Cournot, le père de l'économie mathématique

Jacques Bair et Valérie Henry

Mots clés : Économie mathématique ; élasticité ; monopole ; duopole ; équilibre de Cournot ; oligopole ; concurrence parfaite.

1. Introduction

Alors que les mathématiques interviennent depuis fort longtemps dans les sciences dites « dures », telles que la physique ou l'astronomie, elles sont apparues très tardivement en économie. Cette situation est assez paradoxale dans la mesure où l'homme effectue des échanges commerciaux depuis toujours, à tout le moins depuis la révolution néolithique quand il s'est sédentarisé ; elle peut s'expliquer de diverses manières, notamment en raison de la plus grande complexité des phénomènes étudiés : il est, par exemple, plus difficile d'analyser et de prévoir le comportement d'un groupe d'individus aux intérêts souvent divergents plutôt que le mouvement d'un corps soumis à des forces bien connues. Certains auteurs avancent, pour expliquer ce retard de l'intervention des mathématiques en économie, une seconde raison d'ordre plus subjectif, ainsi qu'en témoigne cette citation : « les économistes ont longtemps souffert d'un véritable complexe d'infériorité. À voir les splendides succès qu'obtenaient, dans le bâtiment voisin, leurs collègues physiciens, qu'il s'agît de théorie planétaire ou d'électromagnétisme, ils se sentaient jaloux et se disaient qu'il faudrait attendre leur Newton. » ([8], p. 83)

Durant l'Antiquité et le Moyen Âge, l'économie était liée principalement à la morale et à la religion. Elle prit son réel envol, d'un point de vue scientifique, à la fin du 18^{e}, ou même au début du 19ème siècle, grâce à de grands penseurs parmi lesquels les plus réputés étaient A. Smith (et son « enquête sur les causes de la richesse des nations » en 1776), T. Malthus (et son « essai sur le principe de populations » en 1798) et D. Ricardo (et le « principe de politique économique et taxation » en 1817). C'est avec de tels savants que débute véritablement la recherche de lois économiques basées sur l'hypothèse de l'homme rationnel (l'*homo œconomicus* comme disent les spécialistes). Ces chercheurs s'efforçaient notamment de relier, de manière déductive, la théorie de la valeur au coût de production ; mais ils travaillaient essentiellement de manière littéraire, c'est-à-dire sans faire appel à des théories mathématiques, bien que certains auteurs, principalement Ricardo, faisaient déjà des « mathématiques dans la coulisse », selon la jolie formule de J. Hicks (qui a reçu le Prix Nobel d'Economie en 1972).

Le scientifique qui est le père spirituel de l'économie mathématique est le français A. Cournot : il peut être considéré comme le « Newton de l'économie » dont il est question ci-dessus. En effet, c'est lui qui le premier a introduit, en 1838, de véritables raisonnements mathématiques pour expliquer certains phénomènes économiques, essentiellement des problèmes liés aux richesses.

Dans cet article, nous donnons une brève biographie de ce savant, prolongée par l'examen de quelques extraits de son œuvre concernant la façon dont il a réellement introduit des raisonnements mathématiques en économie. Ensuite, nous analysons quelques passages fondamentaux de ses travaux montrant comment l'analyse mathématique élémentaire permet de résoudre des problèmes rencontrés dans l'univers économique.

Etant donné que Cournot rédigeait ses travaux de manière très pédagogique et claire, l'analyse de ses travaux nous donne l'opportunité d'introduire efficacement et simplement quelques concepts économiques de base. En particulier, nous avons l'occasion de présenter les principaux types de marchés étudiés par les économistes, en progressant de la théorie du monopole jusqu'à celle de la concurrence parfaite et en passant par celles du duopole ou encore des oligopoles. Nous montrons également comment le concept d'élasticité, fondamental en économie, a vu le jour.

2. Biographie

Le français Antoine-Augustin Cournot naquit à Gray le 28 août 1801 et décéda le 30 mars 1877 à Paris. Au terme de ses études supérieures, il obtint un diplôme de licencié en mathématiques en 1823, de licencié en droit en 1827 et de docteur en sciences, spécialité mathématiques, en 1829. Cournot consacra une partie importante de sa vie à l'enseignement. Avec l'appui du mathématicien Siméon Denis Poisson (célèbre pour la distribution de probabilité, une intégrale ou encore une équation aux dérivées partielles qui portent aujourd'hui son nom), il obtint en 1834 un poste de professeur d'analyse et de mécanique à la Faculté des Sciences de Lyon ; par la suite, il rédigea en 1841 un cours d'analyse mathématique, intitulé *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* [7], dans lequel il exposa de façon claire et efficace les fondements de l'analyse, réalisant de la sorte une remarquable synthèse des résultats connus à cette époque ; il compara notamment les approches de Newton et de Leibniz et écrivit sur ce sujet : « Le développement parallèle des idées de Newton et de celles de Leibniz n'est pas seulement un fait historique ; il tient au fond du sujet [...] les deux théories se complètent l'une l'autre [...] J'ai cherché à faire sentir les raisons de cette double solution, autant que cela m'était permis dans un ouvrage destiné à des études élémentaires. » ([7], p. IX). Cournot fut également Recteur des Académies de Grenoble (1835 - 1838) et de Dijon (1854 - 1862), ainsi qu'inspecteur général de l'instruction publique (1836 - 1852).

Cournot fut en fait un savant éclectique ([1]). Il étudia la sociologie [10] et s'intéressa aussi à des problèmes de nature philosophique ; il fut l'auteur de quatre ouvrages de réflexions générales sur les sciences, à savoir

- *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique* (1851)
- *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* (1861)
- *Considérations sur la marche des idées et des évènements dans les temps modernes* (1872)
- *Matérialisme, vitalisme, rationalisme. Étude sur l'emploi des données de la science en philosophie* (1875)

Cournot réalisa encore des recherches sur le hasard et le calcul des probabilités. Pour lui, le hasard est « la rencontre de deux séries causales indépendantes » ; de la sorte, les événements sont déterminés en ce qui concerne leur cause et leur effet, mais le hasard naît de leur rencontre imprévisible ou de l'apparition d'une nouvelle causalité qui leur est externe.

Cournot s'intéressa très tôt à l'économie. Il utilisa pour la toute première fois l'analyse mathématique pour résoudre des problèmes d'économie. Il fut en fait un précurseur de plusieurs théories économiques qui connurent un grand développement après sa mort, mais ses mérites ne furent reconnus que de façon posthume. Ses travaux peuvent aujourd'hui être considérés comme à la base de la théorie moderne de la formation des prix : ils annonçaient la création du marginalisme, théorie ([2]) selon laquelle la valeur économique résulte de l'utilité marginale, c'est-à-dire de la satisfaction apportée par l'apport d'une unité additionnelle. Son œuvre annonçait également l'émergence de l'économétrie et de la théorie des jeux ; en effet, d'une part, Cournot chercha à construire une loi empirique de la demande à partir d'observations, ce qui est précisément un objet essentiel de l'économétrie et, d'autre part, il construisit un modèle de compétition entre deux firmes et anticipa ainsi la notion d'équilibre développée plus tard par J.F. Nash, lauréat du Prix Nobel d'économie en 1994 ; il fallut attendre plus d'un siècle pour voir se développer ces deux disciplines qui occupent toutes deux une place de choix dans l'économie contemporaine.

([1]) Signalons que les œuvres complètes de A. Cournot sont rassemblées dans 10 tomes publiés par la Librairie Philosophique J. Vrin. Elles sont aussi numérisées par BnF de l'édition de Paris, la plupart des tomes étant accessibles par internet sur le site LiNuM (cellule MathDoc, collection Gallica).

([2]) Cette théorie fut créée, aux environs de 1870, indépendamment par William Jevons (1835 - 1882) en Angleterre, Léon Walras (1834 - 1910) en Suisse et Carl Menger (1840 - 1921) en Autriche.

3. Introduction de l'analyse en économie

Il nous semble intéressant de nous attarder quelque peu sur les motivations de COURNOT et la manière assez savoureuse dont il s'y prit pour introduire l'analyse mathématique au sein de théories économiques. Pour respecter les pensées du savant, nous citerons de nombreux extraits de son œuvre.

Dans ses deux livres sur les « richesses », [5] et [6], COURNOT se proposait d'étudier les « fondements de la théorie des valeurs échangeables ». Il fondait son raisonnement sur « un seul axiome », à savoir que « chacun cherche à tirer de sa chose ou de son travail la plus grande valeur possible ». Posé de la sorte, le problème étudié s'exprime naturellement dans un langage mathématique, et plus précisément dans le cadre de l'*analyse mathématique* puisque, formellement, il s'agit de rechercher un maximum d'une fonction. Il n'est dès lors pas surprenant que COURNOT, qui enseigna en 1834 l'analyse à la Faculté des Sciences de Lyon, ait basé son travail de 1838 sur ses connaissances mathématiques ; il écrivait dans sa préface :

> « Je me propose d'établir dans cet essai que la solution des questions générales auxquelles donne lieu la théorie des richesses, dépend essentiellement, non pas de l'algèbre élémentaire, mais de cette branche de l'analyse qui a pour objet des fonctions arbitraires, assujetties seulement à satisfaire à certaines conditions ».

Effectivement, dans son premier ouvrage [5], l'auteur n'évitait nullement les mathématiques et fournissait lui-même des arguments justificatifs :

> « L'emploi des signes mathématiques est chose naturelle toutes les fois qu'il s'agit de discuter des relations entre grandeurs ; et lors même qu'ils ne seraient pas rigoureusement nécessaires, s'ils peuvent faciliter l'exposition, la rendre plus concise, mettre sur la voie de développements plus étendus, prévenir les écarts d'une vague argumentation, il serait peu philosophique de les rebuter ».

COURNOT était toutefois conscient de l'originalité de sa démarche, puisque les économistes de l'époque ne faisaient pas appel aux mathématiques (autres que de simples calculs arithmétiques) ou les utilisaient de façon maladroite :

> « Il y a des auteurs, tels que SMITH et SAY, qui ont écrit sur l'économie politique en conservant à leur style tous les agréments de la forme purement littéraire ; mais il y en a d'autres, comme RICARDO, qui, abordant des questions plus abstraites ou recherchant une plus grande précision, n'ont pu éviter l'algèbre, et n'ont fait que la déguiser sous des calculs arithmétiques d'une prolixité fatigante ».

Il s'attendait de la sorte à déplaire aux économistes de son époque qui étaient souvent hostiles aux mathématiques :

> « C'est là, je le confesse, un plan qui doit m'attirer tout d'abord la réprobation des théoriciens accrédités. Tous se sont élevés comme de concert contre l'emploi des formes mathématiques ».

Mais il visait particulièrement les mathématiciens et ingénieurs en revenant, à nouveau, sur les avantages du langage mathématique par rapport au langage littéraire :

> « Tout en craignant qu'il [cet essai] ne paraisse beaucoup trop abstrait à la plupart des personnes qui s'occupent par goût de ces matières, je n'ose espérer qu'il mérite de fixer l'attention des géomètres ([3]) de profession, à moins qu'ils n'y découvrent le germe de questions plus dignes de leur sagacité. Mais il y a, en France surtout, grâce à une école célèbre, une classe nombreuse d'hommes qui, après avoir fait de fortes études dans les sciences mathématiques, ont dirigé leurs travaux vers les applications de ces sciences qui intéressent particulièrement la société. Les théories sur la richesse sociale doivent attirer leur attention ; et en s'en occupant ils doivent éprouver le besoin, comme je l'ai éprouvé moi-même, de fixer par les signes qui leur sont familiers une analyse si vague et souvent si obscure chez les auteurs qui ont jugé à propos de se contenter des ressources de la langue commune ».

Un quart de siècle après avoir achevé son premier livre, COURNOT constatait, avec une certaine modestie, que son ouvrage de 1838 n'avait guère connu de succès :

> « Je m'étais figuré qu'il devait y avoir de l'avantage à appliquer les signes mathématiques à l'expression de rapports et d'idées qui sont certainement du ressort des mathématiques : et je comptais encore sur un nombre honnête de lecteurs, dans

([3]) A cette époque, le terme « géomètre » était synonyme de « mathématicien ».

un siècle où l'on étudie surtout les mathématiques pour être ingénieur, et où l'on recherche l'état d'ingénieur en vue surtout de se faire admettre sur un bon pied dans les grandes entreprises qui donnent la richesse. Je m'étais trompé ».

Il s'est alors demandé si son échec provenait de l'usage de mathématiques :

« Je voudrais voir aujourd'hui si j'ai péché par le fond des idées ou seulement par la forme : et à cette fin, j'ai repris mon travail de 1838 en le corrigeant, en le développant là où les développements manquaient, en le complétant sur les points auxquels je m'étais abstenu de toucher, et surtout en le dépouillant absolument de l'attirail d'algèbre qui effarouche tant en ces matières ».

C'est ainsi qu'il a cherché à faire connaître ses idées en utilisant uniquement un langage littéraire et rédigea un nouveau livre [6] sur le sujet ; alors que le premier ouvrage comptait 155 pages, le second en comprenait 332.

4. Théorie du monopole

Les économistes s'intéressent aux marchés, c'est-à-dire, d'après une définition de Samuelson (lauréat du Prix Nobel d'Economie en 1970), aux « mécanismes par lesquels des acheteurs et des vendeurs interagissent pour déterminer le prix et la quantité d'un bien ou d'un service » ([11], p. 27) . Ils considèrent plusieurs formes d'organisation des marchés, dont les deux extrêmes et probablement les plus connues sont :

- la *concurrence parfaite* caractérisée par une multitude de producteurs vendant tous un même produit
- le *monopole* où le marché comprend un seul producteur vendant son bien qui n'a pas de véritable substitut.

Mais, ces deux types de marché sont théoriques : dans la réalité, la production du bien considéré est généralement écoulée par un petit nombre de vendeurs concurrents, confrontés à une multitude de demandeurs. On parle alors d'*oligopole* ; en particulier, il s'agit d'un *duopole* lorsqu'on dénombre deux offreurs.

Dans ses deux livres sur les richesses ([5] et [6]), Cournot aborde ces différents types de marchés, en allant du plus simple au plus compliqué ; son exposé est très pédagogique : mathématiquement, il déduit chaque théorie de la précédente, la concurrence parfaite étant le cas limite correspondant au cas où le nombre de producteurs devient « indéfini ».

Comme l'auteur, commençons par la théorie la plus simple, celle du monopole. Il y a lieu de considérer deux cas selon que la production est étudiée sans coût ou avec des frais de production.

4.1. Production sans coût

Cournot aborde, dans ses deux ouvrages déjà cités, le problème concret relatif à la production d'une eau minérale. Il considère tout d'abord le cas d'un seul propriétaire d'une source : c'est le *monopoleur* ; nous ne reprenons ici que la présentation faite par l'auteur dans son premier ouvrage [5].

Le monopoleur doit déterminer le prix de l'eau qui va rendre la plus grande possible « la valeur d'inventaire de la quantité annuellement produite et annuellement demandée dans l'étendue du pays ou du marché que l'on considère ». Mathématiquement, il convient de rechercher le maximum de la fonction

$$f : p \mapsto pF(p)$$

représentant « la valeur totale de la quantité débitée annuellement », souvent appelé de nos jours le *revenu brut* et qui sera par la suite noté R, en admettant que « le débit ou la demande annuelle de cette denrée est une fonction particulière $F(p)$ du prix p de cette denrée ».

Cournot énonce des conditions pour l'existence (alinéa 24) et l'unicité (alinéa 25) du maximum souhaité en se plaçant successivement dans les registres suivants :

1. En langage littéraire :

   « Puisque la fonction $pF(p)$ va d'abord en croissant avec p, puis finalement en décroissant, il y a une valeur de p qui la rend un maximum ».

Cette affirmation est précédée dans le texte par une justification, toujours dans un registre verbal, portant sur des propriétés des fonctions de demande et de revenu total :

« Puisque la fonction $F(p)$ est continue, la fonction $pF(p)$ qui exprime la valeur totale de la quantité débitée annuellement le sera aussi. Cette fonction deviendrait nulle si p était nul, puisque la consommation d'une denrée reste toujours finie, même dans l'hypothèse d'une absolue gratuité ; ou, en d'autres termes, on peut toujours assigner par la pensée au nombre p une valeur assez petite pour que le produit $pF(p)$ soit sensiblement nul. La fonction $pF(p)$ s'évanouit encore quand p devient infini, ou en d'autres termes on peut toujours assigner par la pensée au nombre p une valeur assez grande pour que la denrée cesse d'être demandée et produite à ce prix ».

2. Avec une formule faisant intervenir la dérivée première de la fonction de demande :

« [La valeur de p] est donnée par l'équation

$$(1) \quad F(p) + pF'(p) = 0$$

F' désignant, suivant la notion de Lagrange, le coefficient différentiel de la fonction F ».

3. A l'aide d'un graphique :

« Si l'on trace la courbe anb (fig. 1) dont les abscisses oq et les ordonnées qn représentent les variables p et D [c'est-à-dire $F(p)$], la racine de l'équation (1) sera l'abscisse du point n pour lequel le triangle ont, formé par la tangente nt et par le rayon vecteur on, est isoscèle, de sorte qu'on a $oq = qt$ ».

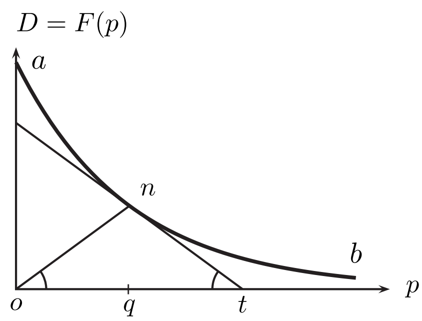

Fig.1

4. En recourant à un tableau :

« La construction d'une table où l'on trouverait ces valeurs [à savoir celles de $pF(p)$] serait le travail le plus propre à préparer la solution pratique et rigoureuse des questions qui se rattachent à la théorie des richesses ».

5. En faisant appel à des nombres qui mesurent les variations possibles dans les prix et dans la demande :

« Supposons que le prix étant devenu $p + \Delta p$, la consommation annuelle, accusée par des documents statistiques tels que les registres des douanes, soit devenu $D - \Delta D$, selon que l'on aura

$$\frac{\Delta D}{\Delta p} < \frac{D}{p} \text{ ou } \frac{\Delta D}{\Delta p} > \frac{D}{p} ,$$

l'accroissement de prix Δp devra augmenter ou diminuer le produit $pF(p)$; et l'on saura conséquemment si les deux valeurs p, $p + \Delta p$ (Δp étant censé une petite fraction de p) tombent en deçà ou au-delà de la valeur qui porte au maximum le produit en question ».

6. En revenant au registre analytique des formules, mais en utilisant cette fois la dérivée deuxième de la fonction de demande :

« La racine de l'équation (1) correspond à un maximum ou à un minimum selon que l'on a

$$2F'(p) + pF''(p) < \text{ ou } > 0 ,$$

ou bien, en substituant pour p sa valeur, et en ayant égard au signe essentiellement négatif de $F'(p)$,

$$2\left[F'(p)\right]^2 - F(p).F''(p) > \text{ ou } < 0 .$$

Par conséquent, lorsque $F''(p)$ est négatif, ou lorsque la courbe $D = F(p)$ tourne sa concavité du côté de l'axe des abscisses, il est impossible qu'il y ait un minimum, ni plus d'un maximum. Dans le cas contraire, l'existence de plusieurs minima et de plusieurs maxima n'est pas démontrée impossible ».

4.2. Production avec frais

Cournot envisage ensuite le cas où le monopoleur décide de tenir compte des frais de production, considérant ainsi le cas d'un producteur qui est amené à travailler l'eau de source pour en faire une eau minérale artificielle. Afin de ne pas rendre trop long cet article, nous présentons ici brièvement, dans un langage moderne, le problème mathématique posé dont la résolution fait appel à des résultats enseignés dans des cours de base en analyse.

Il s'agit cette fois de maximiser non plus le revenu brut, mais bien le *profit*, égal au revenu moins le coût, c'est-à-dire l'expression $P = pF(p) - C(D)$, où $C(D)$ désigne le coût correspondant à la production d'une quantité D. Une condition nécessaire pour atteindre le maximum recherché, en supposant satisfaites toutes les hypothèses de dérivabilité requises, entraîne l'annulation de la dérivée de P par rapport à la variable p, ce qui fournit, grâce au théorème de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{d}{dp}\left[pF(p) - C(D)\right] = D + p\frac{dD}{dp} - \frac{dC(D)}{dD}\frac{dD}{dp} = 0.$$

Il convient de signaler que les économistes contemporains utilisent souvent un raisonnement plus simple. Ils expriment le profit P en fonction de l'unique variable quantité, notée désormais q et non plus D comme précédemment ([4]), faisant ainsi appel à l'égalité $p = f(q)$ où f désigne la fonction réciproque de F ([5]). En conséquence, une condition nécessaire pour l'obtention du maximum cherché est la suivante :

$$\frac{dP}{dq} = \frac{d}{dq}\left[R(q) - C(q)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{dR}{dq} = \frac{dC}{dQ}.$$

Comme il est de coutume d'appeler les dérivées de R et de C par rapport à q respectivement le *revenu marginal* et le *coût marginal* ([6]), l'égalité ci-dessus se traduit par cette formulation bien connue des économistes : dans la théorie du monopole, le bénéfice est maximum lorsque le revenu marginal est égal au coût marginal.

5. Introduction du concept d'élasticité

Comme nous l'avons vu chez Cournot, les économistes s'intéressent à l'impact d'une hausse du prix d'un bien sur sa consommation annuelle. Il est clair que, généralement, une augmentation de prix entraîne une diminution de la consommation. Cette réaction de la demande pourrait être mesurée par le rapport $\frac{\Delta q}{\Delta p}$, où q, p, Δq et Δp désignent encore la quantité demandée, le prix, la variation de la quantité et la variation du prix respectivement. Mais ce rapport présente un double inconvénient. D'une part, il dépend clairement des unités dans lesquelles sont exprimées les deux variables q et p; par exemple, imaginons qu'une même demande soit exprimée une fois en tonnes et une autre fois en kilos : le rapport serait alors multiplié par un facteur mille alors même que la situation économique n'a pas été modifiée. D'autre part, un même rapport peut se référer à des situations économiques fort différentes; en guise d'exemple, lorsque le prix passe de 9 à 10 unités monétaires, et que, parallèlement, la demande varie de 15 à 10 ou de 1000005 à 1000000, le rapport $\frac{\Delta q}{\Delta p}$ est égal à -5 dans les deux cas, mais la quantité demandée reste pratiquement inchangée dans la seconde situation au contraire de la première.

Pour éviter ces deux problèmes, il est recommandé de travailler non pas avec les variations absolues, mais avec les variations relatives de la quantité demandée et du prix. C'est ce qu'a parfaitement compris Cournot, ainsi que nous l'avons vu dans son raisonnement relatif à la maximisation du revenu brut dans la théorie du monopole.

En fait, en considérant les cas où $\frac{\Delta q}{\Delta p} < \frac{q}{p}$ et $\frac{\Delta q}{\Delta p} > \frac{q}{p}$ comme on l'a signalé ci-dessus, Cournot avait eu l'intuition de distinguer (implicitement) ce que l'on appelle de nos jours les demandes *élastiques* et *inélastiques* (ou *rigides*), c'est-à-dire celles caractérisées par une *élasticité* respectivement supérieure ou inférieure à 1 en valeur absolue.

Mais, ce n'est qu'à la fin du 19ème siècle que l'économiste anglais A. Marshall (1842 - 1924) introduisit, en 1885, ce terme d'*élasticité* pour désigner le rapport entre les variations relatives des quantités et les variations relatives des prix. En fait, le britannique recourait comme le français aux rapports $\frac{\Delta q}{q}$ et $\frac{\Delta p}{p}$, mais considérait tout simplement le quotient du premier par le second. Il est intéressant de remarquer que Marshall désignait l'élasticité par le terme de *responsiveness* ([7]), car il était probablement conscient de la différence entre le concept économique étudié et la perception courante qu'en donne la physique : effectivement, l'élasticité traduit bien la façon dont une grandeur réagit sous l'influence de la variation d'une autre, mais, en économie et contrairement à ce qui se passe en physique,

([4]) Cet abandon de la notation employée par Cournot est justifié par l'usage courant de la plupart des économistes d'aujourd'hui.

([5]) Il nous semble que cette situation concrète, qui peut être illustrée simplement par exemple par des fonctions affines pour traduire la loi de demande, fournit une belle application pour illustrer le concept mathématique de fonction réciproque.

([6]) En ce qui concerne le coût C, le quotient différentiel $\frac{\Delta C}{\Delta q} = \frac{C(q+\Delta q)-C(q)}{\Delta q}$ est alors assimilé à l'accroissement de coût $C(q+1) - C(q)$ correspondant à la production d'une unité additionnelle (auquel cas $\Delta q = 1$), encore qualifiée de *marginale*. Un même raisonnement vaut pour le revenu R.

([7]) Cette dénomination est devenue obsolète de nos jours ... ce qui est peut-être regrettable.

elle ne se réfère pas à un retour de cette grandeur à son état initial.

Pour plus d'informations sur le concept d'élasticité, notamment comme application des dérivées, nous renvoyons le lecteur à tout ouvrage donnant les bases de l'économie politique, ainsi que, d'un point de vue didactique, à l'article [9].

6. Théorie du duopole

Dans les deux livres susmentionnés sur les richesses, Cournot s'est intéressé également au problème de concurrence au sein d'un duopole. Nous nous proposons ici de présenter l'analyse du duopole réalisée par le français, en suivant d'assez près sa deuxième version, à savoir la littéraire. Mais, nous n'escamoterons pas le traitement mathématique et travaillerons sur un exemple numérique ; toutefois, nous n'envisagerons pas ici le cas d'éventuels frais de production (8).

On considère à nouveau le marché d'une eau minérale dans une région où se trouvent, cette fois, deux sources différentes, et donc deux producteurs concurrents, mais produisant des eaux de même qualité. On désigne par
- A et B les deux propriétaires ; ils sont supposés « rationnels » et « intelligents » ;
- q_1 et q_2 les quantités mises sur le marché respectivement par A et par B ;
- q la quantité totale d'eau, soit $q = q_1 + q_2$;
- p le prix (unitaire) de l'eau qui est le même pour les deux producteurs, car les deux eaux produites sont similaires ; il est lié à la quantité totale q par ce qu'on appelle *la loi de demande* $q = F(p)$ déjà rencontrée dans la théorie du monopole ;
- R_1 et R_2 les revenus bruts de A et de B respectivement.

On va d'abord envisager deux situations particulières.

a) Dans un premier temps, on suppose que B ne se soucie pas du prix et que la quantité q_2 qu'il va livrer est constante. Dans ces conditions, A va mettre sur le marché une quantité q_1 qui rend son revenu brut R_1 le plus grand possible. Bien entendu, la valeur optimale de q_1 change si B opte pour une autre valeur de q_2 : la solution trouvée par A pour son problème est notée $\bar{q_1}$ et dépend donc de la valeur fixée pour q_2. On détermine de la sorte une fonction donnant $\bar{q_1}$ par rapport à q_2 ; cette fonction est quelquefois appelée la *loi de réaction pour A*.

b) Dans un second temps, on échange les rôles des deux producteurs : à présent, c'est A qui fixe sa quantité q_1 indépendamment du prix et B qui cherche à maximiser son revenu brut R_2, ce dernier ne dépendant donc que de q_2 ; par un raisonnement similaire au point précédent, la solution $\bar{q_2}$ trouvée par B est donnée en fonction de q_1 grâce à une *loi de réaction pour B*.

Dans la pratique, la solution optimale calculée dans une des deux situations évoquées ci-dessus n'est pas forcément en accord avec la valeur fixée dans l'autre cas ; en réalité, les décisions d'un propriétaire sont influencées par celles de l'autre et influencent aussi celles de son concurrent. De la sorte, chacun des propriétaires va être amené à modifier éventuellement son choix optimal, par une succession de tâtonnements, jusqu'à ce que soit atteint un *équilibre* en ce sens que chaque propriétaire maximise alors son revenu en tenant compte de ses anticipations relatives au comportement de son concurrent et les anticipations de chaque producteur concernant le comportement du concurrent se réalisent.

Si on assimile les deux propriétaires A et B à des *joueurs*, on est en présence d'un *jeu mathématique*. La solution de Cournot est un cas particulier d'un *équilibre de Nash* dans ce que l'on nomme aujourd'hui *la théorie des jeux* (9), parce qu'aucun des deux propriétaires ne peut alors améliorer son gain (ici son revenu) lorsque la stratégie (dans ce cas , la production) de son adversaire est fixée. Les lecteurs intéressés par cette discipline peuvent consulter notamment l'ouvrage [3].

Ce raisonnement littéraire peut évidemment être traduit en un langage mathématique, ce que fit aussi Cournot. Contentons-nous ici de traiter, en guise d'illustration, des données numériques très simples.

(8) Le cas avec des frais de production est assez proche de celui sans frais ; lorsque les coûts sont fixes, le problème mathématique est simple et constitue une belle application d'un problème concret d'optimisation (pour des fonctions à une variable) et de résolution de systèmes linéaires : le lecteur intéressé par ce sujet peut utilement consulter le CD accompagnant l'ouvrage [4].

(9) Cette théorie mathématique a été initiée par le grand mathématicien von Neumann (1903 - 1957) en collaboration avec l'économiste Morgenstern (1902 - 1977) dans leur célèbre ouvrage [12] datant du milieu du siècle dernier.

Admettons que la loi de demande est donnée par l'égalité suivante : $p = K - q$ où K désigne une constante positive qui vaut la quantité maximale pouvant être demandée (en fait, c'est la quantité demandée lorsque le prix est nul).

Le système formé par les deux équations de réaction est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dq_1}\left[q_1\left(K - q_1 - q_2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow q_1 = \frac{K}{2} - \frac{q_2}{2} \\ \frac{d}{dq_2}\left[q_2\left(K - q_1 - q_2\right)\right] = 0 \Leftrightarrow q_2 = \frac{K}{2} - \frac{q_1}{2} \end{cases}$$

La solution est donc donnée par :

$$\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = \frac{K}{3}$$

Ces valeurs sont les coordonnées du point d'intersection des deux droites décrivant les lois de réaction.

En notant

$$R_i = R_i\left(q_1, q_2\right) = q_i\ f\left(q_1 + q_2\right) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2$$

ces valeurs $\bar{q}_1$ et $\bar{q}_2$ donnent lieu à ces inégalités (pour des valeurs de q_1 et de q_2 comprises entre 0 et $\frac{K}{2}$) :

$$\begin{cases} R_1\left(q_1, \bar{q}_2\right) \leqslant R_1\left(\bar{q}_1, \bar{q}_2\right) \\ R_2\left(\bar{q}_1, q_2\right) \leqslant R_2\left(\bar{q}_1, \bar{q}_2\right) \end{cases}$$

ces inégalités montrent bien analytiquement qu'il s'agit d'un équilibre de Nash.

Montrons géométriquement qu'il s'agit d'un équilibre, et que celui-ci est stable. Pour fixer les idées avec un exemple numérique élémentaire, supposons que $K = 12$ et que, dans une première étape (en fait la situation a) ci-dessus), le propriétaire B fixe sa quantité constante, égale à $q_2 = 2$: la quantité optimale calculée par A vaut $q_1 = 6 - 1 = 5$. Par suite, B va réajuster sa production (situation b) ci-dessus) et mettre sur la marché $q_2 = 6 - 2,5 = 3,5$. Cette décision va engendrer une nouvelle réaction de A (à nouveau situation a)) qui passe cette fois à une production donnée par $q_1 = 6 - 1,75 = 4,25$, et ainsi de suite en passant alternativement d'une situation de type a) à une situation de type b). De la sorte, les deux propriétaires sont amenés à changer à tour de rôle leurs décisions et les quantités produites vont se rapprocher progressivement de la valeur d'équilibre 4 ; notons que si l'on partait de ce point d'équilibre, aucune modification dans les productions ne serait enregistrée.

Les mouvements dans les quantités constatés sur notre exemple peuvent être visualisés graphiquement : partant du point de coordonnées $q_1 = 5$ et $q_2 = 2$, les décisions de A et de B vont se trouver sur un chemin composé d'une succession de segments verticaux puis horizontaux délimités par les deux droites décrivant les réactions, cette ligne polygonale s'approchant (assez vite) du point d'intersection des deux droites en question.

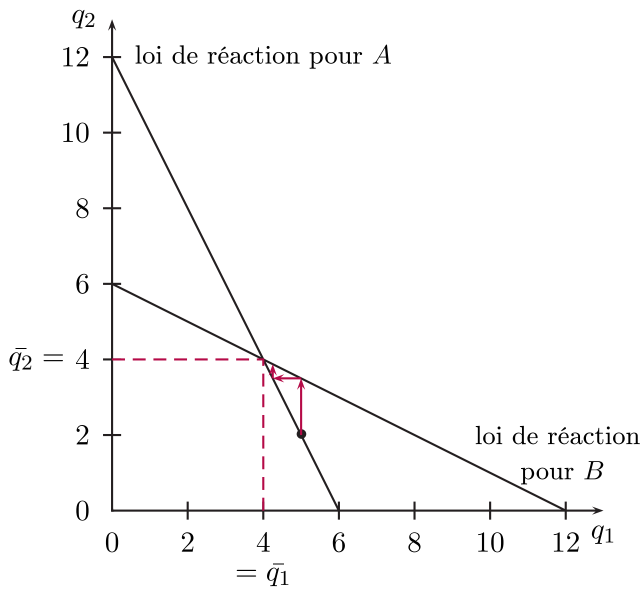

Fig. 2

7. Généralisations : théories de l'oligopole et de la concurrence parfaite

Nous allons reprendre et adapter l'exemple pratique de la théorie du duopole, tout d'abord au cas d'un oligopole comprenant n producteurs (ou joueurs) au lieu de 2. Nous conservons la même loi de demande, à savoir $q = K - p$, mais, pour être un peu plus général, nous tiendrons compte cette fois de frais en admettant que le coût de production est fixe et noté c (10).

Pour chaque propriétaire A_i (pour $i = 1, \ldots, n$), le profit P_i vaut :

$$P_i = \left(K - c - q_1 - q_2 - \ldots - q_n\right) q_i$$

En travaillant de la même manière que pour un duopole, on trouve un équilibre de Nash en résolvant

(10) Le cas sans frais s'obtient évidemment en faisant $c = 0$.

le système suivant, à n équations en les n inconnues q_i :

$$\begin{cases} 2q_1 + q_2 + \ldots + q_n &= K - c \\ q_1 + 2q_2 + \ldots + q_n &= K - c \\ &\vdots \\ q_1 + q_2 + \ldots + 2q_n &= K - c \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient la quantité $\bar{q_i}$ que doit produire chaque propriétaire A_i, à savoir

$$\bar{q_1} = \bar{q_2} = \ldots = \bar{q_n} = \frac{1}{n+1}(K-c).$$

Par exemple, pour $n = 10$, chaque propriétaire produit $\frac{1}{11}(K-c)$. La production totale pour les 11 joueurs est donc de $\frac{10}{11}(K-c)$. Par ailleurs, le prix de vente est de

$$\bar{p} = K - \frac{10}{11}(K-c) = \frac{1}{11}K + \frac{10}{11}c,$$

tandis que le profit de chaque joueur vaut $\frac{1}{11}(K-c)$.

Comme signalé antérieurement, le cas de la concurrence parfaite s'obtient par un passage à la limite, en partant de la théorie de l'oligopole, en faisant tendre le nombre n de joueurs vers l'infini.

En guise de conclusion, comparons les différents types de marchés abordés en nous plaçant dans le cas où la loi de demande est toujours donnée par $q = K - p$, et en tenant encore compte d'un coût de production constant c. Le tableau suivant résume les différents résultats faciles à obtenir :

marchés/résultats	production totale	prix	profit total
Monopole	$\frac{1}{2}(K-c)$	$\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(K-c)^2$
Duopole	$\frac{2}{3}(K-c)$	$\frac{1}{3}K + \frac{2}{3}c$	$\frac{2}{9}(K-c)^2$
Oligopole	$\frac{n}{n+1}(K-c)$	$\frac{1}{n+1}K + \frac{n}{n+1}c$	$\frac{n}{(n+1)^2}(K-c)^2$
Concurrence parfaite	$K-c$	c	0

Pour en savoir plus

[1] BAIR J. - HENRY V., Naissance du concept économique d'élasticité, *Bibnum*, http://www.bibnum.education.fr/

[2] BAIR J. - HENRY V., Le dilemme de Cournot, *Tangente*, n°135, Editions Pôle, Paris, 2010, pp. 34-36.

[3] BINMORE K., *Jeux et théorie des jeux*, De Boeck Université, Bruxelles, 1999.

[4] CAZZARO J.P.- NOËL G. - POURBAIX F. - TILLEUIL P., *Structurer l'enseignement des mathématiques par des problèmes*, De Boeck Editions, Bruxelles, 2001.

[5] COURNOT A.A., *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, 1838, Tome VIII des œuvres complètes, Librairie J. Vrin, Paris, 1980.

[6] COURNOT A.A., *Principes de la théorie des richesses*, 1863, Tome IX des œuvres complètes, Librairie J. Vrin, Paris, 1981.

[7] COURNOT A.A., *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, 1841, Tome VI/I des œuvres complètes, Librairie J. Vrin, Paris, 1984.

[8] DAVIS P.J. - HERSH R., *L'empire mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1988

[9] HENRY V., Dé-transposition et décalage interdisciplinaire : l'exemple de l'élasticité de la demande, *Repères-IREM*, n° 63, 2006, pp. 13-26.

[10] LEROUX R., *Cournot sociologue*, Presses Universitaires de France, Paris, 2004.

[11] SAMUELSON P.A. - NORDHAUS W.D., *Economie*, Editions Economica, 16e édition, Paris, 2000.

[12] VON NEUMANN J. - MORGENSTERN O., *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1953.

J. Bair est professeur à l'Université de Liège (✉ J.Bair@ulg.ac.be) et V. Henry travaille à l'Université de Liège et aux Facultés Universitaires Notre Dame de la Paix à Namur (✉ valerie.henry@fundp.ac.be).