



MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA

Univerzita Karlova

Igor Böhm

**Safe dike heights at minimal costs: An
integer programming approach**

P. Zwaneveld, G. Verweij, S. van Hoesel

20. března 2024

- Článek navazuje na několik předchozích prací, speciálně van Danzig (1953) a porovnává výsledky s článkem Berkelmans et al.

- Článek navazuje na několik předchozích prací, speciálně van Danzig (1953) a porovnává výsledky s článkem Berkelmans et al.
- Cílem je najít strategii zvyšování přehrad vzhledem k času, která by byla finančně realizovatelná a výhodná.

- Článek navazuje na několik předchozích prací, speciálně van Danzig (1953) a porovnává výsledky s článkem Berkelmans et al.
- Cílem je najít strategii zvyšování přehrad vzhledem k času, která by byla finančně realizovatelná a výhodná.
- Je zkonstruován efektivní a flexibilní model pro strategii budování přehrad.

- Článek navazuje na několik předchozích prací, speciálně van Danzig (1953) a porovnává výsledky s článkem Berkelmans et al.
- Cílem je najít strategii zvyšování přehrad vzhledem k času, která by byla finančně realizovatelná a výhodná.
- Je zkonstruován efektivní a flexibilní model pro strategii budování přehrad.
- Algoritmus je založen na celočíselném lineárním programování a zaručuje výpočet optimálního řešení.

- Okruhem přehrad myslíme síť přehrad, chránících určitou oblast.
- Řešíme zde dilema, jestli ušetřit peníze za cenu zvýšení rizika záplav, či naopak.
- V této práci se předpokládá nehomogenita okruhů přehrad.
- Okruh přehrad selže ve svém nejslabším bodě, proto bereme jako pravděpodobnost záplav v okruhu maximum pravděpodobností selhání přes všechny přehrady v okruhu.

- Model je založen na diskretizaci problému.

Definice modelu C

- Model je založen na diskretizaci problému.
- Nechť L značí množinu přehrad v okruhu.

- Model je založen na diskretizaci problému.
- Nechť L značí množinu přehrad v okruhu.
- Čas rozdělíme do množiny časových úseků T . Ten můžeme rozdělit na měsíce, roky atp., z technických a administrativních důvodů nemá smysl uvažovat úseky kratší než 10 let. Jako počáteční časový úsek označme '0'.

- Model je založen na diskretizaci problému.
- Nechť L značí množinu přehrad v okruhu.
- Čas rozdělíme do množiny časových úseků T . Ten můžeme rozdělit na měsíce, roky atp., z technických a administrativních důvodů nemá smysl uvažovat úseky kratší než 10 let. Jako počáteční časový úsek označme '0'.
- Označme H množinu všech výšek přehrad a jako '0' počáteční výšku. Jelikož technicky nemusí být možné na všech přehradách dosáhnout stejných výšek, označme pro přehradu $l \in L$ množinu všech možných výšek $H^l \subseteq H$. Předpokládáme, že rozdíl mezi jednotlivými výškami je alespoň 20 cm, protože vyšší přesnost nelze zaručit.

- Definujeme dvě rozhodovací proměnné.

- Definujeme dvě rozhodovací proměnné.
- $CY(t, l, h_1, h_2) = 1$, jestliže přehrada l je v časovém úseku t zvýšena z výšky h_1 na h_2 . Jinak rovno 0.

- Definujeme dvě rozhodovací proměnné.
- $CY(t, l, h_1, h_2) = 1$, jestliže přehrada l je v časovém úseku t zvýšena z výšky h_1 na h_2 . Jinak rovno 0.
- $DY(t, l, h) = 1$, jestliže je přehrada l o výšce h v časovém úseku t „nejslabším článkem okruhu“, neboli má nejvyšší pravděpodobnost, že selže. Jinak rovno 0.

- $cost(t, l, h_1, h_2)$ cena zvýšení úrovně přehrady l v čas. úseku t z úrovně h_1 na úroveň h_2 . Pro $h_1 = h_2$ se jedná o náklady na údržbu apod.
- $prob(t, l, h)$ pravděpodobnost záplav, pokud má v čas. úseku t přehrada l výšku h .
- $damage(t, l, h)$ ztráty zapříčiněné záplavami, pokud je v čas. úseku t přehrada l o výšce h . Je možné zaměnit ta $damage(t)$.

Optimalizační úloha

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{h_1, h_2 \in H^l: h_2 \geq h_1} \text{cost}(t, l, h_1, h_2) \cdot CY(t, l, h_1, h_2) \\ & + \sum_{t \in T} \sum_{l \in L} \sum_{h \in H^l} \text{prob}(t, l, h) \cdot \text{damage}(t, l, h) \cdot DY(t, l, h) \\ \text{subject to} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} CY('0', l, '0', '0') = 1; \quad & CY('0', l, h_1, h_2) = 0 \\ \forall l \in L; h_1, h_2 \in H^l; h_2 \geq h_1 \wedge h_2 > '0' \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{h_1 \in H^l: h_1 \leq h_2} CY(t-1, l, h_1, h_2) = \sum_{h_3 \in H^l: h_3 \geq h_2} CY(t, l, h_2, h_3) \\ \forall t \in T / \{'0'\}, l \in L, h_2 \in H^l \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \sum_{h_1 \in H^l} \sum_{\substack{h_2 \geq h_1 \in H^l: \\ \text{prob}(t, l_0, h_2) > \text{prob}(t, l^*, h^*)}} CY(t, l_0, h_1, h_2) \\ + \sum_{l \in L} \sum_{\substack{h \in H^l: \\ \text{prob}(t, l, h) \leq \text{prob}(t, l^*, h^*)}} DY(t, l, h) \leq 1 \\ \forall t \in T, l_0, l^* \in L, h^* \in H^{l^*} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{l \in L} \sum_{h \in H^l} DY(t, l, h) = 1 \quad \forall t \in T \tag{6}$$

$$CY(t, l, h_1, h_2) \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, l \in L, h_1, h_2 \in H^l, h_2 \geq h_1 \tag{7}$$

$$DY(t, l, h) \in \{0, 1\} \quad \forall t \in T, l \in L, h \in H^l \tag{8}$$

- Pro přehradu l definujme funkci $up(l)$, která dává minimální dobu mezi dvěma zvýšeními přehrady l .
- Definujme ještě jedno omezení

$$\sum_{t^*=t+1, \dots, t+up(l)} \sum_{h_1 \in H^l} \sum_{h_2 > h_1 \in H^l} CY(t^*, l, h_1, h_2) \leq 1,$$

$$\forall l \in L, t = 0, \dots, |T| - up(l).$$

- Autoři implementovali model C v GAMS použitím CPLEXu k nalezení optimálního řešení za pomoci algoritmu branch-and-cut.

- Autoři implementovali model C v GAMS použitím CPLEXu k nalezení optimálního řešení za pomoci algoritmu branch-and-cut.
- modely predikující 20-30 let do budoucna jsou využívány (nizozemskými úřady a jinými). Má ovšem smysl se dívat i do delší budoucnosti. Dále bude uvažován problém 300 let do budoucna.

- Autoři implementovali model C v GAMS použitím CPLEXu k nalezení optimálního řešení za pomoci algoritmu branch-and-cut.
- modely predikující 20-30 let do budoucna jsou využívány (nizozemskými úřady a jinými). Má ovšem smysl se dívat i do delší budoucnosti. Dále bude uvažován problém 300 let do budoucna.
- Do 100 centimetrů je diskretizace realizována po 10 cm, mezi 100 a 200 centimetry po 20 cm a pro vyšší přehrady po 30 cm

- Autoři implementovali model C v GAMS použitím CPLEXu k nalezení optimálního řešení za pomoci algoritmu branch-and-cut.
- modely predikující 20-30 let do budoucna jsou využívány (nizozemskými úřady a jinými). Má ovšem smysl se dívat i do delší budoucnosti. Dále bude uvažován problém 300 let do budoucna.
- Do 100 centimetrů je diskretizace realizována po 10 cm, mezi 100 a 200 centimetry po 20 cm a pro vyšší přehrady po 30 cm
- Do roku 2100 je diskretizace časových úseků realizována po 5 letech, dále po 10 letech.

- Autoři implementovali model C v GAMS použitím CPLEXu k nalezení optimálního řešení za pomoci algoritmu branch-and-cut.
- modely predikující 20-30 let do budoucna jsou využívány (nizozemskými úřady a jinými). Má ovšem smysl se dívat i do delší budoucnosti. Dále bude uvažován problém 300 let do budoucna.
- Do 100 centimetrů je diskretizace realizována po 10 cm, mezi 100 a 200 centimetry po 20 cm a pro vyšší přehrady po 30 cm
- Do roku 2100 je diskretizace časových úseků realizována po 5 letech, dále po 10 letech.
- Autoři soudí po tom, co vyřešili vícero problémů tohoto typu, že diskretizace nemá velký vliv na optimální řešení.

Předzpracování problému

- Je možné technikami zpracování dat zmenšit množinu přípustných řešení zásadním způsobem.

Předzpracování problému

- Je možné technikami zpracování dat zmenšit množinu přípustných řešení zásadním způsobem.
- Uvažujme přípustné řešení pro přehradu l v časovém úseku $t < |T| - 1$, ve kterém se zvýší z výšky h_1 na $h_2 > h_1$. Definujeme funkci udávající rozdíl v účelové funkci, pokud výška zůstává konstantní v čas. úseku $t + 1$:

$$\begin{aligned} MxChngT(t, l, h_1, h_2) = & cost(t, l, h_1, h_2) - cost(t + 1, l, h_1, h_2) \\ & + (prob(t, l, h_2) - prob(t, l, h_1)) \cdot damage(t) \\ & + cost(t + 1, l, h_2, h_2) - cost(t, l, h_1, h_1). \end{aligned}$$

Předzpracování problému

- Je možné technikami zpracování dat zmenšit množinu přípustných řešení zásadním způsobem.
- Uvažujme přípustné řešení pro přehradu l v časovém úseku $t < |T| - 1$, ve kterém se zvýší z výšky h_1 na $h_2 > h_1$. Definujeme funkci udávající rozdíl v účelové funkci, pokud výška zůstává konstantní v čas. úseku $t + 1$:

$$\begin{aligned} MxChngT(t, l, h_1, h_2) = & cost(t, l, h_1, h_2) - cost(t + 1, l, h_1, h_2) \\ & + (prob(t, l, h_2) - prob(t, l, h_1)) \cdot damage(t) \\ & + cost(t + 1, l, h_2, h_2) - cost(t, l, h_1, h_1). \end{aligned}$$

- Pokud $\exists t < |T| - 1, l \in L, h_2 > h_1 \in H^l : MxChngT(t, l, h_1, h_2) \geq 0$ a pro libovolné $h_3, h_1 < h_3 < h_2$: $cost(t, l, h_1, h_2) + cost(t, l, h_2, h_3) \geq cost(t, l, h_1, h_3)$, pak takové řešení může být vyloučeno z množiny přípustných řešení.

Předzpracování problému

- Je možné technikami zpracování dat zmenšit množinu přípustných řešení zásadním způsobem.
- Uvažujme přípustné řešení pro přehradu l v časovém úseku $t < |T| - 1$, ve kterém se zvýší z výšky h_1 na $h_2 > h_1$. Definujeme funkci udávající rozdíl v účelové funkci, pokud výška zůstává konstantní v čas. úseku $t + 1$:

$$\begin{aligned} MxChngT(t, l, h_1, h_2) = & cost(t, l, h_1, h_2) - cost(t + 1, l, h_1, h_2) \\ & + (prob(t, l, h_2) - prob(t, l, h_1)) \cdot damage(t) \\ & + cost(t + 1, l, h_2, h_2) - cost(t, l, h_1, h_1). \end{aligned}$$

- Pokud $\exists t < |T| - 1, l \in L, h_2 > h_1 \in H^l : MxChngT(t, l, h_1, h_2) \geq 0$ a pro libovolné $h_3, h_1 < h_3 < h_2$:
 $cost(t, l, h_1, h_2) + cost(t, l, h_2, h_3) \geq cost(t, l, h_1, h_3)$, pak takové řešení může být vyloučeno z množiny přípustných řešení.
- Autoři uvádějí další dva možné způsoby předzpracování problému.

Dike ring	Number of segments	MINLP approach of Brekelmans et al. (2012)		Model C		Difference in true objective (%)
		MINLP objective (M)	True objective (M)	Model C objective (M)	True objective (M)	
10	4	107.51	107.51	108.26	108.26	0.69
13	4	10.38	10.38	10.33	10.33	-0.48
14	2	94.04	94.04	94.57	94.57	0.56
16	8	1044.45	1046.08	1064.65	1064.80	1.79
17	6	377.05	377.05	380.65	380.66	0.96
21	10	217.40	217.71	221.62	221.62	1.80
22	5	373.98	374.08	378.67	378.68	1.23
36	6	395.65	395.65	395.34	395.34	-0.08
38	3	136.26	136.29	136.75	136.76	0.34
43	8	486.72	488.10	492.66	492.66	0.93
47	2	16.57	16.57	16.63	16.63	0.36
48	3	42.92	42.92	43.37	43.37	1.05

MINLP je řešení modelu z článku Brekelmans et al. V něm se používá jiná diskretizace, proto se liší hodnota účelové funkce. True objective je hodnota účelové funkce, ve které se nejslabší přehrada mění v průběhu čas. úseku.

Z tabulky můžeme usoudit, že modely MINLP a C dosahují podobných optimálních hodnot účelové funkce.

Průměrná rychlost řešení metodou branch-and-cut byla v modelu C 0.19 minut. Metoda podle Brekelmans et al. v průměru trvala 12.75 minut.

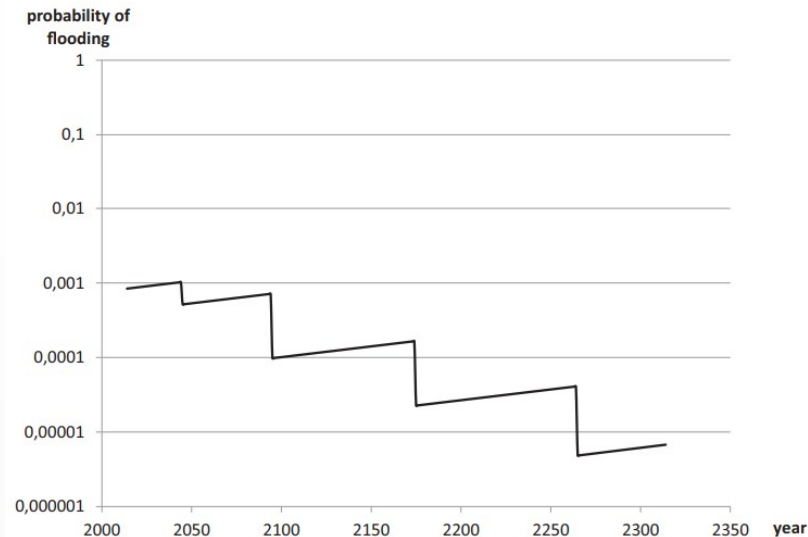
Dike ring	L	Total number of variables	Reduction in the number of variables				Solution time (minutes)		
			before pre-processing	Technique			Total (%)	With pre-processing	Without pre-processing
				1 (%)	2 (%)	3 (%)			
10	4	42,988	44	0	11	56	0.06	0.12	
13	4	42,988	64	0	3	67	0.03	0.11	
14	2	21,494	35	0	10	45	0.03	0.04	
16	8	85,976	33	0	18	51	0.36	0.55	
17	6	64,482	49	0	14	63	0.10	0.27	
21	10	107,470	34	0	16	50	0.89	1.34	
22	5	53,735	36	0	15	51	0.16	0.50	
36	6	64,482	25	0	15	40	0.10	0.12	
38	3	32,241	29	0	12	41	0.05	0.08	
43	8	85,976	53	1	15	68	0.48	0.70	
47	2	21,494	63	1	10	74	0.03	0.03	
48	3	32,241	45	0	18	64	0.04	0.07	

|L|: number of segments.

Z tabulky je vidět, že technika předzpracování 1 (kterou jsme uváděli) má významný vliv. Ostatní dvě metody mají na rychlost výpočtu mnohem menší vliv, proto autoři navrhují použít pouze 1. techniku.

Zatím jsme v modelu brali jako jediný způsob selhání přehrady, když voda přes ni přeteče. Ukazuje se, že ve více než 50% případů jsou záplavy zaviněny jinými faktory.

Příklad strategie budování přehrad



- Tento článek se zabývá optimalizačním problémem výšky přehrad.

- Tento článek se zabývá optimalizačním problémem výšky přehrad.
- Autoři budují model celočíselného programování pro optimální investiční plán.

- Tento článek se zabývá optimalizačním problémem výšky přehrad.
- Autoři budují model celočíselného programování pro optimální investiční plán.
- Tento model má tři hlavní výhody:
 - Vysoká flexibilita vzhledm ke vstupním parametrům a specifikacím funkcí udávajících pravděpodobnosti záplav, škody jimi způsobené a náklady na zvyšování a údržbu přehrad.
 - Lze nalézt optimální řešení pro libovolnou úlohu.
 - Jednoduchá implementace za použití standardních softwarů. Lze je proto implementovat i v chudších státech, než je Nizozemsko.

- Tento článek se zabývá optimalizačním problémem výšky přehrad.
- Autoři budují model celočíselného programování pro optimální investiční plán.
- Tento model má tři hlavní výhody:
 - Vysoká flexibilita vzhledm ke vstupním parametrům a specifikacím funkcí udávajících pravděpodobnosti záplav, škody jimi způsobené a náklady na zvyšování a údržbu přehrad.
 - Lze nalézt optimální řešení pro libovolnou úlohu.
 - Jednoduchá implementace za použití standardních softwarů. Lze je proto implementovat i v chudších státech, než je Nizozemsko.
- Metoda předzpracování problému zkrátí dobu branch-and-cut algoritmu o 40%.

- P. Zwanevelda, G. Verweij, S. van Hoesel. Safe dike heights at minimal costs: An integer programming approach. European Journal of Operational Research (2018).
- D. van Dantzig. Economic Decision Problems for Flood Prevention. Econometrica Vol. 24, No. 3 (červenec, 1956).