Palindromy

Definition (palindrom)

Palindrom je řetězec w stejný při čtení zepředu i zezadu, tj. $w = w^R$.

- Příklady: `'otto'`; `'Madam, I'm Adam'`.

Lemma

Jazyk $L_{pal} = \{w | w = w^R, w \in \Sigma^*\}$ není regulární.

Example 6.1 (Bezkontextová gramatika pro palindromy)

$G = (\{S\}, \{o, t\}, P, S)$, $P =$

1. $S \to \epsilon$
2. $S \to o$
3. $S \to t$
4. $S \to oSo$
5. $S \to tSt$

Proof:

- Důkaz sporem. Předpokládejme L_{pal} je regulární, nechť n je konstanta z pumping lemma, uvažujme slovo: $w = o^n t o^n$.
- z pumping lemmatu lze rozložit na $w = xyz$, y obsahuje jednu nebo více z prvních n o-ček. Tedy xz má být v L_{pal} ale má méně o-ček vlevo od 't' než vpravo, tedy není palindrom. Iterační lemma pro jazyk L_{pal} nedokáže najít n, proto L_{pal} není regulární. □

Formální (generativní) gramatiky, Bezkontextové gramatiky

Definition 6.1 (Formální (generativní) gramatika)

Formální (generativní) gramatika je $G = (V, T, P, S)$ složena z

- konečné množiny **neterminálů** (variables) V
- neprázdné konečné množiny **terminálních symbolů** (**terminálů**) T
- **počáteční symbol** $S \in V$.
- konečné množiny **pravidel** (**produkcí**) P reprezentující rekurzivní definici jazyka. Každé pravidlo má tvar:
  - $\beta A \gamma \to \omega$, $A \in V, \beta, \gamma, \omega \in (V \cup T)^*$

    tj. levá strana obsahuje aspoň jeden neterminální symbol.

Definition (Bezkontextová gramatika CFG)

Bezkontextová gramatika (CFG) je $G = (V, T, P, S)$ gramatika, obsahující pouze pravidla tvaru

$A \to \omega$, $A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$.

Chomského hierarchie

Definition 6.2 (Klasifikace gramatik podle tvaru přepisovacích pravidel)

- **gramatiky typu 0** (**rekurzivně spočetné jazyky** $\mathcal{L}_0$)

  pravidla v obecné formě $\alpha \to \omega$, $\alpha, \omega \in (V \cup T)^*, \alpha$ obsahuje neterminál
- **gramatiky typu 1** (**kontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_1$)
  - pouze pravidla ve tvaru $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$

    $A \in V, \gamma, \beta \in (V \cup T)^*, \omega \in (V \cup T)^+$**!**
  - jedinou výjimkou je pravidlo $S \to \epsilon$, potom se ale S nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla
- **gramatiky typu 2** (**bezkontextové gramatiky**, jazyky $\mathcal{L}_2$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega, A \in V, \omega \in (V \cup T)^*$
- **gramatiky typu 3** (regulární/**pravé lineární gramatiky**, regulární jazyky $\mathcal{L}_3$)

  pouze pravidla ve tvaru $A \to \omega B, A \to \omega, A, B \in V, \omega \in T^*$.

Uspořádanost Chomského hierarchie

- Chomského hierarchie definuje uspořádání tříd jazyků

$$\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$$

- dokonce vlastní podmnožiny (později)
  $\mathcal{L}_0 \supseteq \mathcal{L}_1$ rekurzivně spočetné jazyky zahrnují kontextové jazyky
  pravidla $\gamma A \beta \to \gamma \omega \beta$ obsahují vlevo neterminál A
  $\mathcal{L}_2 \supseteq \mathcal{L}_3$ bezkontextové jazyky zahrnují regulární jazyky
  pravidla $A \to \omega B, A \to \omega$ obsahují vpravo řetězec $(V \cup T)^*$
  $\mathcal{L}_1 \supseteq \mathcal{L}_2$ kontextové jazyky zahrnují bezkontextové jazyky
  problém je s pravidly typu $A \to \epsilon$, ale ta umíme eliminovat.

Example 6.2 (Notace)

$a, b, c, 1, *, ($	terminály
A, B, C	neterminály, proměnné
w, z	řetězec terminálů
X, Y	buď terminál nebo neterminál
α, β, γ	řetězec $(T \cup V)^*$
$A \to \alpha \mid \beta$	$\{A \to \alpha, A \to \beta\}$, OR, kompaktní zápis více pravidel.

Definition 6.3 (Derivace $\Rightarrow^*$)

Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$.

- Říkáme, že α se **přímo přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow_G \omega$ nebo $\alpha \Rightarrow \omega$) jestliže
  $$\exists \beta, \gamma, \eta, \nu \in (V \cup T)^* : \alpha = \eta\beta\nu,\ \omega = \eta\gamma\nu \text{ a } (\beta \to \gamma) \in P.$$
- Říkáme, že α se **přepíše** na ω (píšeme $\alpha \Rightarrow^* \omega$) jestliže
  $$\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in (V \cup T)^* : \alpha = \beta_1 \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \beta_n = \omega,$$
  tj. také $\alpha \Rightarrow^* \alpha$.
- Posloupnost $\beta_1, \ldots, \beta_n$ nazýváme **derivací (odvozením)**.
- Pokud $\forall i \neq j : \beta_i \neq \beta_j$, hovoříme o **minimálním odvození**.
- Libovolný řetězec $\omega \in (T \cup V)^*$ odvoditelný z počátečního symbolu nazýváme **sentenciální forma**.

Definition 6.4 (Jazyk generovaný gramatikou G)

Jazyk $L(G)$ generovaný gramatikou $G = (V, T, P, S)$ je množina terminálních řetězců, pro které existuje derivace ze startovního symbolu

$$L(G) = \{w \in T^* | S \Rightarrow_G^* w\}.$$

Jazyk neterminálu $A \in V$ definujeme $L(A) = \{w \in T^* | A \Rightarrow_G^* w\}$.

Gramatiky typu 3 a regulární jazyky

Definition (Gramatika typu 3, pravá lineární)

Gramatika G je **pravá lineární, tj. regulární, Typu 3**, pokud obsahuje pouze pravidla tvaru $A \to wB, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

Example 6.3 (Příklad derivace gramatiky typu 3)

$$P = \{S \to 0S|1A|\epsilon,\ A \to 0A|1B,\ B \to 0B|1S\}$$

$$S \Rightarrow 0S \Rightarrow 01A \Rightarrow 011B \Rightarrow 0110B \Rightarrow 01101S \Rightarrow 01101$$

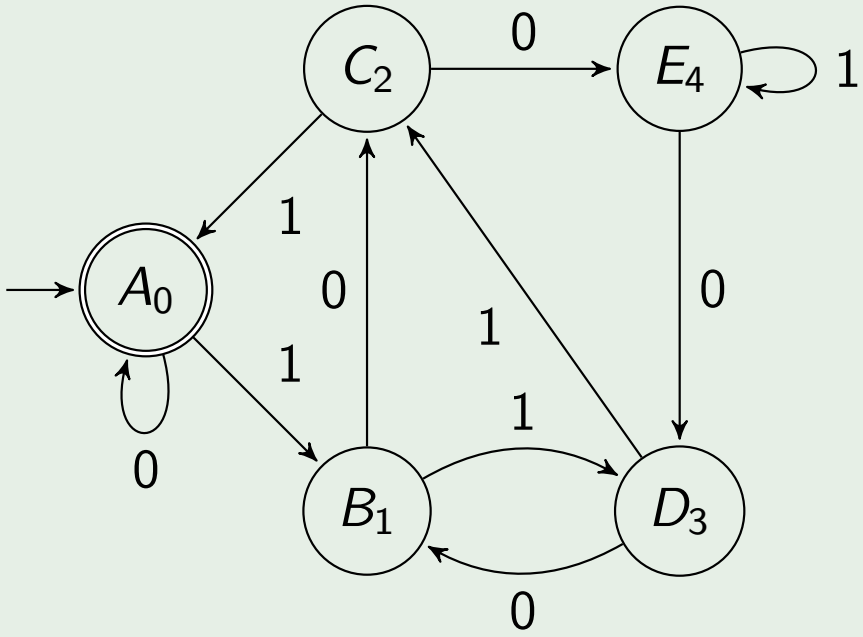
- Pozorování:
  - každá sentenciální forma derivace obsahuje právě jeden neterminál
  - tento neterminál je vždy umístěn zcela vpravo
  - aplikací pravidla $A \to w$ se derivace uzavírá
  - krok derivace generuje symboly a změní neterminál
- Idea vztahu gramatiky a konečného automatu
- neterminál = stav konečného automatu
- pravidla = přechodová funkce.

Příklad převodu FA na gramatiku

Example 6.4 (G, FA binární zápis čísla dělitelného 5)

$L = \{w | w \in \{0,1\}^* \& w$ je binární zápis čísla dělitelného 5$\}$

$$
\begin{aligned}
A &\rightarrow 1B|0A|\epsilon \\
B &\rightarrow 0C|1D \\
C &\rightarrow 0E|1A \\
D &\rightarrow 0B|1C \\
E &\rightarrow 0D|1E
\end{aligned}
$$



Příklady derivací

$$
\begin{aligned}
&A \Rightarrow 0A \Rightarrow 0 && (0)\\
&A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 101 && (5)\\
&A \Rightarrow 1B \Rightarrow 10C \Rightarrow 101A \Rightarrow 1010A \Rightarrow 1010 && (10)\\
&A \Rightarrow 1B \Rightarrow 11D \Rightarrow 111C \Rightarrow 1111A \Rightarrow 1111 && (15)
\end{aligned}
$$

Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

Theorem 6.1 ($L \in RE \Rightarrow L \in \mathcal{L}_3$)

Pro každý jazyk rozpoznávaný konečným automatem existuje gramatika typu 3, která ho generuje.

Proof: Převod konečného automatu na gramatiku typu 3

- $L = L(A)$ pro deterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
- definujme gramatiku $G = (Q, \Sigma, P, q_0)$, kde pravidla P mají tvar
  $p \to aq$, když $\delta(p, a) = q$
  $p \to \epsilon$, když $p \in F$
- je $L(A) = L(G)$?
  - $\epsilon \in L(A) \Leftrightarrow q_0 \in F \Leftrightarrow (q_0 \to \epsilon) \in P \Leftrightarrow \epsilon \in L(G)$
  - $a_1 \dots a_n \in L(A) \Leftrightarrow \exists q_0, \dots, q_n \in Q$ tž. $\delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}, q_n \in F$
    $\Leftrightarrow (q_0 \Rightarrow a_1 q_1 \Rightarrow \dots a_1 \dots a_n q_n \Rightarrow a_1 \dots a_n)$ je derivace pro $a_1 \dots a_n$
    $\Leftrightarrow a_1 \dots a_n \in L(G)$

Příprava převodu gramatiky typu 3 na FA

- Opačný směr
  - pravidla $A \to aB$ kódujeme do přechodové funkce
  - pravidla $A \to \epsilon$ určují koncové stavy
  - pravidla $A \to a_1 \dots a_n B, A \to a_1 \dots a_n$ s více neterminály rozepíšeme
    - zavedeme nové neterminály $Y_2, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n$
    - vytvoříme pravidla $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \dots, Y_n \to a_n B$
    - resp. $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \dots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \epsilon$
  - pravidla $A \to B$ odpovídají ϵ přechodům
    - zbavíme se jich tranzitivním uzávěrem
    - nebo musíme tranzitivně uzavřít $S \to B$ pro hledání $S \to \epsilon$.

Lemma

Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$.

Standardizace gramatiky typu 3

Lemma

Ke každé gramatice typu 3 existuje gramatika typu 3, která generuje stejný jazyk a obsahuje pouze pravidla ve tvaru: $A \to aB, A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$.

Proof.

Pro gramatiku $G = (V, T, S, P)$ definujeme $G^| = (V^|, T, S, P^|)$, kde pro každé pravidlo zavedeme dostatečný počet nových neterminálů $Y_2, \ldots, Y_n, Z_1, \ldots, Z_n$ a definujeme

P	$P^|$
$A \to aB$ $A \to \epsilon$ $A \to a_1 \ldots a_n B$ $Z \to a_1 \ldots a_n$	$A \to aB$ $A \to \epsilon$ $A \to a_1 Y_2, Y_2 \to a_2 Y_3, \ldots Y_n \to a_n B$ $Z \to a_1 Z_1, Z_1 \to a_2 Z_2, \ldots, Z_{n-1} \to a_n Z_n, Z_n \to \epsilon$
odstraníme i pravidla: $A \to B$	tranzitivní uzávěr $U(A) = \{B \mid B \in V \& A \Rightarrow^* B\}$ $A \to \gamma$ pro všechna $Z \in U(A)$ a $(Z \to \gamma) \in P^|$

□

Pouze pravidla $A \to aB, A \to \epsilon$

Example 6.5

P	$P^{\mid}$
$B \to a_1$	$B \to a_1 H_1, H_1 \to \epsilon$
	$U(A) = \{A, B\}$, proto
$A \to B$	$A \to a_1 H_2, H_2 \to \epsilon$
$A \to a_2$	$A \to a_2 H_3, H_3 \to \epsilon$

Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

Theorem 6.2 (ϵ–NFA pro gramatiku typu 3 rozpoznávající stejný jazyk)

Pro každý jazyk L generovaný gramatikou typu 3 existuje ϵ–NFA rozpoznávající L.

Proof: Převod gramatiky typu 3 na konečný automat

- Vezmeme $G = (V, T, P, S)$ obsahující jen pravidla tvaru $A \to aB$, $A \to \epsilon$, $A, B \in V, a \in T$ generující L (předchozí lemma)
- definujeme nedeterministický ϵ–NFA $A = (V, T, \delta, S, F)$, kde:

  $F = \{A | (A \to \epsilon) \in P\}$
  $\delta(A, a) = \{B | (A \to aB) \in P\}$
- $L(G) = L(A)$
  - $\epsilon \in L(G) \Leftrightarrow (S \to \epsilon) \in P \Leftrightarrow S \in F \Leftrightarrow \epsilon \in L(A)$
  - $a_1 \dots a_n \in L(G) \Leftrightarrow$ existuje derivace
    $(S \Rightarrow a_1 H_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 \dots a_n H_n \Rightarrow a_1 \dots a_n)$

  $\Leftrightarrow$ $\exists H_0, \dots, H_n \in V$ tak že $H_0 = S, H_n \in F$
  $H_{i+1} \in \delta(H_i, a_k)$ pro krok $a_1 \dots a_{k-1} H_i \Rightarrow a_1 \dots a_{k-1} a_k H_{i+1}$

  $\Leftrightarrow$ $a_1 \dots a_n \in L(A)$

□

Levé (a pravé) lineání gramatiky

Definition 6.5 (Levé (a pravé) lineání gramatiky)

Gramatiky typu 3 nazýváme také **pravé lineární** (neterminál je vždy vpravo).
Gramatika G je **levá lineání**, jestliže má pouze pravidla tvaru
$A \to Bw, A \to w, A, B \in V, w \in T^*$.

Lemma

Jazyky generované levou lineání gramatikou jsou právě regulární jazyky.

Proof:

- $\Rightarrow$ 'otočením' pravidel levé lineární gramatiky dostaneme pravou lineární
  $A \to Bw, A \to w$ převedeme na $A \to w^R B, A \to w^R$
  - získaná gramatika generuje jazyk L^R, najdeme automat
  - víme, že regulární jazyky jsou uzavřené na reverzi,
    L^R je regulární, tudíž i $L = (L^R)^R$ je regulární
- $\Leftarrow$ takto lze získat všechny regulární jazyky
  - (FA$\Rightarrow$reverze$\Rightarrow$ pravá lineární gramatika$\Rightarrow$ levá lineární gramatika) $\square$

Lineární gramatiky (a jazyky)

- Levá a pravá lineární pravidla dohromady jsou už silnější.

Definition 6.6 (lineární gramatika, jazyk)

Gramatika je lineární, jestliže má pouze pravidla tvaru $A \to uBw, A \to w, A, B \in V, u, w \in T^*$ (na pravé straně vždy maximálně jeden neterminál).
Lineární jazyky jsou právě jazyky generované lineáními gramatikami.

- Zřejmě platí: regulární jazyky $\subseteq$ lineární jazyky.
- Jde o vlastní podmnožinu $\subsetneq$.

Example 6.6 (lineární, neregulární jazyk)

Jazyk $L = \{0^i 1^i | i \geq 1\}$ není regulární jazyk, ale je lineární, generovaný gramatikou s pravidly $S \to 0S1|01$.

Pozorování:

- lineární pravidla lze rozložit na levě a pravě lineání pravidla: $S \to 0A, A \to S1$.

Bezkontextová gramatika pro jednoduché výrazy

Definition (Bezkontextová gramatika)

Bezkontextová gramatika je gramatika, kde všechna pravidla jsou tvaru $A \to \omega, \omega \in (V \cup T)^*$.

Example 6.7 (CFG pro jednoduché výrazy)

Gramatika pro jednoduché výrazy $G = (\{E, I\}, \{+, *, (,), a, b, 0, 1\}, P, E)$, P jsou pravidla vypsaná vpravo.

- Pravidla 1–4 definují výraz.
- Pravidla 5–10 definují identifikátor I, odpovídající regulárnímu výrazu $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0} + \mathbf{1})^*$.

CFG pro jednoduché výrazy

1. $E \to I$
2. $E \to E + E$
3. $E \to E * E$
4. $E \to (E)$
5. $I \to a$
6. $I \to b$
7. $I \to Ia$
8. $I \to Ib$
9. $I \to I0$
10. $I \to I1$

Derivační strom

Definition 6.7 (Derivační strom)

Mějme gramatiku $G = (V, T, P, S)$. **Derivační strom** pro G je strom, kde:

- Kořen (kreslíme nahoře) je označen startovním symbolem S,
- každý vnitřní uzel je ohodnocen neterminálem V.
- Každý uzel je ohodnocen prvkem $\in V \cup T \cup \{\epsilon\}$.
- Je–li uzel ohodnocen ϵ, je jediným dítětem svého rodiče.
- Je–li A ohodnocení vrcholu a jeho děti zleva pořadě jsou ohodnoceny $X_1, \ldots, X_k$, pak $(A \to X_1 \ldots X_k) \in P$ je pravidlo gramatiky.

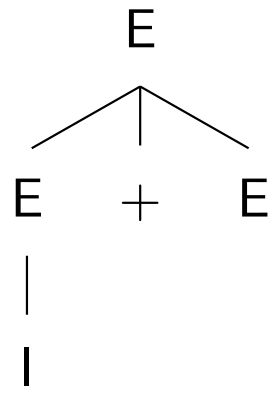
Notation 1 (Terminologie stromů)

Uzly, rodiče, děti, kořen, vnitřní uzly, listy, následníci, předci.

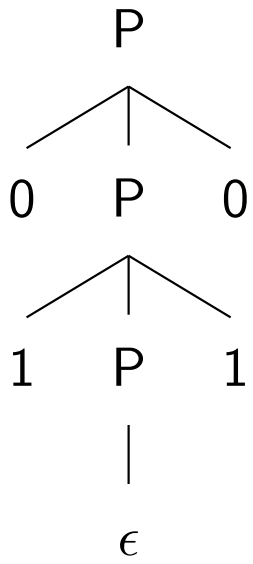
- Stromová struktura reprezentuje zdrojový program v překladači. Struktura usnadňuje překlad do strojového kódu.

Příklady stromů, Strom dává sentenciální formu, slovo

Derivační strom $E \Rightarrow^* I + E$.



Derivační strom $P \Rightarrow^* 0110$.



Definition 6.8 (Strom dává slovo (yield))

Říkáme, že **derivanční strom dává sentenciální formu α (slovo w)**, jestliže je α (w) zřetězení listů bráno zleva doprava.

Levá a pravá derivace

Definition 6.9 (Levá a pravá derivace)

Levá derivace (leftmost) $\Rightarrow_{lm}$, $\Rightarrow_{lm}^*$ v každém kroku přepisuje nejlevnější neterminál.
Pravá derivace (rightmost) $\Rightarrow_{rm}$, $\Rightarrow_{rm}^*$ v každém kroku přepisuje nejpravější neterminál.

Example 6.8 (levá derivace)

$E \Rightarrow_{lm} E * E \Rightarrow_{lm} I * E \Rightarrow_{lm} a * E \Rightarrow_{lm} a * (E) \Rightarrow_{lm} a * (E + E) \Rightarrow_{lm} a * (I + E) \Rightarrow_{lm}$
$\Rightarrow_{lm} a * (a + E) \Rightarrow_{lm} a * (a + I) \Rightarrow_{lm} a * (a + I0) \Rightarrow_{lm} a * (a + I00) \Rightarrow_{lm} a * (a + b00)$

Pravá derivace používá stejné přepisy, jen je provádí v jiném pořadí.

Example 6.9 (rightmost derivation)

$E \Rightarrow_{rm} E * E \Rightarrow_{rm} E * (E) \Rightarrow_{rm} E * (E + E) \Rightarrow_{rm} E * (E + I) \Rightarrow_{rm}$
$\Rightarrow_{rm} E * (E + I0) \Rightarrow_{rm} E * (E + I00) \Rightarrow_{rm} E * (E + b00) \Rightarrow_{rm}$
$\Rightarrow_{rm} E * (I + b00) \Rightarrow_{rm} E * (a + b00) \Rightarrow_{rm} I * (a + b00) \Rightarrow_{rm} a * (a + b00)$

Derivace a derivační stromy

Theorem 6.3

Pro danou gramatiku $G = (V, T, P, S)$ a $w \in T^*$ jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. $A \Rightarrow_{lm}^* w$.
2. $A \Rightarrow^* w$.
3. *Existuje derivační strom s kořenem A dávající slovo w.*

Proof

$1 \Rightarrow 2$ Levá derivace je derivace, druhý bod z prvního plyne triviálně.

$2 \Rightarrow 3$ Z derivace vytvoříme strom tak, že kořen ohodnotíme počátečním neterminálem a každé pravidlo v derivaci 'zavěsíme' pod uzel odpovídající přepisovanému neterminálu.

$3 \Rightarrow 1$ Pro důkaz ekvivalence zbývá pro libovolný derivační strom najít levou derivaci.

Od stromů k derivaci

Lemma

Mějme CFG $G = (V, T, P, S)$ a derivační strom s kořenem A dávající slovo $w \in T^*$.
Pak existuje levá derivace $A \Rightarrow_{lm}^* w$ v G.

Příprava důkazu: 'obalení derivace'

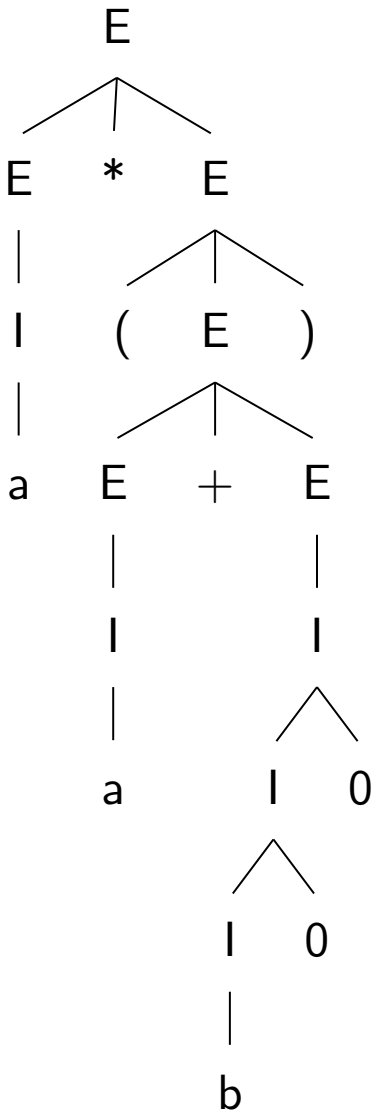
Mějme následující derivaci:

$$E \Rightarrow I \Rightarrow Ib \rightarrow ab.$$

Pro libovolná slova $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ je také derivace:

$$\alpha E \beta \Rightarrow \alpha I \beta \Rightarrow \alpha I b \beta \Rightarrow \alpha a b \beta.$$

Příklad levé derivace z derivačního stromu



Je příjemnější zachytit derivaci stromem.

- Kořen: $E \Rightarrow_{lm} E*E$
- Levé dítě kořene: $E \Rightarrow_{lm} I \Rightarrow_{lm} a$
- Kořen a levé dítě: $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E$
- Pravé dítě kořene:
  $E \Rightarrow_{lm} (E) \Rightarrow_{lm} (E+E) \Rightarrow_{lm} (I+E) \Rightarrow_{lm} (a+E)$
  $\Rightarrow_{lm} (a+I) \Rightarrow_{lm} (a+I0) \Rightarrow_{lm} (a+I00) \Rightarrow_{lm} (a+b00)$
- Plná derivace:
  $E \Rightarrow_{lm} E*E \Rightarrow_{lm} I*E \Rightarrow_{lm} a*E \Rightarrow_{lm}$
  $\Rightarrow_{lm} a*(E) \Rightarrow_{lm} a*(E+E) \Rightarrow_{lm} a*(I+E) \Rightarrow_{lm}$
  $\Rightarrow_{lm} a*(a+E) \Rightarrow_{lm} a*(a+I) \Rightarrow_{lm} a*(a+I0) \Rightarrow_{lm}$
  $\Rightarrow_{lm} a*(a+I00) \Rightarrow_{lm} a*(a+b00).$

Proof: ∃ derivační strom pak existuje levá derivace $\Rightarrow_{lm}$

Indukcí podle výšky stomu.

- Základ: výška 1: Kořen A s dětmi dávajícími w. Je to derivační strom, proto, $A \to w$ je pravidlo $\in P$, tedy $A \Rightarrow_{lm} w$ v jednom kroku.
- Indukce: výška $n > 1$. Kořen A s dětmi $X_1, X_2, \ldots, X_k$.
  - Je–li $X_i \in T$, definujeme $w_i \equiv X_i$.
  - Je–li $X_i \in V$, z indukčního předpokladu $X_i \Rightarrow^*_{lm} w_i$.

  Levou derivaci konstruujeme induktivně pro $i = 1, \ldots, k$ složíme $A \Rightarrow^*_{lm} w_1 w_2 \ldots w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k$.
  - Pro $X_i \in T$ jen zvedneme čítač $i++$.
  - Pro $X_i \in V$ přepíšeme derivaci: $X_i \Rightarrow_{lm} \alpha_1 \Rightarrow_{lm} \alpha_2 \ldots \Rightarrow_{lm} w_i$ na

$$
\begin{aligned}
& w_1 w_2 \ldots w_{i-1} X_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k \Rightarrow_{lm} \\
& w_1 w_2 \ldots w_{i-1} \alpha_1 X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k \Rightarrow_{lm} \\
& \qquad \ldots \\
& \Rightarrow_{lm} w_1 w_2 \ldots w_{i-1} w_i X_{i+1} X_{i+2} \ldots X_k .
\end{aligned}
$$

Pro $i = k$ dostaneme levou derivaci w z A. □

Ekvivalence gramatik

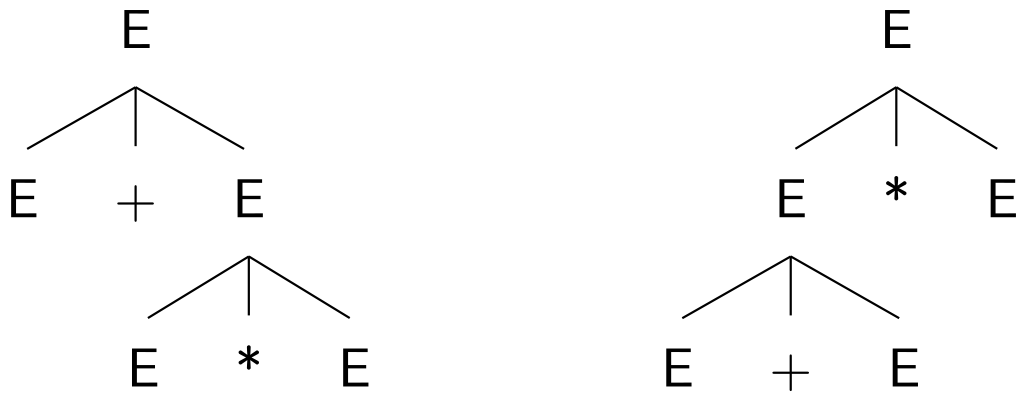
Definition 6.10 (ekvivalence gramatik)

Gramatiky G_1, G_2 jsou **ekvivalentní**, jestliže $L(G_1) = L(G_2)$, tj. generují stejný jazyk.

Víceznačnost gramatik

Dvě derivace téhož výrazu:

$E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + E * E$ $\quad$ $E \Rightarrow E * E \Rightarrow E + E * E$



- Rozdíl je důležitý, vlevo $1 + (2 * 3) = 7$, vpravo $(1 + 2) * 3 = 9$.
- Tato gramatika může být modifikovaná na jednoznačnou.

Example 6.10

Různé derivace mohou reprezentovat stejný derivační strom, pak není problém.

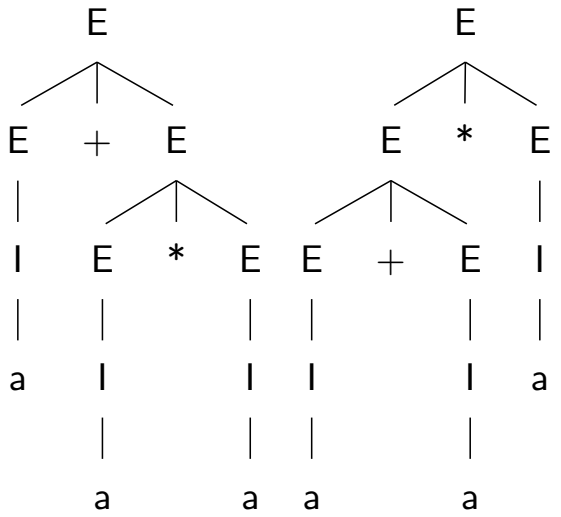
1. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow I + E \Rightarrow a + E \Rightarrow a + I \Rightarrow a + b$
2. $E \Rightarrow E + E \Rightarrow E + I \Rightarrow I + I \Rightarrow I + b \Rightarrow a + b$.

Definition 6.11 (Jednoznačnost a víceznačnost CFG)

- Bezkontextová gramatika $G = (V, T, P, S)$ je **víceznačná** pokud existuje aspoň jeden řetězec $w \in T^*$ pro který můžeme najít dva různé derivační stromy, oba s kořenem S dávající slovo w.
- V opačném případě nazýváme gramatiku **jednoznačnou**.
- Bezkontextový jazyk L je **jednoznačný**, jestliže existuje jednoznačná CFG G tak, že $L = L(G)$.
- **Bezkontextový jazyk L je (podstatně) nejednoznačný**, jestliže každá CFG G taková, že $L = L(G)$, je nejednoznačná. Takovému jazyku říkáme i **víceznačný**.

Example 6.11 (nejednoznačnost CFG)

Dva derivační stromy dávající $a + a * a$ ukazující víceznačnost gramatiky.



Příklad víceznačného jazyka

Example 6.12 (Víceznačný jazyk)

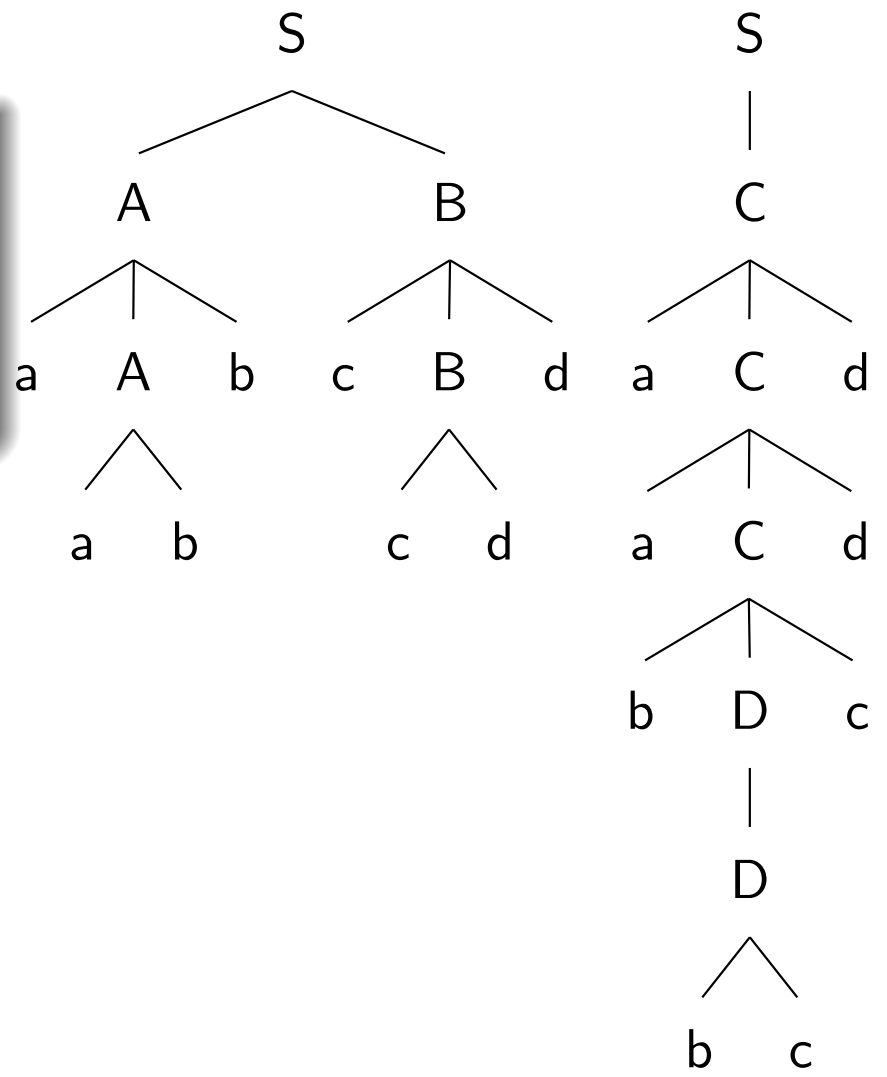
Příklad víceznačného jazyka:

$$L = \{a^n b^n c^m d^m | n \geq 1, m \geq 1\} \cup \cup \{a^n b^m c^m d^n | n \geq 1, m \geq 1\}.$$

1. $S \to AB|C$
2. $A \to aAb|ab$
3. $B \to cBd|cd$
4. $C \to aCd|aDd$
5. $D \to bDc|bc$.

Jakákoli gramatika pro daný jazyk bude generovat pro některá slova typu $a^n b^n c^n d^n$ dva různé derivační stromy.

Dva derivační stromy pro *aabbccdd*.



Odstanění víceznačnosti gramatiky

- Neexistuje algoritmus, který nám řekne, zda je daná gramatika víceznačná.
- Existují bezkontextové jazyky, pro které neexistuje jednoznačná bezkontextová gramatika, pouze víceznačné CFG.
- Existují určitá doporučení pro odstranění víceznačnosti.

Víceznačnost má různé příčiny:

- Není respektovaná priorita operátorů.
- Posloupnost identických operátorů lze shlukovat zleva i zprava.
- $S \rightarrow$ if then S else $S|$ if then $S|\epsilon$

  slovo 'if then if then else' má dva významy

  'if then (if then else)' nebo 'if then (if then) else'

  Řešení:
  - syntaktická chyba (Algol 60)
  - else patří k bližšímu if (preference pořadí pavidel)
  - závorky begin-end,odsazení v Python (asi nejčistší řešení).

Vynucení priority

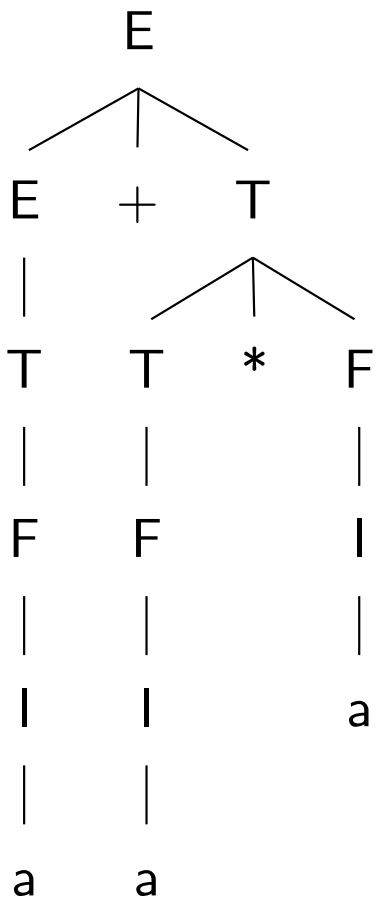
Řešením je zavést více různých proměnných, každou pro jednu úroveň 'priority'.
Konkrétně:

- **Faktor** je výraz který nesmí rozdělit žádný operátor.
  - identifikátory
  - výraz v závorkách
- **Term** je výraz, který nemůže rozdělit operátor $+$.
- **Výraz** může být rozdělen $*$ i $+$.

Jednoznačná gramatika pro výrazy:

1. $I \to a|b|Ia|Ib|I0|I1$
2. $F \to I|(E)$
3. $T \to F|T * F$
4. $E \to T|E + T$.

Jediný derivační strom pro $a + a *$ a.



Jednoznačnost a kompilátory

Kompilace výrazu (zásobník na mezivýsledky + dva registry):

(1) $E \to E + T$ ... pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2
(2) $E \to T$
(3) $T \to T * F$ ... pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2
(4) $T \to F$
(5) $F \to (E)$
(6) $F \to a$ ... push a

- 'a+a*a' získáme postupnou aplikací pravidel 1,2,4,6,3,4,6,6
- posloupnost obrátíme a vybereme pouze pravidla generující kód

  6,6,3,6,1
- nyní nahradíme pravidla příslušným kódem

  push a; push a; pop r1; pop r2; mul r1,r2; push r2; push a; pop r1; pop r2; add r1,r2; push r2

Shrnutí

- Gramatiky
  - obecné
  - kontextové
  - bezkontextové
  - regulární, pravé lineární
- jazyk gramatiky, derivace, derivace dává slovo, derivační strom (pro bezkontextové gramatiky), ekvivalentní gramatiky
- ne každá lineární gramatika má ekvivalentní pravou lineární
- bezkontextové gramatiky
- jednoznačné a (podstatně) víceznačné gramatiky.

Přehled kapitol

1. Úvod, Iterační lemma pro reg. jazyky
2. Redukovaný DFA a ekvivalence automatů, stavů
3. Nedeterministické ϵ–NFA, Operace zachovávající regularitu
4. Regulární výrazy, Kleeneova věta, Substituce, Homomorfizmus
5. Dvousměrné FA, Mealy a Moore stroje
6. Gramatiky, Chomského hierarchie, víceznačnost
7. Chomského NF, Pumping Lemma pro CFL
8. CYK – náležení do CFL
9. Zásobníkové automaty, Deterministické PDA
10. Uzávěrové vlastnosti, Dykovy jazyky
11. Turingův stroj, rozšíření
12. Lineárně omezené automaty, Univerzální TM, Diagonální jazyk
13. Nerozhodnutelné problémy, Postův korespondenční p.
14. Časová složitost