 1, 2$.

Věta

Nechť $e \in E$ je hrana obsluhovaná pouze linkami r_1 a r_2 a w je přípustné řešení MCTP. Je-li w nepřípustné pro řez (5) pro nějaké $\delta_1 \in \{1, \dots, N_e - 1\}$ pak je nepřípustné i pro řez (5) pro nějaké $\hat{\delta}_1 \in \{\Gamma_1^1 + 1, \dots, \Gamma_1^{k_1} + 1\}$.

- Stačí uvažovat pouze řezy pro zvolené kapacity $\Gamma_1^j, j = 1, \dots, k_1$.

- Uvažujme **malý graf** \hat{G} , který má pouze dvě stanice S_1, S_2 a jednu hranu e , která je obsluhována pouze dvěma linkami r_1 a r_2 .

Věta

Pro malý graf \hat{G} je polyhedron P , definovaný podmínkami

$$\sum_{\rho \in Tr_1} \sum_{c \in \underline{W}_\rho} \bar{w}_\rho w_{r_1, \rho, c} = 1, \quad \sum_{\rho \in Tr_2} \sum_{c \in \underline{W}_\rho} \bar{w}_\rho w_{r_2, \rho, c} = 1, \quad w \geq 0$$

a řezy z podmínky (5), pro všechny hodnoty $\hat{\delta}_1$ definovaných ve větě 2, celočíselný.

- Použitím předchozích vět pro malý graf \hat{G} dostaneme konvexní obal přípustných řešení MCTP, celočíselný polyhedron P .

- Pro řešení *FSP* použijeme algoritmus definovaný ve článku Serafini and Ukovich (1989)^[1] pro *PESP* s modifikací.
- Algoritmus je definován na takzvaném *PESP*-grafu událostí $G' = (V, A)$, kde všechny periodické události (příjezdy a odjezdy vlaků) jsou označeny $v \in V$ a všechny periodické podmínky jsou označeny $a \in A$.
- Cílem algoritmu je najít takzvaný potenciál $\pi \in \mathbb{R}^{|V|}$, který splňuje

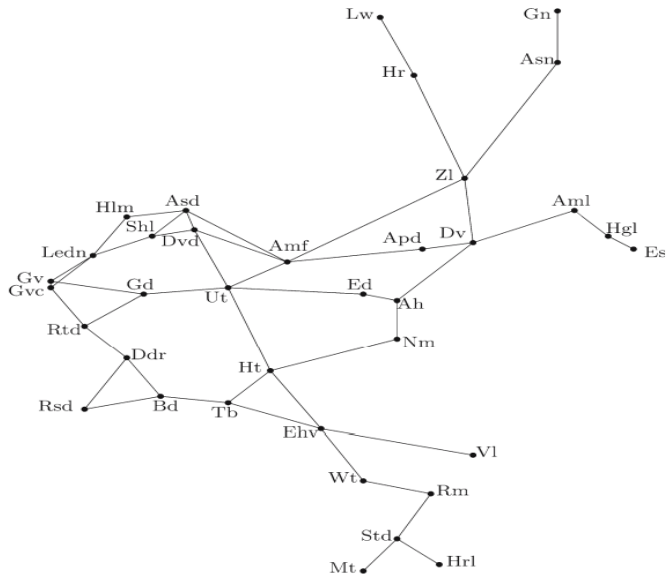
$$l \leq M^T \pi + Tz \leq u, \quad (\pi, z) \in \mathbb{R}^{|V|} \times \mathbb{Z}^{|A|}, \quad (6)$$

kde $l, u \in \mathbb{Z}^{|V|}$ jsou spodní a horní omezení na dobu čekání, T je perioda a M je matice incidence pro v, a .

- V každém kroku algoritmu přidáváme omezení $a \in A$, která ještě nepoužíváme. Budeme-li nejprve volit „hodně restriktivní“ omezení a , pak značně snížíme výpočetní dobu algoritmu.

- Máme data z Německa od společnosti Deutsche Bahn (DB), konkrétně linky pro InterCity (IC) a InterRegio (IR). Z Nizozemska jsou data od společnosti Nederlandse Spoorwegen (NS) z linek typu InterCity (IC), InterRegio (IR) a nákladní linky AggloRegio (AR).
- Je využít CPLEX solver.

	DB-IC	DB-IR	NS-IC	NS-IR	NS-AR
Number of nodes	90	297	36	38	122
Number of edges	107	384	48	40	134
Number of lines	31	89	25	21	117
Average number of edges per line	7.5	5.9	5.0	5.8	4.2



Výsledky *branch-and-bound* algoritmu

Instance	DB-IC	DB-IR	NS-IC	NS-IR	NS-AR
Number of added constraints	0	0	0	0	0
Verified optimum found in	219 s	4 s	30 s	33 s	0:47 h
Optimality gap after 5 min	0%	0%	0%	0%	—*
Instance	DB-IC	DB-IR	NS-IC	NS-IR	NS-AR
Number of added constraints	40	40	40	40	40
Verified optimum found in	9:31 h	122 s	14:00 h	1:20 h	1:24 h
Optimality gap after 5 min	0.10%	0%	0.39%	0.27%	—*

*No solution in 5 min

Výsledky pro MCTP bez a s použitím cutting plane

Inst.	#Con.	#Var.	#≠ 0	Root gap (%)	Time (S)
DB-IC	74	735	3435	0.9	1
DB-IR	69	471	1376	0.3	1
NS-IC	57	793	3237	2.5	20
NS-IR	41	545	2741	1.5	2
NS-AR	178	2221	9328	2.1	865

I	# Iter.	# Cuts	Root gap (%)	Time (S)	I	# Iter.	# Cuts	Root gap (%)	Time (S)
DB-IC	3	7	0.6	1	DB-IR	2	18	0.05	1
NS-IC	10	134	0.6	9	NS-IR	10	94	0.9%	4
NS-AR	9	123	1.1	934					

- Zavedli jsme MIP formulaci pro cost optimization train scheduling problem.
- Přímá metoda výpočtu MCSP je příliš časově náročná. Proto jsme zavedli *branch-and-bound* algoritmus, který značně urychlil výpočetní čas pro nalezení téměř optimálního plánu.
- Pro větší úlohy je doporučeno rozdělit celý problém na jednotlivé regiony, v nich najít „dobré“ řešení a nakonec zkombinovat do celkového řešení.

Optimal lines for railway system

Michael R. Bussieck, Peter Kreuzer, Uwe T. Zimmermann

Adam Hlas

4. dubna 2024

- Není nutné optimalizovat pouze náklady. Chceme minimalizovat celkovou dobu cestování všech cestujících.
- Problém. Pro přestupy mezi linkami neexistuje žádná tabulka s časy, tedy nelze přesně určit čas potřebný k cestě, když cestující mění linky.
- Změna linky je pro cestující velmi nepohodlná. Lze řešit minimalizací přestupů nebo maximalizací přímých spojů.
- Železniční společnosti nabízejí různé typy služeb. Rychlé a daleké spoje, například InterCity (Express) (IC/ICE) nebo InterRegio (IR) a lokální pomalé spoje (CT).
- Pro modelování cestujících a jejich cest se použije takzvaný *system split*. Cestující chce jet z malé stanice **a** do malé stanice **b**. Většinou však neexistují přímé spoje typu IC/ICE/IR. Je nutné najít stanice **c,d**, kde tyto spoje jsou. Cestující pojedje (CT) spojem ze stanice **a** do stanice **c** a z **d** do **b** a mezi stanicemi **c,d** pojedje linkou typu IC/ICE/IR.

- Předpokládejme, že cestující ze stanice **a** do stanice **b** pojede tam a zase zpět. Železniční síť budeme modelovat neorientovaným grafem $G = (V, E)$, V je množina stanic, E je množina hran (tratí).
- Dále uvažujme čas potřebný k projetí linky r jako zobrazení $T_i : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$ a ujetou vzdálenost jako zobrazení $D_i : E \rightarrow \mathbb{Z}_+$.
- Předpoklad. Cestující mezi **a**, **b** stanicemi používají pouze „nejkratší trasu“ vzhledem k T_i nebo D_i . Necht' je nejkratší trasa určena jednoznačně, označme ji P_t .
- Dále požadujeme, aby stanice kde linka začíná nebo končí měli speciální vybavení (koleje na odstavení apod.). Označme tyto stanice $\mathbf{CY} \subset V$. Pouze linky začínající a končící ve stanicích typu \mathbf{CY} jsou přípustné. Označme množinu přípustných linek L_0 . Vzhledem k tomu, že cestující se pohybují pouze po nejkratší trase, tak můžeme L_0 zmenšit na $L = \{l \in L_0 \mid l \text{ je nejkratší cesta mezi } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{CY}\}$.

- Pro modelování chování cestujících označme

$$trvl : \{\{a, b\} | a, b \in V, a \neq b\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$$

počet cestujících mezi stanicemi **a**, **b**.

$$T_\emptyset := \{\{a, b\} | a, b \in V, a \neq b, trvl(\{a, b\}) \neq 0\}$$

množinu všech párů stanic **a**, **b**, kde linka mezi těmito stanicemi nemá nulový počet cestujících.

$f : L \rightarrow \mathbb{Z}_+$ frekvence průjezdu vlaků na nejkratších linkách.

$$fl(e) := \sum_{t \in T_\emptyset, e \in P_t} trvl(t) \text{ celkový počet cestujících po hraně } e.$$

$$lfr(e) := \left\lceil \frac{fl(e)}{\Gamma} \right\rceil \text{ minimum vlaků na hraně } e \text{ pro kapacitu vlaku } \Gamma.$$

- Pro jednoduchost budeme místo $trvl(\{a, b\})$ pro $\{a, b\} = t \in T_\emptyset$ psát zkráceně $trvl(a, b)$ nebo $trvl(t)$.

$$\max \sum_{l \in L} \sum_{t \in T_\emptyset, P_t \subseteq l} d_{t,l}$$

$$\sum_{l \in L, l \supseteq P_t} d_{t,l} \leq \text{trvl}(t) \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, \quad (7)$$

$$\sum_{t \in T_\emptyset, e \in P_t \subseteq l} d_{t,l} \leq \Gamma \cdot f_l \quad \text{pro všechny } e \in E, l \in L, \quad (8)$$

$$\sum_{e \in l \in L} f_l = \text{lfr}(e) \quad \text{pro všechny } e \in E, \quad (9)$$

$$f_l \in \mathbb{Z}_+, d_{t,l} \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, l \in L.$$

- $d_{t,l}$ je počet cestujících cestujících na přímo mezi t , pomocí linky l .
- Lze zrelaxovat $d_{t,l} \geq 0$. Tuto úlohu nazveme **LOP**.

- **LOP** se řeší metodou *branch-and-bound*. Postupně v každém kroku přidáváme jednu přímou linku l do L a vyřešíme tento problém.
- Algoritmus je moc pomalý a musí se často ukončit po určitém čase nebo hloubce stromu. To vede k nejistotám ohledně přípustnosti a optimality nalezených řešení.
- V praxi se však ukazuje, že tento algoritmus dává docela smysluplné výsledky.
- Máme data od společností Deutsche Bahn (DB-IC, DB-IR) a Nederlandse Spoorwegen (NS-IC, NS-IR, NS-CT).
- Je využít CPLEX solver.

Results of the B&B method (interrupted after 10000 nodes)

network	NS-IC	NS-IR	NS-CT
Optimality gap	0.0%	1.9%	4.1%
Running time	30 sec.	1.5 h	12 h

Přehled parametrů

Net parameters and MIP formulation size

network	V	C\	E	C	T	LOP		
						Variables	Constraints	Nonzeros
NS-IC	23	23	31	253	210	2120	1017	6278
NS-IR	86	86	114	3655	2147	116974	28487	556131
NS-CT	385	91	428	4095	11240	583598	96620	3589478
DB-IC	100	100	118	4950	3136	183235	43200	1038761
DB-IR	307	199	398	19701	9215	900173	261308	4853878

Výsledek pro originální a zrelaxovaný program

Computational results with LOP.

network	running time		objective function value		{f _i f _i ∉ Z ₊ }
	LP	MIP	LP	MIP	
NS-IC	10.55	4912.32	9.168.554	8.203.412	141
NS-IR	5284.34	-	21.315.607	-	636
NS-CT	-	-	*25.492.888	-	-
DB-IC	12777.66	-	9.768.973	-	1384
DB-IR	-	-	*8.095.734	-	-

- Chtěli bychom dále zredukovat velikost modelu
- Cestující mezi $t \in T_\emptyset$, kteří používají jiné linky l_1 a l_2 mají různé proměnné d_{t,l_1} , d_{t,l_2} .
- Bude-li splněna podmínka na frekvence linky, můžeme sjednotit všechny přímé cestující mezi t jako $D_t := \sum_{l \in L, P_t \subseteq l} d_{t,l}$.
- Dostaneme menší model.

$$\max \sum_{t \in T_\emptyset} D_t$$

$$D_t \leq \text{trvl}(t) \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, \quad (10)$$

$$D_t \leq \Gamma \cdot \sum_{P_t \subseteq I \in L} f_l \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, \quad (11)$$

$$\sum_{e \in I \in L} f_l = \text{lfr}(e) \quad \text{pro všechny } e \in E, \quad (12)$$

$$f_l \in \mathbb{Z}_+, D_t \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, l \in L.$$

- Opět lze zrelaxovat $D_t \geq 0$. Tuto úlohu nazveme **lop**.
- Lze spočítat pomocí metody *branch-and-bound*, analogicky jako předchozí úlohu.

Výsledek pro zmenšený model

Computational results with **lop**

network	size		running time		objective function value		$ \{f_i \mid f_i \notin \mathbb{Z}_+\} $	
	Variables	Constraints	Nonzeros	LP	MIP	LP		MIP
NS-IC	463	234	3060	0.18	0.66	9.168.554	8.203.412	122
NS-IR	5802	2305	153752	11.07	187.50	28.909.033	21.172.411	502
NS-CT	15335	11763	696630	44.25	2128.47	38.922.436	37.118.270	390
DB-IC	8086	3276	236923	39.54	103.23	10.071.448	7.625.326	512
DB-IR	28915	9692	1239870	94.02	1527.92	8.106.707	6.114.448	1347

- Libovolné řešení v modelu **LOP** je také řešení v modelu **lop**. Model **lop** je relaxace **LOP**.

- Pro další zrychlení výpočtu lze použít *cutting plane*.

Věta

Pro všechny $t \in T_\emptyset$

$$D_t \leq \left\lfloor \frac{trvl(t)}{\Gamma} \right\rfloor (\Gamma - \Delta) + \Delta \sum_{I \in L, P_t \subseteq I} f_I, \quad (13)$$

kde $\Delta := trvl(t) - \left\lfloor \frac{trvl(t)}{\Gamma} \right\rfloor$, jsou přípustné nerovnosti pro **lop**.

- Pro $t \in T_\emptyset$ takové, že $trvl(t) \leq \Gamma$, lze nahradit nerovnosti (11) za nerovnosti $D_t \leq trvl(t) \cdot \sum_{P_t \subseteq I \in L} f_I$ pro všechny $t \in T_\emptyset$ a pro $t \in T_\emptyset$ taková, že $trvl(t) > \Gamma$ přidáme do **lop** nerovnosti (13).

Věta

Uvažujme $V' \subset V$, $E' \subset \{\{u, v\} \mid |\{u, v\} - V'| = 1\}$ a $\sum_{e \in E'} \text{lfr}(e)$ je liché číslo. Označme $\alpha_I := |\{e \in I\} \cap E'|$. Pak platí

$$\sum_{I \in \mathcal{L}, \alpha_I \text{ odd}} \alpha_I f_I \leq \sum_{e \in E'} \text{lfr}(e) - 1. \quad (14)$$

- Přidáme-li do **lop** řezu (13) a „nějaké“ řezu (14), tak značně zrychlíme výpočet.

Výsledek pro model **lop** s použitím *cutting-plane*Computational results for **lop** tightened by cutting planes

network	running time			objective function value		$ \{f_i \mid f_i \notin \mathbb{Z}_+\} $
	LP	MIP	MIP*	MIP	LP	
NS-IC	0.38	0.48	0.38	8.203.412	8.203.412	0
NS-IR	32.73	37.93	30.62	27.175.593,5	27.172.441	8
NS-CT	143.82	161.87	358.94	37.118.270	37.118.270	0
DB-IC	50.47	56.28	55.74	7.625.326	7.625.326	0
DB-IR	312.47	408.92	420.86	6.116.916,5	6.114.448	3

Výsledek pro model **lop** s použitím *cutting-plane*Computational results for **lop** tightened by cutting planes

network	running time			objective function value		$ \{f_i \mid f_i \notin \mathbb{Z}_+\} $
	LP	MIP	MIP*	MIP	LP	
NS-IC	0.38	0.48	0.38	8.203.412	8.203.412	0
NS-IR	32.73	37.93	30.62	27.175.593,5	27.172.441	8
NS-CT	143.82	161.87	358.94	37.118.270	37.118.270	0
DB-IC	50.47	56.28	55.74	7.625.326	7.625.326	0
DB-IR	312.47	408.92	420.86	6.116.916,5	6.114.448	3

Computational results with **lop**

network	size			running time		objective function value		$ \{f_i \mid f_i \notin \mathbb{Z}_+\} $
	Variables	Constraints	Nonzeros	LP	MIP	LP	MIP	
NS-IC	463	234	3060	0.18	0.66	9.168.554	8.203.412	122
NS-IR	5802	2305	153752	11.07	187.50	28.909.033	21.172.411	502
NS-CT	15335	11763	696630	44.25	2128.47	38.922.436	37.118.270	390
DB-IC	8086	3276	236923	39.54	103.23	10.071.448	7.625.326	512
DB-IR	28915	9692	1239870	94.02	1527.92	8.106.707	6.114.448	1347

- Problém. Když ukončíme *branch-and-bound* algoritmus předčasně, tak nevíme „jak daleko“ jsme od optimálního řešení.
- *B&B* dává pouze dolní hranici na vzdálenost od optimálního řešení.
- Model **lop** vznikne relaxací **LOP**. Tedy optimální hodnota účelové funkce v **lop** je horní hranice pro optimální hodnotu účelové funkce v **LOP**. Navíc víme, že celkový počet cestujících je triviálně horní hranice pro hodnoty účelové funkce.

$$\max \sum_{t \in T_\emptyset} D_t$$

$$D_t \leq trvl(t) \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, \quad (15)$$

$$\sum_{t \in T_\emptyset, e \in P_t} D_t = \Gamma \cdot lfr(e) \quad \text{pro všechny } e \in E, \quad (16)$$

$$D_t \geq 0 \quad \text{pro všechny } t \in T_\emptyset, l \in L.$$

- Vyřešením této úlohy dostaneme horní hranici pro vzdálenost optimální hodnoty účelové funkce od námi napočítaného řešení.

Dolní a horní hranice pro optimální hodnotu **LOP**

network	$D(\hat{f})$	\hat{D}	T^*	gap between lower and best upper bound
NS-IC	8.203.412	8.203.412	9.168.554	0.0%
NS-IR	20.982.579	27.172.441	21.315.607	1.6%
NS-CT	25.079.912	37.118.270	25.863.252	3.1%
DB-IC	7.549.827	7.625.326	9.745.044	1.0%
DB-IR	6.114.448	6.114.448	8.682.953	0.0%



- Zavedli jsme *mixed integer linear program* **LOP** pro optimální návrh tratí.
- Tento problém je příliš velký a výpočetně náročný.
- Zavedli jsme menší model **lop**. Pomocí vhodných řezů z *cutting plane* jsme vyřešili tento problém v řádu jednotek minut.
- Hodnoty napočítané z modelu **lop** nám dají hranice na optimální hodnoty **LOP**. Největší rozdíl horní a dolní hranice je 3.2%.
- Potenciální nedostatek v tomto modelu je předpoklad, že lidé používají pouze nejkratší cestu. Mohlo by být výhodnější uvažovat, že lidé používají k -nejkratších cest.

[1] Serafini P, Ukovich W (1989) A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM Journal of Discrete Mathematics* 2(4):550–581

Vycházeli jsem z článků:

[2] Michael R. Bussieck, Peter Kreutzer, Uwe T. Zimmermann (1996), Optimal lines for railway system, *European Journal of Operational Research* 96 54-63

[3] Thomas Linder, Uwe T. Zimmermann (2005), Cost optimal periodic train scheduling, *Math. Meth. Oper. Res.* 62:281-295