Aplikace matematiky

Beran požadavky:
- docházka 5/6 → 1 omluvená absence = 0,5 neomluvenej
- průběžná aktivita – 1 příklad na tabuli

Program:
1. Matematika ve volbách
2. Matematika v ekonomii
3. Matematika v zeměpise / v biologii
4. Matematika v chemii
5. Matematika v technice / v umění
6. Matematika ve fyzice

---

12. 10. 2023

ČISTÁ MATEMATIKA „teorie" $\xleftarrow{\text{problémy}}$ / $\xrightarrow[\text{nástroje}]{}$ APLIKOVANÁ MATEMATIKA „praxe"

ČISTÁ MATEMATIKA
- aritmetika
- syntetická geometrie
- algebra
- analytická geometrie
- diferenciální a integrální počet
- kombinatorika
- pravděpodobnost, statistika
- deskriptivní geometrie
- matematické struktury
- teorie grafů
- logika
- teorie čísel

APLIKOVANÁ MATEMATIKA
- stavitelství (konstrukce), strojírenství
- obchod → finančnictví, pojišťovnictví
- organizace společnosti, vojenství
- navigace, astronomie, měření času
- hudební ladění
- novověká věda a technika (18., 19. st.)
- šifrování

ČISTÁ MATEMATIKA $\xleftrightarrow[\text{metody}]{\text{nástroje}}$ APLIKOVANÁ MATEMATIKA

výběr studentů VŠ
- → ~ 5% čistá matematika
- → ~ 30% matematika jako pomocný předmět
- → + statistika

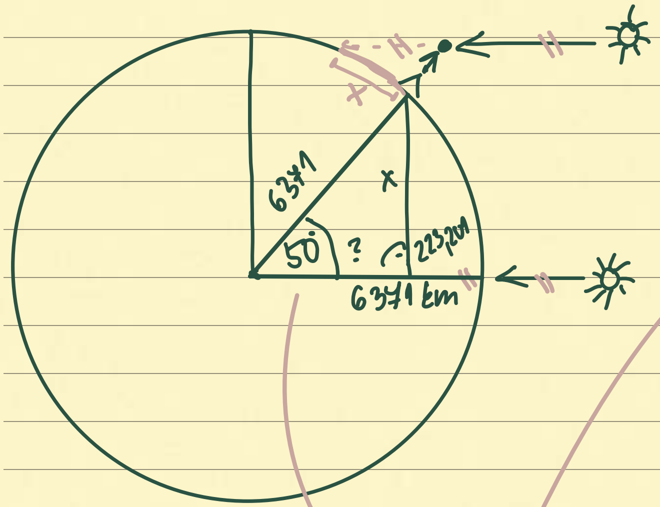
Je potřeba se zaměřit i na ostatní studenty

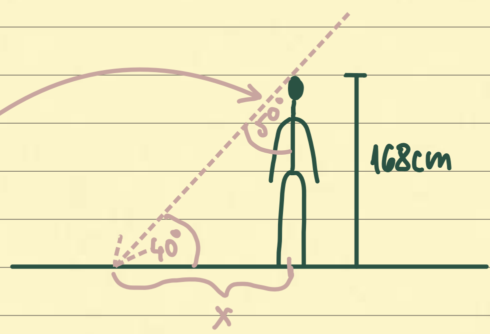
APLIKACE VE VÝUCE

1.) Určete délku vašeho stínu v pravé poledne v Praze o rovnodennosti.

→ kolmo na rovník

Výška.... 168cm

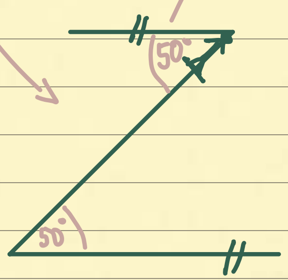




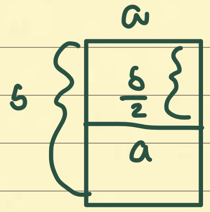
$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{168}{x}$$

$$x = \frac{168}{\operatorname{tg} 40^\circ}$$

$$x \doteq 200{,}2 \text{ cm}$$



2.) Odvoďte poměry stran papíru A4



$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{1}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{2a} \quad /\cdot b \cdot 2a$$

$$2a^2 = b^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$a\sqrt{2} = b \quad /:a$$

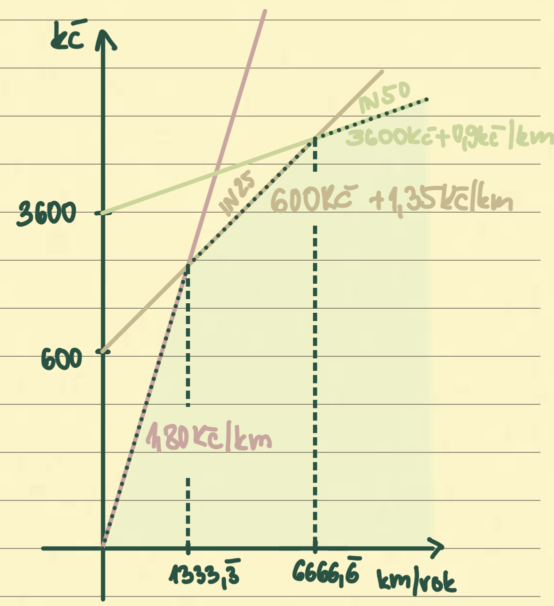
$$\sqrt{2} = \frac{b}{a}$$

3.) IN 25 stojí 600kč/rok.

IN 50 stojí 3600kč/rok.

1km = 1,80 kč

co se vyplatí?



$$1{,}80x = 600 + 0{,}75 \cdot 1{,}80x$$
$$1{,}80x - 1{,}35x = 600$$
$$0{,}45x = 600$$
$$x = 1333{,}\overline{3} \text{ km}$$

$$600 + 0{,}75 \cdot 1{,}80x = 3600 + 0{,}5 \cdot 1{,}80x$$
$$0{,}45x = 3000$$
$$x = 6666{,}\overline{6} \text{ km}$$

Do $1333{,}\overline{3}$ km za rok se oplatí jezdit bez slevy, pak se oplatí IN25 a po $6666{,}\overline{6}$ km za rok se oplatí IN50.

4.) Čas a rychlost skoku do vody: 5 m, 10 m.

t: $a = \frac{s.t^{-2}}{2}$

$g \doteq 9{,}81$

$s \doteq \frac{1}{2} g t^2$

$t_1 \doteq \sqrt{\frac{5}{9{,}81} \cdot 2} \doteq 1{,}00\ s$

$t_2 \doteq \sqrt{\frac{10}{9{,}81} \cdot 2} \doteq 1{,}42\ s$

v: $v_1 \doteq 9{,}81 . t_1$

$v_1 \doteq 9{,}90\ m/s$

$v_2 \doteq 9{,}81 . t_2$

$v_2 \doteq 14{,}00\ m/s$

5.) Röntgen: intenzita o ½ .... 13,5 mm olova.
? tlusté olovo, aby byla intenzita menší jak 1%

$13{,}5 n = \frac{1}{2^n}$

$\frac{1}{2^n} = 0{,}01 \quad / 2^n$

$1 = 0{,}01 . 2^n$

$100 = 2^n$

$\log_2 100 = n \quad \dots \quad n \doteq 6{,}64 \quad \rightarrow 13{,}5 . 6{,}64 \doteq 89{,}64\ mm$

MATEMATIKA V EKONOMII

19.10.2023

HISTORIE:
- A. SMITH: Bohatství národů (1776)
- D. RICARDO: Teorie komparativních výhod
- J.M. KEYNES: *ekonomie kontrolovaná státem*
- F.A. HAYEK: *volná ekonomie*
- L. VON MISES

makroekonomie: HDP, saldo zahraničního obchodu, inflace, míra nezaměstnanosti
geometrický průměr

x

mikroekonomie: nabídka a poptávka

fiskální politika: úrokové sazby, rozpočty,
monetární politika: kurz,

„finanční matematika" → peníze
→ posloupnosti...

OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

PŘÍKLAD:

850 kč ...... 25 000 zákazníků

+100 kč ...... −1000 zákazníků

−100 kč .... +1000 zákazníků

r (REVENUE) $= p \cdot q$

Jak nastavit cenu, abychom dosáhli max. zisk?

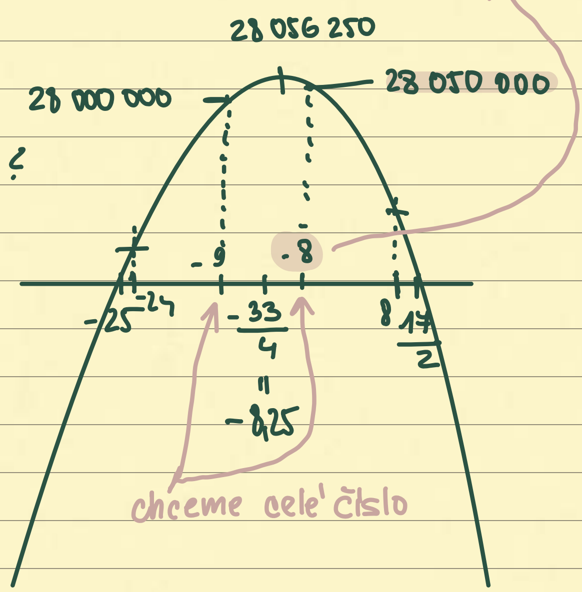
850 kč + 8.100 kč = 1650 kč

$$\underbrace{850 - 100n}_{\text{P - PRICE}} = \underbrace{25000 + 1000n}_{\text{Q - QUANTITY}}$$

$$(850 - 100n) \cdot (25000 + 1000n) = \max\ ?$$

$$850 \cdot 25000 + 850000n - 2500000n - 100000n^2 = \max\ ?$$

$$21250000 - 1650000n - 100000n^2 = \max\ ?$$



$$-100000n^2 - 1650000n + 21250000 = 0$$

$$-10n^2 - 165n + 2125 = 0$$

$$D = 112225$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$n_{1,2} = \frac{165 \pm 335}{-20} \quad n_1 = \frac{17}{2}, \quad n_2 = -25$$

+100 kč ..... −10 % .... 949 kč

vyjádři si n

$$(850 + 100n) \cdot (25000 \cdot 0{,}9^n) = \max$$

$$21250000 \cdot 0{,}9^n + 2500000 \cdot 0{,}9^n\, n = \max \ \dots$$ derivace

$$(21250000 \cdot 0{,}9^n + 2500000 \cdot n \cdot 0{,}9^n)' = 21250000 \cdot 0{,}9^n \ln 0{,}9 + 2500000 \cdot 0{,}9^n + 2500000 \cdot n \cdot 0{,}9^n \ln 0{,}9 =$$
$$0{,}9^n (21250000 \cdot \ln 0{,}9 + 2500000 + 2500000n \cdot \ln 0{,}9)$$

$$250000 \cdot 0{,}9^n (85 \ln 0{,}9 + 10 + 10n \ln 0{,}9) = 0$$

$n \doteq 0{,}9912$ Wolfram Alpha

...

$n = 1 \rightarrow 21\,375\,000$ oplatí se zvýšit o 100 kč nejvíc

$n = 0 \rightarrow 21\,250\,000$

$n = 2 \rightarrow 21\,262\,500$

VELIČINY CELKOVÉ, MEZNÍ A PRŮMĚRNÉ

J.SOKOL: Moc, peníze a právo

PŘÍKLAD:

množství

FIXNÍ NÁKLADY ..... FC (fixed) ..... nezávisí na Q
VARIABILNÍ NÁKLADY ...... VC (variable cost) .... závisí na Q

1/2 porce za 70% ceny – FC+VC
– Jaká část funkce je FC a aká VC? ⟹ VC – 60% FC – 40%

Mějme funkci celkových nákladů v závislosti na množství.

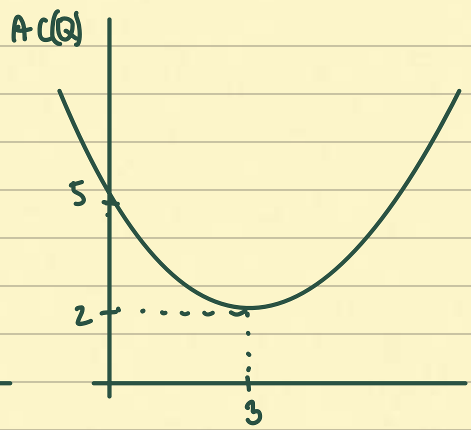
$TC(Q) = \frac{1}{3}Q^3 - 2Q^2 + 5Q$

total cost

(a) Vyšetřete průběh. → graf.
(b) Při jakém Q rostou náklady nejpomaleji? derivace $Q=2$
(c) Při jakém Q je výroba nejefektivnější? $Q=3$

$\frac{TC(Q)}{Q} = AC(Q)$ average $= \frac{1}{3}Q^2 - 2Q + 5$ $\quad (\frac{1}{3}Q^2 - 2Q + 5)' = \frac{2}{3}Q - 2 \quad Q=3$

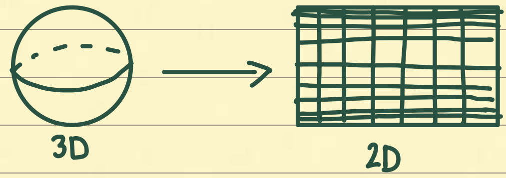
$(\frac{1}{3}Q^3 - 2Q^2 + 5Q)' = Q^2 - 4Q + 5$



MATEMATIKA V ZEMĚPISE =geografie

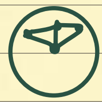
25.10.2023

- kartografie – kartografické zobrazení



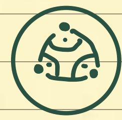
< úhlojevné
plochojevné

- geometrie
- geodésie – triangulace



- geologie

< v rovině
na sféře (= na zeměkouli); $R = 6378\,km$



25. října 2023 **ApIM: 3 Matematika v zeměpise**

U každé úlohy si nejprve přehledně načrtněte situaci. Zároveň provádějte vhodné zkoušky.

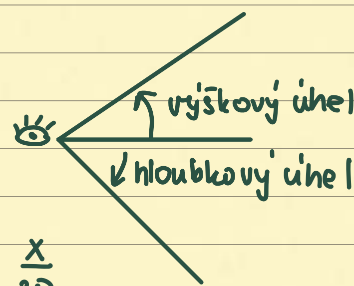
Všechny úlohy zkuste řešit nejprve obecně a zadané údaje dosazujte až po vyjádření neznámých.

Měřicí úlohy

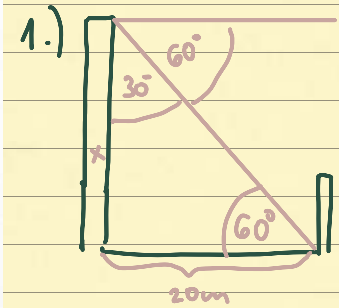
(Netřeba dodávat, že u všech úloh předpokládáme, že objekty stojí na vodorovné rovině.)

1. Z vrcholu věže vidíme úpatí brány, která je od ní podle plánku vzdálená 20 metrů, pod hloubkovým úhlem 60°. Jak vysoká je věž?
2. Z vrcholu věže vysoké 65 metrů vidíme patu komína v hloubkovém úhlu $\alpha = 10°19'$ a od její paty vidíme jeho vrchol ve výškovém úhlu $\beta = 17°43'$. Jak vysoký je komín?
3. Z původního stanoviště vidíme komín pod úhlem 30°. Když se k němu přiblížíme o 40 metrů, vidíme ho pod úhlem 60°. Jak vysoký je komín a jak je vzdálen od bližšího stanoviště? Řešte nejprve obecně pro úhly α, β a vzdálenost stanovišť d.
4. Z pozorovatelny vysoké 3 metry vzdálené 1 metr od břehu se šířka řeky jeví v zorném úhlu 45°. Jak je řeka široká?
5. Letadlo letí ve výšce 2500 metrů směrem k pozorovatelně. V okamžiku prvního měření bylo vidět od výškovým úhlem 28°, po deseti sekundách pod výškovým úhlem 50°. Jakou letí rychlostí?
6. Triangulace… (Ve čtyřúhelníku ABCD dopočítejte zbývající strany a úhly, znáte-li délku AB a úhly v trojúhelnících ABC a ABD.)

ÚLOHY V ROVINĚ:



1.)

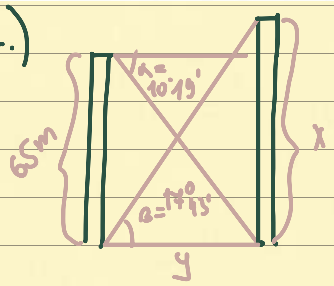


$\tan 60° = \frac{x}{20}$

$\sqrt{3} = \frac{x}{20}$

$20\sqrt{3} = x$

2.)



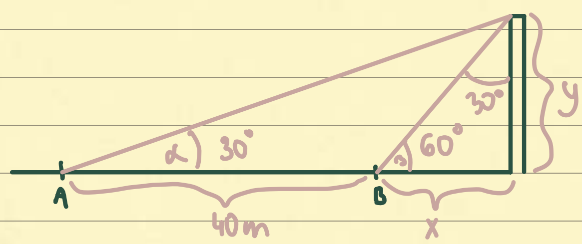
$\cotg 10°19' = \frac{y}{65}$

$y \doteq 357{,}08\,m$

$tg\ 17°43' \doteq \frac{x}{357{,}08}$

$x \doteq 114{,}07\,m$

3.)



$tg\ 30° = \frac{y}{40+x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3}(40+x) = y$

$\frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{x\sqrt{3}}{3} = y$

$\frac{(40+x)\sqrt{3}}{3} = y$

$tg\ 60° = \frac{y}{x}$

$x\sqrt{3} = y$

...

$tg\alpha = \frac{y}{d+x}$

$(d+x)tg\alpha = y$

...

$tg\beta = \frac{y}{x}$

$x . tg\beta = y$

$(d+x)tg\alpha = x . tg\beta$

$(40+x)\frac{\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3}$

$\frac{(40+x)\sqrt{3}}{3} = x\sqrt{3} \quad /:(\sqrt{3})$

$\frac{40+x}{3} = x \quad /\cdot 3$

$40+x = 3x$

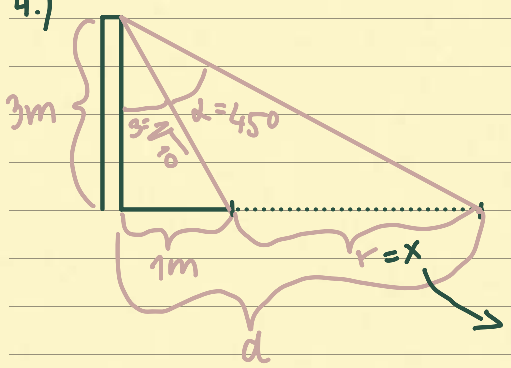
$40 = 2x$

$20 = x$

$20 . tg\beta = y$

$20\sqrt{3} = y$

4.)



$b^2 = 9+1$

$b = \sqrt{10}$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$

$\beta = 18°16'5{,}82''$

$\operatorname{tg} 63°16'5{,}82'' = \frac{d}{3}$

$d \doteq 5{,}96\,m$

$r \doteq 4{,}96\,m$ NEPŘESNÉ

$x^2 + 2x + 10$

$D = 4 - 40$

$x^2 = (\sqrt{10})^2 + \left(\sqrt{3^2 + (1+x)^2}\right)^2 - 2\sqrt{10}\sqrt{3^2+(1+x)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cancel{x^2} = 10 + 9 + 1 + 2x + \cancel{x^2} - \sqrt{10}\sqrt{10 + 2x + x^2}\sqrt{2}$

$0 = 20 + 2x - \sqrt{10}\sqrt{10+2x+x^2}\sqrt{2}$

$0 = 20 + 2x - \sqrt{200 + 40x + 20x^2}$

$20 + 2x = \sqrt{200+40x+20x^2} \quad /(\,)^2$

$400 + 80x + 4x^2 = 200 + 40x + 20x^2$

$0 = 16x^2 - 40x - 200 \quad /:4$

$0 = 4x^2 - 10x - 50 \quad /:2$

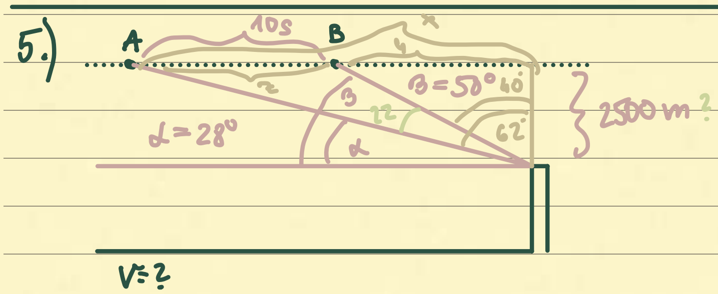
$0 = 2x^2 - 5x - 25$

$D = 25 + 200$

$D = 225$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 15}{4}$ → $x_1 = 5$ PŘESNÉ, $x_2 = -2{,}5$

5.)



$\operatorname{tg} 62° = \frac{x}{2500}$

$x \doteq 4701{,}82\,m$

$\operatorname{tg} 40° = \frac{y}{2500}$

$y \doteq 2097{,}75\,m$

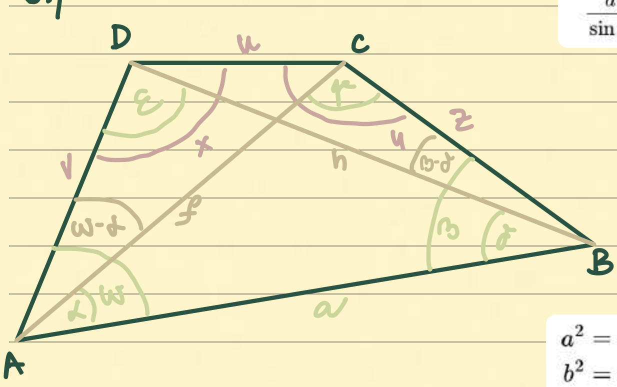
$z = x - y$

$z \doteq 2604{,}07\,m$

$v \doteq 260{,}407\,m/s$

$v \doteq 937{,}465\,km/h$

6.)



- známe
- chceme zjistit
- pomocné

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{z}{\sin\alpha} \longrightarrow z = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\varphi}$

$\frac{a}{\sin\varepsilon} = \frac{v}{\sin\delta} \longrightarrow v = \frac{a \cdot \sin\delta}{\sin\varepsilon}$

$\frac{a}{\sin\varepsilon} = \frac{h}{\sin\omega} \longrightarrow h = \frac{a \cdot \sin\omega}{\sin\varepsilon}$

$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{f}{\sin\beta} \longrightarrow f = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\varphi}$

$u^2 = z^2 + h^2 - 2zh \cdot \cos(\beta - \delta)$

$u = \sqrt{z^2 + h^2 - 2zh \cdot \cos(\beta-\delta)}$

$h^2 = u^2 + z^2 - 2uz \cdot \cos y$

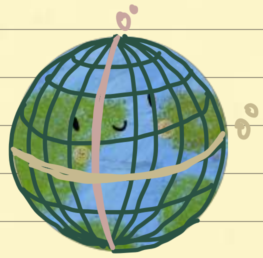
$h^2 - u^2 - z^2 = -2uz \cdot \cos y$

$\frac{h^2 - u^2 - z^2}{-2uz} = \cos y \longrightarrow y = \arccos\left(\frac{h^2-u^2-z^2}{-2uz}\right)$

$x = 180° - y - \beta - \omega$

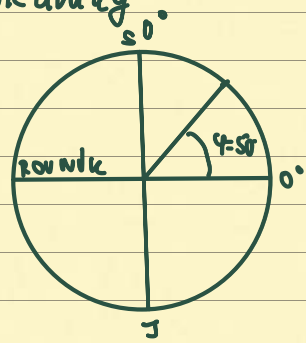
ÚLOHY VE SFÉŘE:

$R = 6378\ km$



Zeměpisná šířka ... φ ... S↑↓J .... rovnoběžky
Zeměpisná délka .... λ ... Z←→V .... poledníky

Praha: $\lambda = 15°$ východní délky
$\varphi = 50°$ severní šířky



1) V kolik hodin místního času je poledne v městě Santiago de Compostella?

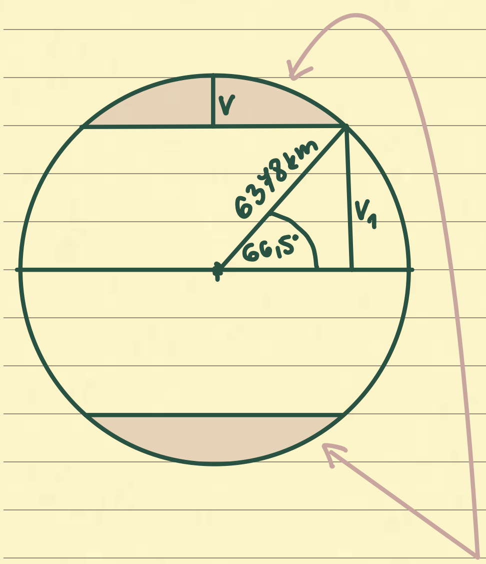
42°53'40'' S
8°32'20'' Z

Zimní čas: UTC+1
Letní čas: UTC+2

$$\frac{t\,(UTC)}{12} = \frac{8°32'}{180°}$$

$t\,(UTC) = 12°34'08''$
$t\,(zimní) = 13°34'08''$
$t\,(letní) = 14°34'08''$

2) Jakou část zemského povrchu zabírají polární podnebné pásy? (s koule)



Obsah kulového vrchlíku: $S = 2\pi r v$

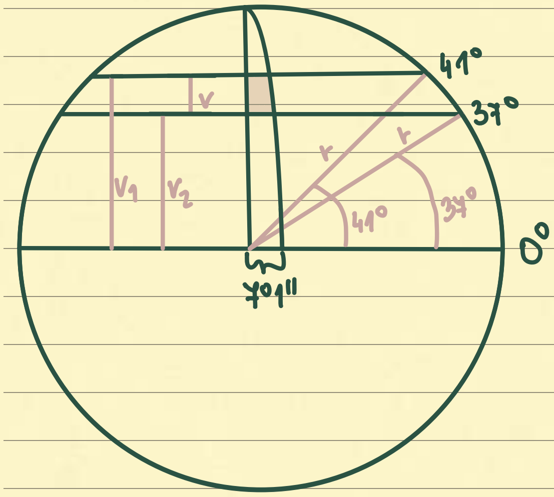
$$\sin(66{,}5°) = \frac{v_1}{6378km}$$

$v_1 = \sin(66{,}5°) \cdot 6378km$
$v_1 \doteq 5849km$

$v = 6378km - v_1$
$v \doteq 529km$

$S = 2\pi r v \doteq 2\pi \cdot 6378 \cdot 529$
$S \doteq 21\,199\,228\ km^2$
$2S \doteq 42\,398\,457\ km^2$

3) Určete rozlohu státu omezeného 37. a 41. rovnoběžkou severní šířky a 102°2'48" a 109°2'49" západní délky. (geodetický čtyřúhelník)



$109°2'49" - 102°2'48' = 7°1"$

Obsah kulové vrstvy: $S = 2\pi r v$

$r = 6378 km$

$\sin 41° = \frac{v_1}{6378 km}$

$v_1 = \sin 41° \cdot 6378 km$

$v_1 \doteq 4184 km$

$\sin 37° = \frac{v_2}{6378 km}$

$v_2 = \sin 37° \cdot 6378 km$

$v_2 \doteq 3838 km$

$v = v_1 - v_2$

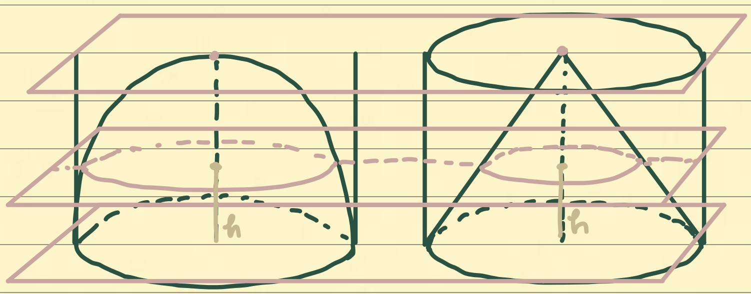
$v \doteq 346 km$

$S_{\text{kulové vrstvy}} = 2\pi r v \doteq 13\,865\,658 km^2$

$\frac{S_{\text{kulové vrstvy}}}{S_{\text{státu}}} = \frac{360°}{7°1"}$

$S_{\text{státu}} \doteq \underline{1386565 8km}$

$S_{\text{státu}} \doteq 269\,620{,}7 km^2$



Cavalieriho princip

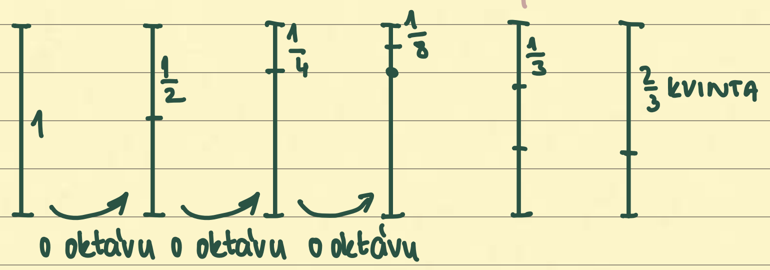
MATEMATIKA V HUDBĚ

• tempo	• míra (délky apod.)
• rytmus	• vzdálenost tónů, poměry frekvencí
• fráze	• symetrie: posunutí, zrcadlení ...
• melodie	• posloupnost tónů
• harmonie	• intenzita
• dynamika	

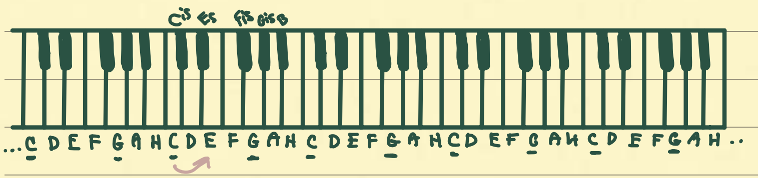
Hudební ladění

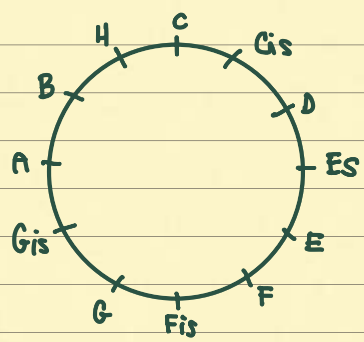
→ matematické principy – už ve starověkém Řecku
→ jednostrunné nástroje
→ tóny → stupnice

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ = oktáva.kvinta



$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{32}$ = tercia zle :(





Je to $\frac{5}{4}$ že vraj...

Malá tercie: $\frac{6}{5}$

MATEMATIKA V CHEMII

9. 11. 2023

Př.: 8 litrů .... 45% roztoku lihu
z 30% roztoku a 70% roztoku

$x \qquad y$

$x + y = 8$
$0{,}3x + 0{,}7y = 0{,}45(x+y)$

$x + y = 8$
$0{,}3x + 0{,}7y = 0{,}45x + 0{,}45y$

$x + y = 8$
$0{,}15x - 0{,}25y = 0 \quad /.4$

$x + y = 8$
$0{,}6x - y = 0$

$1{,}6x = 8$
$x = 5 \; ; \; y = 3$

5l 30% a 3l 70% roztoku.

Př.: Vyčíslete reakci a pojmenujte reaktanty

a) $4\,FeS_2 + 11\,O_2 \longrightarrow 2\,Fe_2O_3 + 8\,SO_2$
pyrit — oxid železitý — oxid siřičitý

b) $4\,C_7H_5O_6N_3 \longrightarrow 6\,N_2 + 7\,CO_2 + 10\,H_2O + 21\,C$
trinitrotoulen

$y \qquad z \qquad u \qquad v$

$x7C + x5H + x6O + x3N = y2N + zC + z2O + u2H + uO + vC$

$7x = z + v$
$5x = 2u$
$6x = 2z + u \rightarrow 12x = 4z + 2u$
$3x = 2y$
$21x = 4v$
$7x = 4z$

$12x = 4z + 5x$
$7x = 4z$

$28x = 4z + 4v$
$21x = 4v$

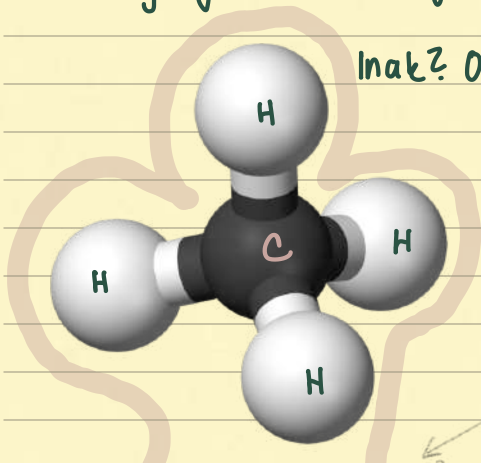
4 $\quad 3x = 2y \quad$ 6
4 $\quad 7x = 4z \quad$ 7
4 $\quad 5x = 2u \quad$ 10
4 $\quad 21x = 4v \quad$ 21

c) $KMnO_4 + H_2S + H_2SO_4 \longrightarrow S + MnSO_4 + K_2SO_4 + H_2O$
manganistan draselný — síran manganatý — síran draselný

STEREOCHEMIE

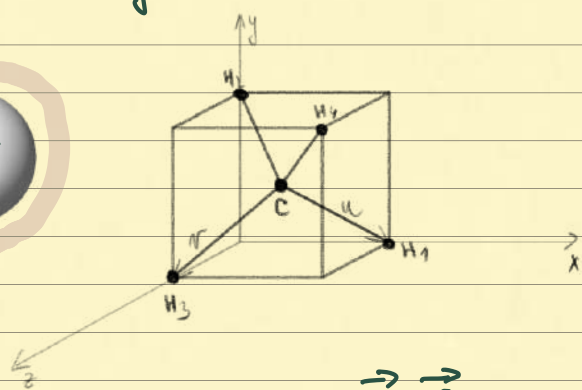
- prostorové vlastnosti molekul — vzdálenost, odchylka; symetrie
- chiralita ▷◁; krystalické mřížky

Př.: Máme pravidelný čtyřstěn. Když H_1, H_2, H_3 a H_4 jsou jeho vrcholy a C je jeho střed, jaká je odchylka $\measuredangle H_1CH_2$?



metan

Inak? Odchylka 2 vodíků a uhlíku v metanu.



$H_1 = [2,0,0]$
$H_3 = [0,0,2]$
$C = [1,1,1]$

$\vec{u} = (1,-1,-1)$
$\vec{v} = (-1,-1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{1\cdot(-1)+(-1)(-1)+(-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

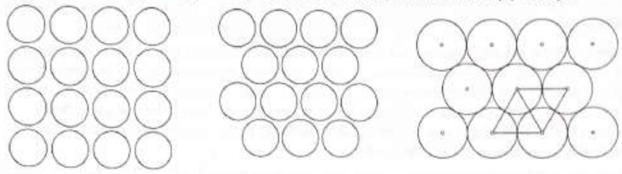
$$\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\alpha = 109°28'16{,}39'' \doteq 109{,}5°$$

PF.1. 3.1.2024

(a) Kolik dokážete upéct lineckých koleček o průměru 4 cm na plechu o rozměrech 80x50 cm?

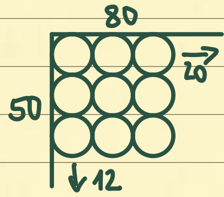
(b) Najděte rozměry plechu, pro který naopak čtvercové uspořádání bude nejvýhodnější.



Square packing Hexagonal packing

Plech: 80x50 cm

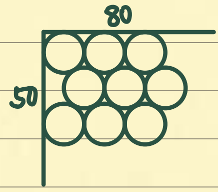
Kolečko: Ø 4 cm

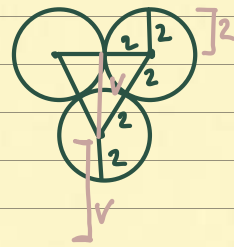


$80 : 4 = 20$

$50 : 4 = 12$

$20 \cdot 12 = 240$





$v^2 + 2^2 = 4^2$

$v^2 + 4 = 16$

$v^2 = 12$

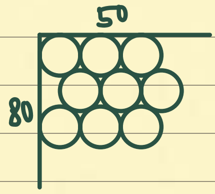
$v = 2\sqrt{3}$

$(50-4) : 2\sqrt{3} + 1 \doteq 14{,}28$

$80 : 4 = 20$ vejde se 19

každý 2. řádek

$7(20+19) = 273$

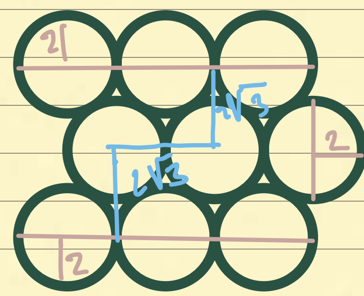


$(80-4) : 2\sqrt{3} + 1 \doteq 22{,}94$

$50 : 4 = 12{,}5$ vejde se 12 každý řádek

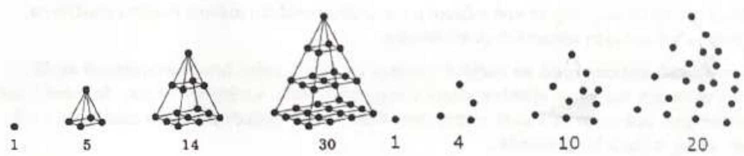
$22 \cdot 12 = 264$

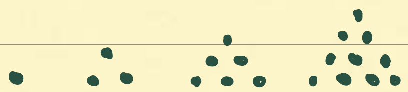
NEJVÝHODNĚJŠÍ



2. **Silvestrovský speciál: Skleničky.** Pro novoroční přípitek chcete postavit pyramidu z n skleniček pro všechny pozvané hosty. Kolik bude mít pater? Kolik bude mít pater, pokud základnami nebudou čtverce, nýbrž trojúhelníky?

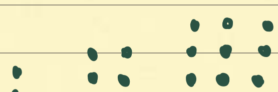
Obecně: Figurální čísla.



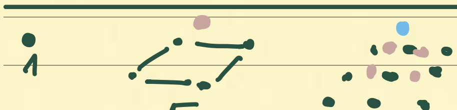


1 3 6 10 ...

$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\dots+n$

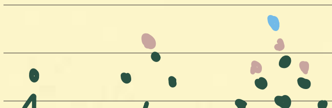


1 4 9 ... $\check{c}_n = n^2$



1 5 14

$\check{c}j_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \check{c}_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $1^2+2^2+\dots+n^2$



1 4 10

$tj_n = 1+3+\dots+\frac{n(n+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = ?$

Tombola:

a) $\frac{1}{n}$

b) $\frac{1}{n!}$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

3. **Bonus: Plesový speciál: Tombola.** Každý přispěje do tomboly nějakou věcí a každý si zakoupí lístek. Jaká je pravděpodobnost, že:

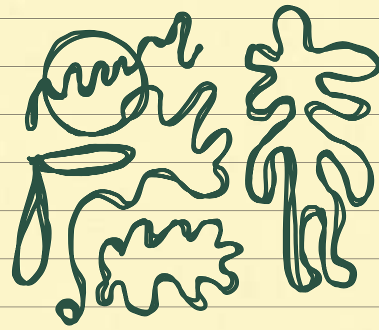
(a) právě vy si odnesete věc, kterou jste přispěli?

(b) každý si odnese vlastní věc?

(c) nikdo si neodnese vlastní věc?

Odpovědi pro 3, 4, 5 a obecně n účastníků nejprve odhadněte a následně přesně vypočítejte!

Pozn.: Tato úloha se také označuje jako *problém šatnářky* (též *hat-check problem, derangement*): jaká je pravděpodobnost, že roztržitá šatnářka, která hostům náhodně vrací jejich klobouky, vrátí alespoň jednomu hostu jeho vlastní klobouk? (I to se může na plese stát…)



Celsius a Fahrenheit:

4. **Celsius a Fahrenheit.** Odvoďte převodní vztah mezi stupni Fahrenheita a stupni Celsia, pokud jste si v předpovědi počasí všimli, že 10 °C = 50 °F, −5 °C = 23 °F a víte, že mezi stupnicemi je lineární závislost.

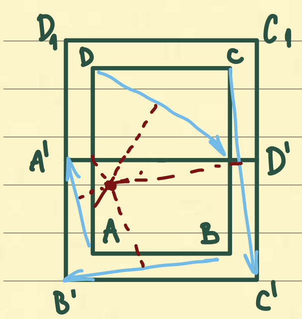
$10°C = 50°F \qquad -5°C = 23°F$

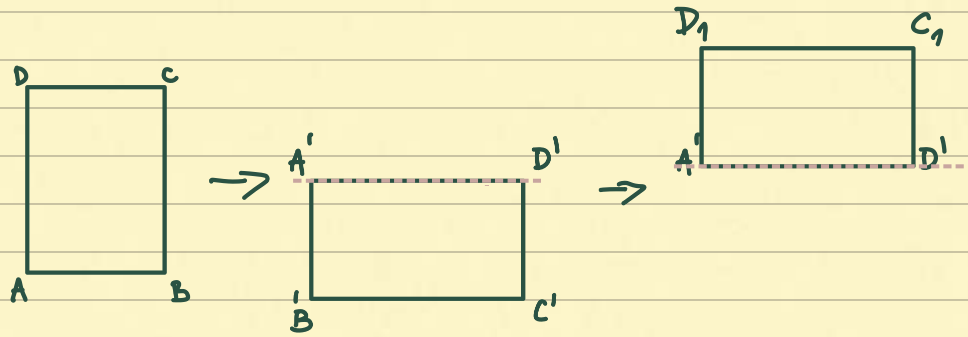
$$\begin{aligned}
10x + y &= 50 \\
-5x + y &= 23 \quad /\cdot 2 \\
10x + y &= 50 \\
-10x + 2y &= 46 \\
3y &= 96 \\
y &= 32 \\
10x + 32 &= 50 \\
10x &= 18 \\
x &= \frac{9}{5}
\end{aligned}$$

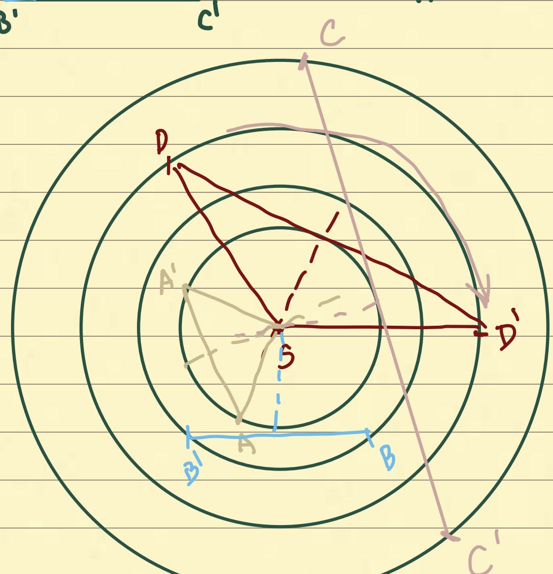
$\frac{9}{5}(°C) + 32 = (°F)$

Rozkládací stůl:

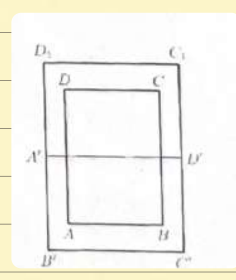
9. **Rozkládací stůl.** Dvojitá deska obdélníkového stolu $ABCD$ se má otočit kolem šroubu S do polohy $A'B'C'D'$, aby se pak mohla horní deska překlopit kolem osy $A'D'$ do polohy $A'D'C_1D_1$ (viz obrázek). Kam musíme umístit šroub?





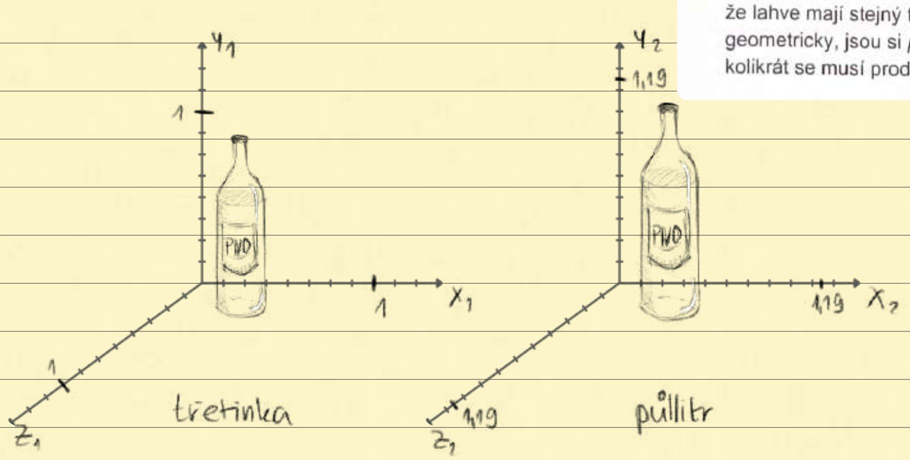


Spojíme obrazy a vzory, uděláme kolmice na středy těchto spojnic, kde se protnou, tam je šroub.



Lahváče:

10. **Lahváče.** Kolikrát je vyšší půllitrová láhev piva oproti třetince? (Předpokládáme, že lahve mají stejný tvar, tedy jedna je zvětšeninou druhé, neboli, řečeno geometricky, jsou si *podobné*.) (A obecně: aby se objem např. zdvojnásobil, kolikrát se musí prodloužit délka?



$x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 = 0{,}3$ $\qquad$ $x_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = 0{,}5$

použijeme krychli

$x_1 = y_1 = z_1 = \sqrt[3]{0{,}3}$ $\qquad$ $x_2 = y_2 = z_2 = \sqrt[3]{0{,}5}$

$\frac{\sqrt[3]{0{,}5}}{\sqrt[3]{0{,}3}} \doteq 1{,}1856$ krát

Obecně:

Co když se objem zdvojnásobí, o kolik je větší délka?

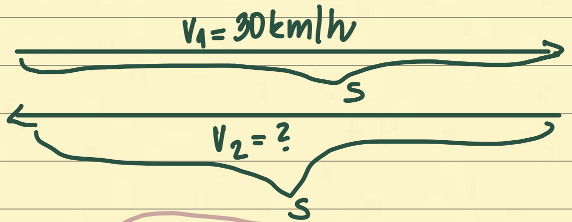
$x_1^3 = 1 \qquad x_2^3 = 2$

$x_1 = \sqrt[3]{1} \qquad x_2 = \sqrt[3]{2}$

$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{1}} = \sqrt[3]{2} \doteq 1{,}2599$ krát

Křivoklát:

5. **Výlet.** Vyrazili jste na kole na Křivoklát. Cestu tam jste ujeli průměrnou rychlostí 30 km/h. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí můžete jet stejnou cestou zpět, aby vaše celková průměrná rychlost neklesla pod 24 km/h? (*Pozn.*: Není to tak přímočaré, jak to na první pohled vypadá…)



$\frac{s}{t_1} = 30 \quad \ldots \quad s = 30t_1$

$\frac{s}{t_2} = v_2 \quad \ldots \quad \frac{s}{1{,}5t_1} = v_2 \quad \ldots \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{t_1} = v_2 \quad \ldots \quad \underline{\underline{v_2 = 20}}$

$\frac{2s}{t_1 + t_2} = 24$

$\frac{60t_1}{t_1 + t_2} = 24$

$\frac{60t_1}{24} = t_1 + t_2$

$2{,}5t_1 = t_1 + t_2$

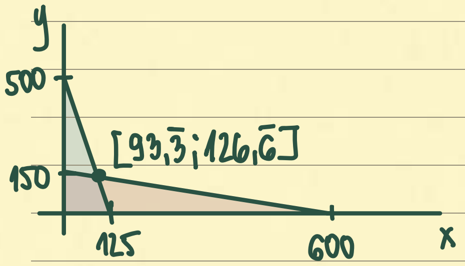
$1{,}5t_1 = t_2$

Optimalizace funkce více proměnných

$$48x + 56y = max$$

$$200x + 50y \leq 25000 \longrightarrow 4x + y \leq 500$$

$$50x + 200y \leq 30000 \qquad x + 4y \leq 500$$



8. **Optimalizace funkce více proměnných.** Malá cukrárna se chystá péct posvícenské koláče. Receptura požaduje, aby byly plněné mákem a tvarohem; množství máku a tvarohu použité na jeden koláč v jednotlivých variantách uvádí tabulka:

Jeden makovo-tvarohový koláč se tradičně prodává za 48 Kč, jeden tvarohovo-makový za 56 Kč. Spotřeba ostatních surovin je přibližně stejná v obou variantách. Vzhledem k tomu, že těsně před posvícením jsou obě suroviny v okolí rozprodány, musí cukrář vystačit pouze se zásobami – má k dispozici 25 kg máku a 30 kg tvarohu.

Kolik má upéct kterých koláčů, aby dosáhl maximálního zisku? Řešení znázorněte také graficky.

Nápověda:

(i) Vhodně si označte proměnné a sestavte (ne)rovnice pro spotřebu máku a spotřebu tvarohu.

(ii) Zakreslete je do grafu, sestavte funkci zisku a určete, pro jako kombinaci bude maximální.

(iii) Ověřte, která z možných celočíselných kombinací dává skutečně nejvyšší zisk.

	MÁK	TVAROH	CENA
MAKOVO-TVAROHOVÝ	200g	50g	48Kč
TVAROHOVO-MAKOVÝ	50g	200g	56Kč

$$48 . 93 + 56 . 126 = 11520$$

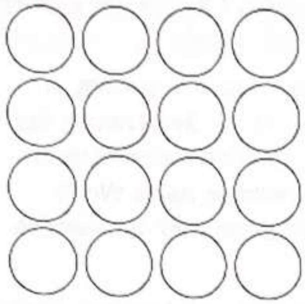
$$48 . 92 + 56 . 127 = 11528$$ CHYTÁK?

3. ledna 2024 **AplM: 6 Pár úloh na závěr**

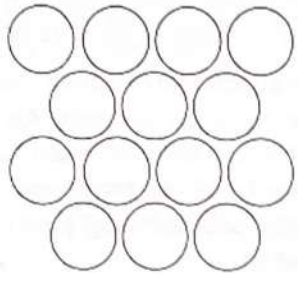
1. **Vánoční speciál: Pečení lineckých koleček.**

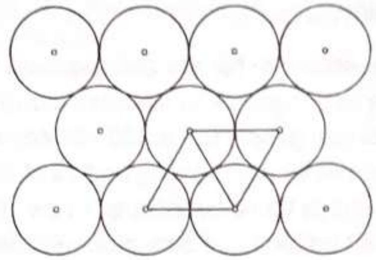
   (a) Kolik dokážete upéct lineckých koleček o průměru 4 cm na plechu o rozměrech 80x50 cm?

   (b) Najděte rozměry plechu, pro který naopak čtvercové uspořádání bude nejvýhodnější.



Square packing





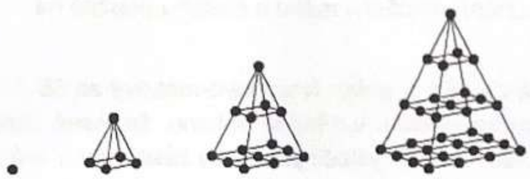
Hexagonal packing

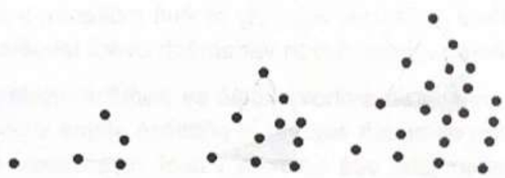
   (c) Bonus: „Nekonečný plech". Odvoďte a porovnejte hustoty čtvercového a trojúhelníkového uspořádání.

   (d) Prostorové zobecnění: „Sphere packing". (Kepler. Aplikace v chemii a jinde.)

2. **Silvestrovský speciál: Skleničky.** Pro novoroční přípitek chcete postavit pyramidu z n skleniček pro všechny pozvané hosty. Kolik bude mít pater? Kolik bude mít pater, pokud základnami nebudou čtverce, nýbrž trojúhelníky?

   Obecně: Figurální čísla.





3. **Bonus: Plesový speciál: Tombola.** Každý přispěje do tomboly nějakou věcí a každý si zakoupí lístek. Jaká je pravděpodobnost, že:

   (a) právě vy si odnesete věc, kterou jste přispěli?

   (b) každý si odnese vlastní věc?

   (c) nikdo si neodnese vlastní věc?

   Odpovědi pro 3, 4, 5 a obecně n účastníků nejprve odhadněte a následně přesně vypočítejte!

   Pozn.: Tato úloha se také označuje jako *problém šatnářky* (též *hat-check problem, derangement*): jaká je pravděpodobnost, že roztržitá šatnářka, která hostům náhodně vrací jejich klobouky, vrátí alespoň jednomu hostu jeho vlastní klobouk? (I to se může na plese stát...)

   Prázdninové úlohy

4. **Celsius a Fahrenheit.** Odvoďte převodní vztah mezi stupni Fahrenheita a stupni Celsia, pokud jste si v předpovědi počasí všimli, že 10 °C = 50 °F, −5 °C = 23 °F a víte, že mezi stupnicemi je lineární závislost.

Jaký je bod mrazu a bod varu vyjádřený ve °F? A naopak, kolik °C je při 0 °F? A kolik °C je v dystopickém románu Raye Bradburyho *451 stupňů Fahrenheita*? (Proč právě tolik?)

A pro jakou číselnou hodnotu udávají °C a °F stejnou teplotu?

5. **Výlet.** Vyrazili jste na kole na Křivoklát. Cestu tam jste ujeli průměrnou rychlostí 30 km/h. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí můžete jet stejnou cestou zpět, aby vaše celková průměrná rychlost neklesla pod 24 km/h? (*Pozn.*: Není to tak přímočaré, jak to na první pohled vypadá…)

6. **Faustformel für die Zeitangaben auf Wegschildern.** Haben Sie sich schon einmal gefragt, wie die Zeitangaben für Wanderweg-Etappen zustande kommen? Als Richtwerte zur Berechnung der Gehzeit gelten: Circa 300 Höhenmeter (hm) pro Stunde für den Aufstieg, ca. 500 Höhenmeter pro Stunde für den Abstieg und ca. 4 Kilometer horizontal pro Stunde. Wir berechnen beide Werte (Gehzeit für Höhendifferenz bzw. für Horizontalentfernung) zuerst separat. Dann wird der kleinere Wert halbiert und zum größeren Wert addiert.

   Spočítejte, jak dlouho podle tohoto vzorce trvá výstup od fjordu v Sunndalu na horskou chatu Fonnabu (cca 1500 m. n. m.) a jak dlouho naopak sestup, jestliže celková délka (nikoliv vodorovná) je 12 km a stoupání je přibližně rovnoměrné.

7. **Hustota zalidnění.** Pořadí pěti španělských regionů (Asturie, Baskicka, Galicie, Kastilie a Katalánska) podle počtu obyvatel je $\mathrm{Kat} > \mathrm{Gal} > \mathrm{Bask} > \mathrm{Kast} > \mathrm{Ast}$, podle rozlohy $\mathrm{Kast} > \mathrm{Kat} > \mathrm{Gal} > \mathrm{Ast} > \mathrm{Bask}$. Co z toho můžeme usoudit o uspořádání podle hustoty zalidnění?

   K zamyšlení: Jak by vypadalo zadání, abychom dostali úplné uspořádání? A jak naopak takové, z nichž bychom žádnou informaci nezjistili?

   ---

8. **Optimalizace funkce více proměnných.** Malá cukrárna se chystá péct posvícenské koláče. Receptura požaduje, aby byly plněné mákem a tvarohem; množství máku a tvarohu použité na jeden koláč v jednotlivých variantách uvádí tabulka:

   Jeden makovo-tvarohový koláč se tradičně prodává za 48 Kč, jeden tvarohovo-makový za 56 Kč. Spotřeba ostatních surovin je přibližně stejná v obou variantách. Vzhledem k tomu, že těsně před posvícením jsou obě suroviny v okolí rozprodány, musí cukrář vystačit pouze se zásobami – má k dispozici 25 kg máku a 30 kg tvarohu.

   Kolik má upéct kterých koláčů, aby dosáhl maximálního zisku? Řešení znázorněte také graficky.

   Nápověda:

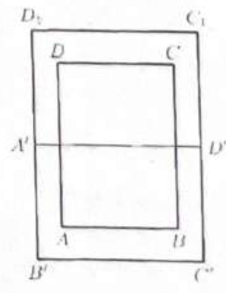
   (i) Vhodně si označte proměnné a sestavte (ne)rovnice pro spotřebu máku a spotřebu tvarohu.

   (ii) Zakreslete je do grafu, sestavte funkci zisku a určete, pro jako kombinaci bude maximální.

   (iii) Ověřte, která z možných celočíselných kombinací dává skutečně nejvyšší zisk.

Několik geometrických úloh

9. **Rozkládací stůl.** Dvojitá deska obdélníkového stolu $ABCD$ se má otočit kolem šroubu S do polohy $A'B'C'D'$, aby se pak mohla horní deska překlopit kolem osy $A'D'$ do polohy $A'D'C_1D_1$ (viz obrázek). Kam musíme umístit šroub?



10. **Lahváče.** Kolikrát je vyšší půllitrová láhev piva oproti třetince? (Předpokládáme, že lahve mají stejný tvar, tedy jedna je zvětšeninou druhé, neboli, řečeno geometricky, jsou si *podobné*.) (A obecně: aby se objem např. zdvojnásobil, kolikrát se musí prodloužit délka?

11. **Lodní navigace pomocí tří majáků.** Proplouváte nebezpečným Bonifáckým průlivem. Máte mapu, kde jsou vyznačeny polohy tří majáků. Mezi 1. a 2. jste změřili úhlovou vzdálenost 52°, současně mezi 2. a 3. majákem 35°.

Určete na mapě polohu vaší lodi v okamžiku vašeho měření.

Bonus: Spočítejte vzdálenosti vaší lodi od jednotlivých majáků na základě změření vzdálenosti jednotlivých majáků v mapě. (Měřítko: vzdálenost 1 a 2 jsou přesně 4 km.)

12. **Nejkratší spojnice třech bodů.** Podbořansko patří dlouhodobě mezi naše nejsušší oblasti. Města Kryry a Vroutek plánují připojení k vodojemu, který se nachází severně od nich (viz mapa).

Navrhněte do mapy vedení potrubí propojující vodojem a obě města (vyznačené body) tak, aby jeho celková délka byla co nejkratší. Výslednou celkovou délku změřte: $d \approx$

Jak dlouhé by bylo potrubí, které by vedlo nejprve přímo do jedné obce a z ní pak přímo do druhé? O kolik procent by bylo delší než nejkratší varianta?

Jak dlouhé by bylo potrubí, které by vedlo z vodojemu kolmo na přímou spojnici těchto obcí + tato spojnice? O kolik procent by bylo delší než nejkratší varianta?