DVOJÍ POJETÍ PERMUTACÍ

Filip Beran

V příspěvku představíme rozdíl mezi středoškolským a vysokoškolským pojetím permutací. Permutacemi se ve středoškolské matematice obvykle rozumějí uspořádané n-tice z daných prvků; můžeme je však také chápat jako zobrazení na množině těchto prvků, a tak je vzájemně skládat nebo určovat jejich samodružné neboli pevné body. Na praktických úlohách – tzv. problému šatnářky a popisu symetrií – ukážeme, že i toto pokročilejší pojetí může už na střední škole dávat dobrý smysl a otevírat studentům cesty ke složitější matematice.

1 Co je to permutace?

Ve středoškolských učebnicích obvykle narazíme definici permutace coby **uspořádané n-tice prvků**: „Permutace z n prvků je uspořádáná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou.“ (např. [5, str. 17]). Tato definice přitom navazuje na předchozí výklad variací: „Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.“ Například všemi permutacemi ze tří prvků a, b, c jsou uspořádané trojice (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Oproti tomu ve vysokoškolských učebnicích, typicky algebry nebo diskrétní matematiky, se spíše setkáme s pojetím permutace coby zobrazení: „Permutací na množině X rozumíme bijekci (vzájemně jednoznačné zobrazení) $X \to X$.“ (Např. [10, str. 95], [7, str. 72] či [3, str. 341].)[1]

Na první pohled není těžké mezi sebou tyto dvě definice propojit. Pokud zvolíme za X konečnou množinu o n prvcích, její prvky označíme např. a_1, a_2 až a_n a příslušné bijektivní zobrazení f, pak uspořádanou n-tici z první definice dostaneme coby uspořádanou n-tici obrazů těchto prvků, tj. $(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n))$. Každému zobrazení f přitom odpovídá právě jedna uspořádaná n-tice, a naopak, pro každou uspořádanou n-tici nalezneme právě jedno takové zobrazení.

Ve středoškolských úlohách však obvykle nevypisujeme všechny možné permutace nějaké n-prvkové množiny, nýbrž především určujeme jejich počet. Ten je $n!$; to bychom si ale ještě moc nezapočítali, takže často přidáváme omezující podmínky, kterými některé n-tice vyloučíme. Typická je např. tato úloha [5, str. 20]:

[1] Historickou zajímavostí může být, že zatímco Otakar Borůvka v *Úvodu do teorie grup* definuje permutace již tímto „vysokoškolským“ způsobem [4, str. 15–23], Václav Vodička v prakticky zaměřené „příručce pro inženýry a fysiky“ *Determinanty a matice v theorii a praxi* zavádí permutaci jako uspořádanou řadu čísel, potažmo prvků [12, str. 6–8].

Nástup. Určete, kolika způsoby může n táborníků při nástupu na ranní rozcvičku nastoupit

(a) do řady;

(b) do řady v níž je táborník A na kraji;

(c) do řady, v níž táborníci A, B nestojí vedle sebe;

(d) do kruhu, v němž záleží jen na vzájemném rozmístění, nikoli na umístění vzhledem k okolním předmětům.

Výsledky jsou po řadě $n!$, $2(n-1)!$, $(n-1)!(n-2)$ a $(n-1)!$. K poslednímu bodu poznamenejme, že výsledek může být také poloviční, tj. $\frac{(n-1)!}{2}$, pokud za stejná budeme považovat nejen umístění lišící se pouze otočením kruhu, nýbrž i jeho „překlopením“ čili orientací. Složitější permutační úlohy, kde hledáme počet řešení až na nějaké předem dané symetrie, vedou později až k použití tzv. Burnsideovy věty, která bývá součástí vysokoškolských kurzů algebry – viz např. [10, str. 102–107] či [3, str. 382–385].

Zdá se, že pro podobné úlohy plně dostačuje první uvedené pojetí permutace coby uspořádané n-tice; mohli bychom se sice např. ptát, kolika způsoby můžeme přemístit n táborníků, ale to by na řešení nic moc nezměnilo, pouze bychom mohli odečíst výchozí postavení coby tzv. identickou permutaci. V následujících odstavcích však rozebereme středoškolsky řešitelné úlohy, kde se naopak pojetí permutací coby zobrazení ukazuje jako elegantní nástroj pro jejich uchopení. Představíme při tom dva důležité koncepty: *pevné body* a *skládání permutací.*

2 Pevné body: Problém šatnářky

Problém šatnářky (*hat-check problem*, *derangement problem*) je snadno představitelná úloha, která přirozeně vede k pojetí permutace coby zobrazení, přičemž vykazuje další nečekané matematické souvislosti. Uveďme jej ve znění z [7, str. 105]:

Problém šatnářky. Ctihodní pánové v počtu n přijdou na shromáždění, všichni v kloboucích, a odloží si své klobouky do šatny. Při odchodu šatnářka, možná ten den velmi roztržitá, možná dokonce z mizerného osvětlení oslepl á, vydá každému z pánů náhodně jeden z klobouků. Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?

Pro účely výuky jsem toto zadání mírně upravil a doplnil o návodné a související otázky. (Reformulace úlohy mě napadla na vánočním večírku gymnázia, kde skutečně takto popsaná tombola proběhla. Účastníků bylo kolem 70 a nevím o nikom, kdo by si vlastní věc odnesl.) Úlohu tak současně popíšeme poněkud podrobněji, více z hlediska středoškolského studenta a učitele; stručnější řešení, ovšem s nutností využití tzv. *principu inkluze a exkluze* mohou čtenáři najít v [7, str. 105–106], popř. včetně souvisejících úloh v pěkné a on-line dostupné diplomové práci [16].

Tombola. Každý přispěje do tomboly nějakou věcí a každý si zakoupí výherní lístek. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) vy si odnesete věc, kterou jste přispěli?

(b) každý si odnese vlastní věc?

(c) nikdo si neodnese vlastní věc?

Odpovědi pro 3, 4, 5 a obecně n účastníků nejprve odhadněte a následně přesně vypočítejte! Výsledky shrňte do přehledné tabulky.

Na první dvě otázky není těžké odpovědět rovnou pro obecné n. Vlastní věc si odnesu s pravděpodobností $\frac{1}{n}$, neboť jsem právě jedním z n účastníků a je mi dále lhostejné, komu připadnou ostatní věci.[2] Dále, očíslujeme-li účastníky po řadě 1, 2, ..., n a stejně tak i jimi přinesené věci, losování tomboly si můžeme představit právě jako permutaci těchto čísel. Každý si tedy odnese svoji věc jedině v tom případě, kdy pořadí zůstane nezměněno, tedy s pravděpodobností $\frac{1}{n!}$; k témuž výsledku můžeme dospět postupným součinem pravděpodobností $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n-1}$, $\frac{1}{n-2}$ atd., jak se věci postupně rozdělují.

Co ale poslední otázka? Nakonec, právě při tombole, na rozdíl od šatnářčina zmatení klobouků, je takový výsledek vítaný – nepřispíváme do tomboly dárkem proto, abychom si ho pak odnesli zpět domů, ale těšíme se na nějaké překvapení.

První nápad může být, že řešením bude doplněk výsledku (b) do 1, tedy pravděpodobnost $1 - \frac{1}{n!}$; vždyť výrazy *každý* a *nikdo* chápeme v běžné řeči jako slova opačného významu, tak jednoduše dopočítáme pravděpodobnost opačného jevu. Nemusíme ale ani zabíhat do výrokové logiky, abychom studenty přesvědčili o tom, že takhle snadné to nebude. Mezi výsledky (b) a (c) se rozprostírá ještě široká „šedá zóna“: může se stát, že někdo si vlastní věc odnese a někdo jiný zase ne.[3] (Za úvahu stojí, že jediné, co se jistě stát nemůže, je situace, kdy by si vlastní věc neodnesl právě jeden účastník.)

K otázce tak musíme přistoupit trochu důmyslněji. Nezbývá nám než rozdělit všechny uvažované permutace do dvou skupin: v jedné budou ty, kde si nikdo vlastní věc neodnese, a v druhé ty, kde se alespoň jeden takový případ vyskytne; matematicky zapsáno takové permutace f, že $\forall i\, f(i) \neq i$, od permutací, kdy $\exists i\, f(i) = i$. Takovému i, pro něž $f(i) = i$, se říká *samodružný* či *pevný bod permutace* f: rozlišíme tedy *permutace bez pevného bodu* od *permutací s alespoň jedním pevným bodem.* Po vzoru [7, str. 105] označme $\check{s}(n)$ počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině. Námi hledaná pravděpo-

[2] Složitější by byla otázka, s jakou pravděpodobností si pouze já odnesu vlastní věc. Vedla by k bodu (c), ovšem pro $n - 1$ účastníků.

[3] I na základě této ukázky jiného pojetí „opaku“ v běžné řeči a v jazyce matematiky stojí za zvážení, zda by spíše než o *opačném* jevu nebylo vhodnější mluvit o *doplňkovém* jevu; takové označení by odpovídalo i množinové terminologii, kde mluvíme právě o *doplňku* dané množiny. Chápání rozdílu mezi doplňkem a opakem se ostatně uplatní i v běžném myšlení, kde nejsou na výběr jen dvě možnosti, ale spíše celé jejich (spojité) spektrum: tak si můžeme představit, že např. opakem bílé barvy je černá, nicméně jejím doplňkem je „nebílá“, zahrnující i všechny ostatní barvy, které „nejsou bílé“, např. žlutou, modrou, oranžovou ...

dobnost $p(n)$ pak je podíl tohoto čísla k počtu všech možných permutací, tedy $p(n) = \frac{š(n)}{n!}$.

Při výuce ovšem můžeme všechny tyto pomocné pojmy představit až později a nejprve nechat studenty, ať sami zkusí úlohu vyřešit pro konkrétní nízké počty účastníků – tak často nejlépe pronikneme do podstaty nějakého problému, když jej nejprve vyřešíme pro malá představitelná množství. Pro dvě věci v tombole je situace až triviální: buď si každý odneseme vlastní dárek, nebo si je prohodíme; takže $p(2) = \frac{1}{2}$.

U třech účastníků už je třeba zamyslet se více. Permutací s pevným bodem zřejmě bude případ, kdy si každý odnese vlastní dárek, a také celkem tři případy, kdy jeden si svůj dárek nechá a dva si je prohodí, dohromady tedy celkem čtyři permutace s pevným bodem. Oproti tomu bez pevného bodu jsou celkem dva případy, a to když si dárky vyměníme „cyklicky“ v jednom či druhém směru. Výsledkem je tedy $p(3) = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$. Doporučuji v tomto případě nechat studentům čas v klidu odvodit a rozmyslet si, jak vyměňování probíhá a že jsme takto popsali skutečně všech $3! = 6$ případů.

Než se pustíme do rozboru případu $n = 4$, krátce představme různé **zápisy permutací** chápaných coby zobrazení. Obvyklý a asi nejpřímočařejší způsob je zapsat permutaci f vodorovnou tabulkou dvojic hodnot vzor – obraz; tedy např. pokud první dva účastníci si dárky prohodí a třetí si svůj dárek odnese, zapíšeme tuto permutaci

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Permutací ve smyslu uspořádané n-tice by pak byl druhý řádek této tabulky.

Brzy si ale všimneme, že tento zápis je poněkud zdlouhavý, protože první řádek je vždy stejný. Můžeme tak zkusit v zápisu více vystihnout samo „prohazování“, které permutace realizuje, a to zápisem pomocí tzv. *cyklů*. To znamená, že vzor a obraz postupně zapisujeme za sebou, kde obraz jednoho prvku je současně vzorem dalšího; např. čtyřprvkovou permutaci $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,1\,3 \end{pmatrix}$ tak zapíšeme cyklem (1243). Výhodou tohoto zápisu je stručnost a názornost. Nevýhodou se může zdát jeho nejednoznačnost: zápis cyklu lze začít od kteréhokoliv jeho prvku, takže n-prvkový cyklus můžeme zapsat celkem n způsoby; např. $(1243) = (2431) = (4312) = (3124)$. Tuto nejednoznačnost lze ale odstranit požadavkem, aby zápis každého cyklu začínal jeho nejmenším prvkem a jednotlivé cykly byly uspořádány vzestupně podle počátečních prvků; této konvence se budeme držet v dalším textu.

Permutace také může být tvořena z více na sobě nezávislých cyklů, např. když si dárky prohodí první a druhý účastník a také třetí a čtvrtý účastník, tj. $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,1\,4\,3 \end{pmatrix}$; pak každý z těchto cyklů uzavřeme do samostatné závorky a permutaci zapíšeme jako $(1\ 2)(3\ 4)$. Zvláštním případem jsou právě pevné body, tedy vlastně jednoprvkové cykly; ty opět můžeme zapsat samostatně do závorky, ale i vynechat, víme-li, o kolikaprvkovou permutaci se jedná; tedy např. $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,4\,3\,1 \end{pmatrix}$

zapíšeme jako (124)(3), popř. jen (124). Právě pomocí cyklického zápisu na první pohled poznáme permutace bez pevných bodů.[4]

Zajímavé je, že někteří studenti si na obdobu cyklického zápisu přišli sami: když chtěli vyjádřit, že první dva účastníci si dárky prohodí a třetí si odnese svůj, zapisovali to pomocí šipek např. jako $1 \leftrightarrow 2 \quad 3$. Obdobně případ bez pevného bodu zapisovali např. $1 \to 2 \to 3$, popř. pomocí různých dalších schémat. Zde se dále budeme držet klasického cyklického zápisu; považuji ale za vhodné ponechávat studentům jejich zápis s šipkami i jiné invence, zvláště pokud jim umožňují lépe pochopit situaci.

Prozkoumejme nyní případ $n = 4$. Předchozí výsledky mohou vést k domněnce, že $p(n) = \frac{1}{n}$; tu ovšem zanedlouho vyvrátíme. Roztřiďme tedy nyní všech 4! čtyřprvkových permutací; zde už je třeba postupovat systematicky. Začněme permutacemi s jediným cyklem; to je zřejmě celkem 6 permutací: (1234), (1432), (1324), (1423), (1243) a (1342). Jsou to všechny bez pevného bodu? Nikoliv! Ještě se může stát, že si dárky nevymění všichni čtyři účastníci takto „dokolečka“, nýbrž vždy dvě dvojice navzájem. Takové dvě dvojice můžeme utvořit celkem třemi způsoby, tedy získáváme dále tyto permutace: (12)(34), (13)(24) a (14)(23). Dohromady jsme tak našli 9 čtyřprvkových permutací bez pevného bodu.

Pro kontrolu si ještě představme zbývajících 15 permutací, které alespoň jeden pevný bod mají: je to jistě 1 identická permutace, tedy případ, kdy si každý odnese svůj dárek; dále $\binom{4}{1} \cdot 2 = 8$ permutací s právě jedním pevným bodem, tj. těch, co mají jeden tříprvkový cyklus; a konečně $\binom{4}{2} = 6$ těch, které mají právě dva pevné body. Můžeme tak potvrdit, že pravděpodobnost, že si nikdo neodnese vlastní dárek, je $p(4) = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 37{,}5$ %. Při řešení jsme ovšem získali i další informace, a to o celkovém rozložení pravděpodobností: to, že si svůj dárek odnese právě jeden účastník, se stane s pravděpodobností $\frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 33{,}\overline{3}$ %, a pro právě dva účastníky to je $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25$ %; lze tedy říci, že všechny tyto tři varianty jsou poměrně podobně pravděpodobné. Naopak pravděpodobnost, že si každý odnese svůj dárek, je jen $\frac{1}{24}$, a to, že by si ho odnesli právě tři účastníci, je logicky nemožné.

Někteří studenti vyřeší i tento případ bez nutnosti nápovědy. Jak ale vidíme, počet permutací rychle roste a už pro $n = 5$ zřejmě nebude praktické vypisovat všech 120 permutací. Můžeme tedy v tom, kolik je n-prvkových permutací bez pevného bodu, najít nějaký obecný systém? Intuice nám napovídá, že by nějak mohly souviset n-prvkové a $(n+1)$-prvkové permutace. Zkusme tedy pro číslo $š(n)$ odvodit rekurentní vzorec, který je umožní spočítat z předchozích výsledků.

Odvození rekurentního vzorce. Zamysleme se tedy více nad tím, jak mohou vzniknout $(n+1)$-prvkové permutace bez pevného bodu z permutací na méně prvcích a ilustrujme to na $n = 3$. Představme si, že ke skupince n účast-

[4] Blíže k zápisu permutací viz např. [1, str. 51 a 56], popř. [7, str. 73] či [3, str. 342]; pěkné vysvětlení i s příklady je též na anglické Wikipedii [15].

níků přijde nový účastník, který se chce zapojit do výměny dárků. Pokud je tato n-prvková permutace bez pevného bodu, může se nově příchozí zapojit na kterékoliv místo kteréhokoliv cyklu – takových možností má tedy pro každou permutaci celkem n. Takto tedy např. ze tříprvkové permutace (132) vzniknou příchodem čtvrtého účastníka tři různé čtyřprvkové permutace bez pevného bodu: (4132), (1432) a (1342); nenechme se zmást, (1324) by už byla stejná permutace jako (4132). Dostáváme tak $n \cdot \check{s}(n)$ těchto $(n+1)$-prvkových permutací bez pevného bodu.

Může ovšem taková permutace vzniknout i z n-prvkové permutace, která pevný bod má? Ano, ale pouze tehdy, má-li jen jeden pevný bod, na který se „naváže“ nově příchozí účastník; kdyby jich měla dva nebo více, i po příchodu nového účastníka by nějaký pevný bod zbýval. Takto tedy např. z permutace (13)(2) s jedním pevným bodem vytvoří nově příchozí, čtvrtý účastník permutaci (13)(24); pokud chceme získat permutaci bez pevného bodu, nemá jinou volbu, než si vyměnit dárek s dosud osamocenou 2. Kolik je ovšem takových n-prvkových permutací s právě jedním pevným bodem, z nichž může nově příchozí tímto jediným způsobem vytvořit permutace bez pevného bodu? Odpověď je snazší, než si myslíme: Pro každý výběr jednoho z těch n prvků, který bude tím jediným pevným, „osamoceným“, jich je právě tolik, kolik je $(n-1)$-prvkových permutací bez pevného bodu, tedy $n \cdot \check{s}(n-1)$; např. (1)(23), (2)(13), (3)(12), kde $\check{s}(2) = 1$.

Vzato dohromady, takto získáváme rekurentní předpis

$$\check{s}(n+1) = n \cdot \check{s}(n) + n \cdot \check{s}(n-1) = n \cdot [\check{s}(n) + \check{s}(n-1)],$$

přičemž $\check{s}(1) = 0$ a $\check{s}(2) = 1$. Aby naše předchozí úvahy byly zcela korektní, ještě je třeba ověřit, že uvedeným způsobem získáváme permutace skutečně navzájem různé a jinak je získat nemůžeme; to je však vcelku zřejmé. Snadno nyní ověříme naše předchozí výsledky, že $\check{s}(3) = 2$ a $\check{s}(4) = 9$. Hlavně však nyní můžeme dopočítat, aniž bychom všechny permutace vypisovali, že $\check{s}(5) = 4 \cdot 9 + 4 \cdot 2 = 4 \cdot 11 = 44$. (Doporučuji ovšem zkusit si je vypsat včetně toho, jak vznikly z předchozích čtyřprvkových permutací s žádným, resp. s jedním pevným bodem.) Je tedy $p(5) = \frac{\check{s}(5)}{5!} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30} = 36{,}\overline{6}\ \%$.

Na první pohled nás upoutá, že pravděpodobnost $p(5)$ je poměrně dost blízká pravděpodobnosti $p(4)$. Se studenty dále můžeme spočítat několik dalších hodnot, třeba pomocí tabulky v Excelu, ve kterém se snadno pracuje s rekurentně danými posloupnostmi. Zjistíme, že už se pravděpodobnost se zvyšujícím n téměř nemění a blíží se (zaokrouhleně) k hodnotě 36,788 %, jak ukazuje tab. 1.

Se zvyšujícím se počtem účastníků tomboly tedy námi sledovaný jev, že si nikdo neodnese vlastní věc, není ani skoro jistý, ani skoro nemožný, nýbrž blíží se ke konstantě „někde mezi“; to se zdá být poněkud překvapivé. Přibližné neformální vysvětlení může být toto: Na jedné straně čím více účastníků, tím snadněji se věci promíchají; na druhé straně se ovšem zvyšuje i počet lidí, kteří si vlastní věc mohou odnést, a nám přitom stačí jeden z mnoha.

n	$š(n)$	$n!$	$p(n)$
1	0	1	0,0000 %
2	1	2	50,0000 %
3	2	6	33,3333 %
4	9	24	37,5000 %
5	44	120	36,6667 %
6	265	720	36,8056 %
7	1 854	5 040	36,7857 %
8	14 833	40 320	36,7882 %
9	133 496	362 880	36,7879 %
10	1 334 961	3 628 800	36,7879 %

Tab. 1: Prvních 10 hodnot funkcí $š(n)$ a $p(n)$

Výpočet limity $p(n)$. Dosud jsme si víceméně vystačili s běžnou středoškolskou matematikou a několika názornými úvahami. Abychom nyní ukázali, že se $p(n)$ skutečně limitně blíží k nějaké konstantě a určili její přesnou hodnotu, budeme potřebovat pokročilejší techniky a více počítání. I tak to ale může být zajímavý námět např. do semináře, popř. možnost pro učitele, jak i v běžné hodině načrtnout některé postupy „složitější“ matematiky.

V prvé řadě by se nám hodilo odvodit z rekurentního předpisu přímý vzorec pro $š(n)$. Jak na to? Učebnice [7, str. 109] napovídá, ať zavedeme a prozkoumáme pomocnou posloupnost $a_n = š(n) - n \cdot š(n-1)$. Je-li totiž, jak už jsme odvodili,

$$š(n) = (n-1) \cdot [š(n-1) + š(n-2)] = n \cdot š(n-1) - š(n-1) + (n-1) \cdot š(n-2),$$

pak

$$\begin{aligned} a_n &= š(n) - n \cdot š(n-1) = -š(n-1) + (n-1) \cdot š(n-2) = \\ &= -[š(n-1) - (n-1) \cdot š(n-2)] = -a_{n-1}. \end{aligned}$$

Přitom $a_2 = 1 - 2 \cdot 0 = 1$, tedy $a_n = (-1)^n$. Získáváme tak důležitou rovnost

$$š(n) - n \cdot š(n-1) = (-1)^n.$$

Tu nyní napíšeme pro všechna i sestupně od n až po 2, přičemž ji vždy ještě vydělíme $i!$. Dostaneme celkem $n-2$ rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{š(n)}{n!} - \frac{n \cdot š(n-1)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{n!} \\ \frac{š(n-1)}{(n-1)!} - \frac{(n-1) \cdot š(n-1)}{(n-1)!} &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\dots \\ \frac{š(2)}{2!} - \frac{2 \cdot š(1)}{2!} &= \frac{(-1)^2}{2!} \end{aligned}$$

Když nyní začneme sčítat všechny členy na levé straně rovnosti, všimneme si, že druhý člen jedné rovnice se vždy zruší s prvním členem následující jako při sčítání tzv. *teleskopických řad*; ze součtu levých stran nám tak zůstane pouze první člen první rovnice a druhý člen rovnice poslední. Získáváme rovnost

$$\frac{š(n)}{n!} - \frac{2 \cdot š(1)}{2!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!}.$$

Protože $š(1) = 0$, můžeme výsledek upravit do tvaru

$$š(n) = n! \cdot \left(\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{(-1)^2}{2!} \right).$$

Přerovnáme-li členy na pravé straně a doplníme-li „pro formu" ještě první dva členy, dostáváme hledaný vzorec jako elegantní součin faktoriálu a $n+1$ sčítanců:

$$š(n) = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

Námi hledaná pravděpodobnost tedy je

$$p(n) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Ze známého Taylorova rozvoje exponenciály e^x v mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pak dostáváme přesnou konstantu, k níž naše pravděpodobnost konverguje:

$$\lim_{n \to \infty} p(n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-1} \doteq \frac{1}{2{,}718} \doteq 36{,}788\ \%$$

Přitom je tato konvergence poměrně rychlá, jak jsme už viděli výše rekurentním výpočtem hodnot po $n = 10$. Potvrdili jsme tedy poměrně pozoruhodný výsledek: ať už se na tombole sejde 10, 70 nebo třeba 200 lidí, pravděpodobnost, že si nikdo neodnese věc, kterou do tomboly věnoval, je ve všech případech téměř stejná: přibližně 37 %. Kdo by byl navíc na začátku řekl, že tu na nás zničehonic vyskočí Eulerovo číslo ...

Myslím, že tato úloha je krásnou ukázkou propojení několika oblastí matematiky, z nichž většina je přitom srozumitelná už na středoškolské úrovni. Spíše než rovnou při výkladu permutací ji však doporučuji zařadit později, např. jako opakování poté, co už byly vyloženy základní principy počítání pravděpodobnosti; zároveň se hodí, když studenti znají už i posloupnosti, popř. Eulerovo číslo. Též se mi osvědčilo neuvést tuto úlohu hned výrazem *permutace*, nýbrž nechat studenty, zda si její zadání s tímto konceptem sami spojí. I pro učitele je pak inspirativní sledovat, jak se studenti s tímto vlastně velmi jednoduchým a srozumitelným problémem vypořádají.

3 Skládání permutací: Struktura symetrií

V předchozí části jsme představili, jak nám pojetí permutací coby zobrazení a hledání jejich pevných bodů může pomoci uchopit jednoduše formulovanou úlohu o pravděpodobnosti v tombole. V této části se zaměříme na další aspekt takto pojatých permutací, a to jejich skládání, pomocí něhož zase můžeme lépe porozumět struktuře symetrií různých geometrických i abstraktních objektů. Začněme ovšem zdánlivě nesouvisející úlohou (převzatou od doc. Antonína Jančaříka z PedF UK):

Oslava. Doplňte čísla 5, 6, 10 a 12 tak, aby příběh dával smysl:

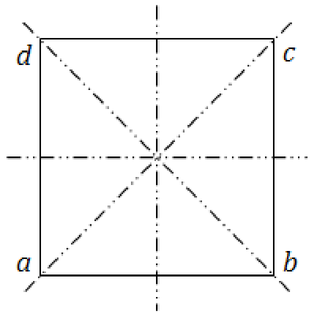
(a) Terezka koupila ... balíčků bonbonů na oslavu,
(b) které se celkem ... zúčastnilo dětí.
(c) Každý balíček obsahoval ... bonbonů a
(d) každé dítě tak dostalo ... bonbonů.

Najít nějaké řešení není těžké: např. (a) 5 balíčků, (b) 6 dětí, (c) každý balíček po 12 bonbonech a (d) každý dostal 10 bonbonů. Takovou úlohu hravě vyřeší už děti na prvním stupni základní školy. Správnou však je třeba i odpověď (a) 6, (b) 12, (c) 10 a (d) 5. Nabízí se tak otázka: Kolik různých řešení můžeme najít? Označíme-li jednotlivé hodnoty a, b, c, d, máme celkem $4! = 24$ možností, jak jim přiřadit zadaná čísla.

Zřejmě ale ne každá permutace je řešením; nutnou a postačující podmínkou je, aby $a \cdot c = b \cdot d$. Otázka tedy nyní zní: Kolika způsoby můžeme umístit čísla do této rovnosti? Máme-li jedno řešení, snadno z něj vyrobíme další: můžeme prohodit buď čísla na místech a a c, nebo na místech b a d, nebo oboje provést současně. Také však můžeme prohodit čísla obou stran rovnosti, tedy např. a s b a současně c s d, a pak opakovat prohazování členů jako výše. Celkem tak můžeme prohodit členy v součinu na levé straně, nezávisle na nich členy v součinu na pravé straně a nezávisle na nich též strany rovnosti: dostáváme tak celkem $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností.

Můžeme si ale nějak lépe představit *strukturu* těchto řešení? Vezmeme-li např. řešení $(5, 6, 12, 10)$ a $(6, 12, 10, 5)$, dostaneme druhé z prvního pomocí cyklické permutace $(a\ b\ c\ d)$. Zároveň tuto permutaci můžeme zopakovat, čímž získáme další řešení $(12, 10, 5, 6)$. To také můžeme získat z původního řešení rovnou, a to prohozením a a c a současně b a d, tedy permutací $(a\ c)(b\ d)$. Z jednoho původního řešení tak dostaneme všech sedm dalších pomocí těchto permutací: $(a\ b\ c\ d)$, $(a\ c)(b\ d)$, $(a\ d\ c\ b)$, $(a\ c)$, $(b\ d)$, $(a\ d)(b\ c)$ a $(a\ b)(c\ d)$.

Nyní ale přijde geometrické překvapení: Tyto permutace zároveň popisují všechny symetrie čtverce, označíme-li jeho vrcholy postupně a, b, c, d (obr. 1). Permutace $(a\ d)(b\ c)$ a $(a\ b)(c\ d)$ odpovídají osové souměrnosti podle vodorovné a svislé osy; dvojcykly $(a\ c)$ a $(b\ d)$ popisují zrcadlení podle úhlopříček, daných jejich pevnými body; $(a\ c)(b\ d)$ odpovídá středové souměrnosti čili otočení o $180\,^\circ$; a konečně, čtyřcykly $(a\ b\ c\ d)$ a $(a\ d\ c\ b)$ reprezentují otočení o $90\,^\circ$ v kladném („proti směru chodu hodinových ručiček“), resp. záporném („po směru chodu hodinových ručiček“) smyslu.



Obr. 1: Čtverec a, b, c, d a jeho osy symetrie

Dostáváme tak i přehledný model množiny řešení naší původní úlohy. Jak řešení naší úlohy, tak symetrie čtverce jsou přitom popsatelné pomocí permutací chápaných jako zobrazení. Navíc však nejde o „pouhou“ množinu, jejíž prvky by mezi sebou neměly žádný další vztah; jak už jsme načrtli výše, **permutace můžeme skládat**, tedy prvky po jednom „proházení“ proházet znovu a sledovat, jaký je výsledek vzhledem k výchozímu stavu. Složením dvou takových permutací je tedy opět permutace.

Při tom ovšem záleží na pořadí, v jakém permutace provedeme. Ilustrujme to na příkladu skládání symetrií našeho čtverce. Označme f otočení o $90\,^\circ$ v kladném smyslu popsané permutací $(a\ b\ c\ d)$ a g zrcadlení podle svislé osy, tj. permutaci $(a\ b)(c\ d)$. Pokud nejprve čtverec otočíme a následně zrcadlíme, vrcholy a, b, c, d přejdou v umístění a, d, c, b; matematicky zapsáno[5]

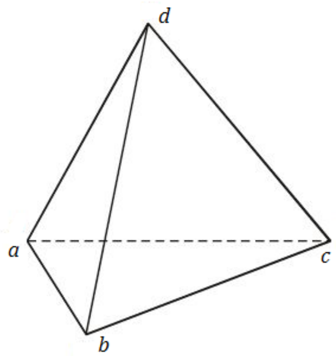
$$f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & d & c & b \end{pmatrix} = (b\ d).$$

Tato výsledná permutace tedy odpovídá zrcadlení podle úhlopříčky AC. Naopak, pokud čtverec nejprve zrcadlíme a pak otočíme, je výsledkem $g \circ f = (a\ b)(c\ d) \circ (a\ b\ c\ d) = (a\ c)$, tedy zrcadlení podle úhlopříčky BD. Vidíme tedy, že skládání permutací obecně není komutativní.

Současně, ke každé permutaci najdeme permutaci opačnou neboli inverzní, která nám vrcholy vrátí na původní místo: např. k otočení $(a\ b\ c\ d)$ je to otočení v opačném směru: $(a\ d\ c\ b)$. Výsledkem složení těchto dvou permutací pak je permutace *identická*, která nechává všechny prvky na místě, či slovy z předchozí části, má všechny body pevné. Takto vybavená množina permutací tedy má **strukturu grupy**; můžeme tak mluvit nejen o množině permutací, nýbrž o grupě permutací. (Přesné definice grupy může čtenář nalézt např. v [1, str. 52 a násl.].)

[5] Držíme se zde konvence skládání zobrazení „zleva doprava“: zápis $f \circ g$ znamená nejprve provést zobrazení f a následně zobrazení g. V případě obvyklejšího skládání funkcí bychom to vyjádřili tak, že $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

Použít grupu permutací je tak jedna z názorných možností, jak efektivně popsat symetrie nějakého objektu – a to nejen jejich počet či druh, ale navíc strukturu, tedy to, jak se spolu skládají a tedy jako spolu souvisejí. Takové zkoumání struktury symetrií se může hodit nejen pro hlubší porozumění, ale i pro odhalování na první pohled ne zřejmých symetrií složitějších objektů. Jako příklad uvedeme pravidelný čtyřstěn (dále jen čtyřstěn) a krychli. Při čtení doporučujeme zkoušet si uvedené postupy na reálném modelu nebo si alespoň kreslit obrázky. Pěkné zpracování tohoto tématu včetně doprovodných cvičení také čtenář nalezne např. ve volně dostupných skriptech *Open University* [9].



Obr. 2: Pravidelný čtyřstěn a, b, c, d

Symetrie čtyřstěnu. Symetrie čtyřstěnu nejlépe vyjádříme pomocí permutací jeho vrcholů, které opět označíme a, b, c, d (obr. 2). Zaměřme se nejprve na přímé shodnosti: kolem jakých os můžeme čtyřstěn otáčet? Každým ze čtyř vrcholů a středem protilehlé stěny vede jedna osa otáčení, kolem níž můžeme čtyřstěn otočit o $120\,^\circ$ v kladném i záporném směru. Těmto symetriím odpovídají všechny permutace s jedním trojcyklem. Co se ovšem stane, když dvě taková otočení kolem různých os složíme dohromady? Např. $(a\,b\,c)\circ(a\,b\,d) = (a\,d)(b\,c)$.

Tato permutace dvou dvojcyklů přitom odpovídá otočení čtyřstěnu o $180\,^\circ$ okolo osy procházející středy protilehlých hran; obdobným způsobem můžeme dostat další dvě taková otočení odpovídající permutacím $(a\,b)(c\,d)$ a $(a\,c)(b\,d)$. Zajímavé přitom je, že složením dvou těchto permutací (v libovolném pořadí) dostaneme třetí, takže spolu s identickou permutací tvoří podgrupu grupy symetrií pravidelného čtyřstěnu; to geometricky odpovídá tomu, že když v prostoru složíme dvě otočení o $180\,^\circ$ okolo na sebe kolmých os, získáme otočení o $180\,^\circ$ okolo osy k oběma původním osám kolmé.

Celkem jsme tak našli 11 rotací pravidelného čtyřstěnu, které spolu s identickou permutací tvoří dvanáctiprvkovou grupu. A jak je to s nepřímými shodnostmi? Snadno odhalíme šest zrcadlení (rovinných souměrností) podle roviny procházející vždy jednou hranou a středem hrany protilehlé; těm tak odpovídá šest permutací s jedním dvojcyklem: $(a\,b)$, $(c\,d)$, $(a\,c)$, $(b\,d)$, $(a\,d)$ a $(b\,c)$. Pokud libovolné dvě z nich složíme, dostaneme jednu z již odhalených přímých shodností – otočení okolo jejich společné průsečnice o dvojnásobek úhlu, který spolu roviny zrcadlení svírají, tedy o 120 ° nebo o 180 °; např. $(a\ b) \circ (a\ c) = (a\ b\ c)$.

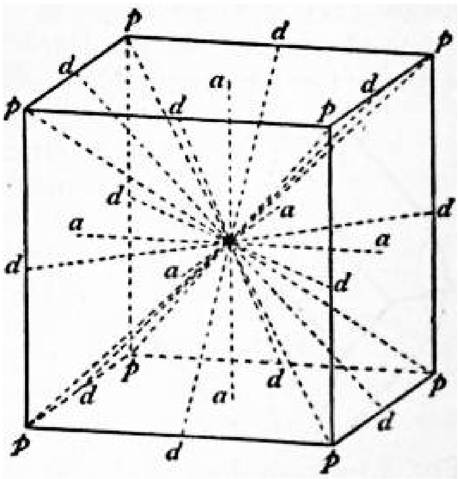
Co se ale stane, když složíme jedno z těchto zrcadlení s nějakým otočením? Pokud osa otočení leží v rovině zrcadlení, dostaneme opět zrcadlení, ovšem podle jiné roviny: např. $(a\ b) \circ (a\ b\ c) = (a\ c)$ nebo $(a\ b) \circ (a\ b)(c\ d) = (c\ d)$. Pokud tomu ale tak není, dostaneme ve výsledku nepřímou shodnost, která prohazuje všechny čtyři vrcholy: např. $(a\ b) \circ (b\ c\ d) = (a\ c\ d\ b)$ nebo $(a\ b) \circ (a\ c)(b\ d) = (a\ d\ b\ c)$; obdobně zřejmě dostaneme všech šest čtyřcyklů. Jejich geometrická intepretace se poněkud vzpírá naší představivosti: je to sice nepřímá shodnost, ale nikoliv pouhé zrcadlení podle nějaké roviny – jak se můžete přesvědčit na modelu, žádnou takovou rovinu nenajdete –, nýbrž složení zrcadlení podle roviny a otočení, které se někdy nazývá *rotoreflexe* [14].

Celkem jsme tak našli 12 nepřímých shodností pravidelného čtyřstěnu: šest obvyklých zrcadlení a šest podivuhodných rotoreflexí. Samy o sobě však netvoří grupu, neboť složeny spolu dávají shodnost přímou. Když je však sesypeme dohromady i s výše zkoumanými přímými shodnostmi, dostaneme celkem 24 shodností – symetrií pravidelného čtyřstěnu. Současně to je ale všech 24 možných permutací jeho vrcholů – naše hledání tak je u konce, více symetrií čtyřstěn mít nemůže, neboť každá taková shodnost musí převádět vrcholy mezi sebou a tímto zobrazením již je jednoznačně určena.

Tak jsme se alespoň pokusili načrtnout, že skládání permutací může být i šikovným nástrojem, jak objevovat a popisovat symetrie nějakého geometrického objektu; navíc zachycuje i jejich strukturu, tedy jak se skládají. Z tohoto hlediska také můžeme říci, že *pravidelný čtyřstěn je symetričtější než čtverec*: zatímco čtverec umožňuje jen některé permutace svých vrcholů (celkem 8), u čtyřstěnu jsou možné všechny.

Výše uvedené příklady jsou zároveň zástupci význačných tříd permutačních grup, tzv. dihedrálních, alternujících a symetrických. (K permutačním grupám blíže viz např. učebnice algebry [3] či [10].) Začněme od konce: *Symetrická grupa* na n prvcích, značí se S_n, označuje grupu všech permutací na n prvcích; celkově tedy obsahuje $n!$ permutací. V našem případě popisovala S_4 všechny symetrie pravidelného čtyřstěnu. *Alternující grupa* na n prvcích, A_n, označuje grupu tzv. *sudých permutací* na n prvcích, kterých je $\frac{n!}{2}$. Nebudeme zde zabíhat do podrobností, jen prozradíme, že sudost či lichost permutace můžeme určit např. podle sudosti a lichosti počtu cyklů sudé délky a skládání sudých a lichých permutací se chová obdobně jako násobení sudých a lichých čísel. V našem případě popisovala A_4 všechny přímé symetrie (tj. rotace a identitu) pravidelného čtyřstěnu. Konečně, *dihedrální grupa* D_n je grupa všech symetrií pravidelného n-úhelníku a obsahuje tedy vybrané permutace na n prvcích odpovídající jeho otočením a osovým souměrnostem; celkem jich je $2n$. V našem případě popisovala D_4 všechny symetrie čtverce a také řešení úvodní úlohy o bonbonech.

Symetrie krychle. Závěrem této části se ještě zmiňme o krychli. Průzkum jejích symetrií už může čtenář podle předchozího návodu provést sám (či se svými studenty). Dotkněme se nejprve jen těch přímých, tedy rotací. Kolik jich bude? Zřejmě máme $3 \cdot 3 = 9$ rotací okolo každé ze tří os procházející středy protilehlých stěn o $90\,^\circ$, $180\,^\circ$ a $270\,^\circ$; dále 6 rotací o $180\,^\circ$ okolo každé z os procházející středy protilehlých hran; a konečně $4 \cdot 2 = 8$ rotací o $120\,^\circ$ v kladném či záporném směru okolo každé z tělesových úhlopříček; jednotlivé osy znázorňuje obr. 3. Když k tomu přidáme identitu, dostáváme tak celkem 24 přímých shodností. (Povšimněme si, že je jich stejně jako všech shodností u pravidelného čtyřstěnu …)



Obr. 3: Osy přímých symetrií krychle[6]

Jejich skládání opět můžeme prozkoumat pomocí permutací. Ovšem, co budeme permutovat? Jako první se nabízejí, obdobně k předchozím příkladům, permutace vrcholů: tedy nějaká podgrupa symetrické grupy S_8. Jenže, to je jako jít s kanónem na vrabce: S_8 obsahuje celkem $8! = 40320$ permutací, kdežto nám jich stačí pouze 24. Nenajdeme něco vhodnějšího? Ano – můžeme permutovat stěny! Zde už půjde o podgrupu grupy S_6, ovšem stále mnoho permutací nevyužijeme … Nebudeme čtenáře dále napínat: Nejvhodnější popis se nabízí přes permutace čtyř tělesových úhlopříček – vyjde přesně na oněch $4! = 24$ permutací, které jednoznačně odpovídají výše popsaným rotacím.

Necháváme už na čtenáři, aby si je zkusil roztřídit. A souvislost se symetriemi pravidelného čtyřstěnu? Zkuste jej vytvořit z vybraných vrcholů krychle. Ještě dodejme, že i nepřímých shodností krychle lze nalézt právě 24, přičemž opět jednoznačně odpovídají permutacím tělesových úhlopříček; z každé přímé shodnosti je dostaneme jejím složením se středovou souměrností (*inverzí*) podle středu krychle, která, na rozdíl od dvourozměrného případu, je v trojrozměrném prostoru shodností nepřímou (viz též [14]).

[6] Zdroj: Wikimedia Commons, `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EB1911_Crystallography_-_Fig._5.%E2%80%94Axes_of_Symmetry_of_a_Cube.jpg`

4 Shrnutí a závěr

V příspěvku jsme načrtli dva typy úloh, které se sice vyskytují až ve vysokoškolské matematice, ale můžeme je zařadit do výuky už na střední škole. Společným jmenovatelem *hledání pevných bodů* i *zkoumání struktury symetrií* je přitom *pojetí permutace jako bijektivního zobrazení na konečné množině*, nikoliv pouze jako uspořádání jejích prvků, jak jsou dosud permutace pojímány ve středoškolských učebnicích kombinatoriky.

Současně, pojetí permutací coby zobrazení nejen ukazuje zajímavé souvislosti a představuje užitečné nástroje pro uchopení některých otázek, ale otevírá i cestu k další, pokročilejší matematice. S permutacemi se setká snad každý student lineární algebry při obecné definici determinantu matice.[7] Studium grup permutací se pak zrodilo při řešení zdánlivě nesouvisející otázky řešitelnosti polynomiálních rovnic pátého a vyššího stupně, která zaměstnávala matematiky po několik staletí a dnes ji shrnuje tzv. *Galoisova teorie.* (Tu pěkně představuje např. popularizační práce [6].) Další oblastí pak jsou některé hry a úlohy tzv. rekreační matematiky: např. řešení tzv. *Lloydovy Patnáctky* nebo i popis známější *Rubikovy kostky* – viz [8], [13] a velmi podrobně [11].

Samozřejmě, těmto pokročilejším oblastem matematiky se v navazujícím studiu bude věnovat spíše menšina středoškolských studentů. Přesto považuji za užitečné, pokud se i s tímto druhým pojetím permutací na představených úlohách setkají všichni studenti. Proč? Zejména proto, že propojením mnoha oblastí matematiky – kombinatoriky, pravděpodobnosti, posloupností a funkcí, stereometrie – můžeme prakticky ilustrovat, že matematika není jen používáním předem připravených postupů na k tomu určené úlohy, ale také uměním hledat souvislosti a vytvářet nástroje, pomocí nichž vnášíme do zprvu nejasných problémů přehlednost.

Literatura

[1] J. Bečvář, *Lineární algebra*, 3. vyd., Matfyzpress, 2005.

[2] J. Bečvář, *Z historie lineární algebry*, Matfyzpress, 2007. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400920`.

[3] J. Bečvář, V. Dlab, *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, vlastním nákladem, 2016.

[4] O. Borůvka, *Úvod do teorie grup*, Královská česká společnost nauk, 1944. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/401358`.

[5] E. Calda, V. Dupač, *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, 5. vyd., Prometheus, 2008.

[6] M. Livio, *Neřešitelná rovnice: matematika a jazyk symetrií*, Dokořán, 2008.

[7] Zajímavou historii determinantů, včetně jejich zařazení i do tuzemské středoškolské výuky, najde čtenář v publikaci [2], část III., zejm. kap. 6.

[7] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Kapitoly z diskrétní matematiky*, 4. vyd., Karolinum, 2009.

[8] L. Motl, M. Zahradník, *Pěstujeme lineární algebru*, Karolinum, 2002. Dostupné z: `http://matematika.cuni.cz/zahradnik-pla.html`.

[9] The Open University: *Symmetry* [online]. Dostupné z: `http://www.open.edu/openlearn/ocw/mod/resource/view.php?id=71454`.

[10] D. Stanovský, *Základy algebry*, Matfyzpress, 2010.

[11] J. Tůma, *Matematické hlavolamy a základy teorie grup*, Mladá fronta, 1988. Dostupné z: `https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/404164`.

[12] V. Vodička, *Determinanty a matice v theorii a praxi. Část první*, Jednota československých matematiků a fysiků, 1950. Dostupné z: `https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403265`.

[13] K. Výborný, M. Zahradník, *Používáme lineární algebru: sbírka řešených příkladů*, Karolinum, 2002. Dostupné z: `http://matematika.cuni.cz/zahradnik-plas.html`.

[14] Wikipedia: *Improper rotation*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Improper rotation`.

[15] Wikipedia: *Permutation*. `https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation`.

[16] M. Wolfová, *Kombinatorické úlohy o permutacích*, diplomová práce, MFF UK, 2019. Dostupné z: `https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/188627`.

Mgr. et Mgr. Filip Beran
Matematicko-fyzikální fakulta UK
Katedra didaktiky matematiky
Sokolovská 83
186 75 Praha 8
`filip.beran@centrum.cz`