3. ledna 2024**AplM: 6 Pár úloh na závěr**

1. **Vánoční speciál: Pečení lineckých koleček.**
2. Kolik dokážete upéct lineckých koleček o průměru 4 cm na plechu o rozměrech 80x50 cm?
3. Najděte rozměry plechu, pro který naopak čtvercové uspořádání bude nejvýhodnější.



1. Bonus: „Nekonečný plech“. Odvoďte a porovnejte hustoty čtvercového a trojúhelníkového uspořádání.
2. ****Prostorové zobecnění: „Sphere packing“. (Kepler. Aplikace v chemii a jinde.)
3. **Silvestrovský speciál: Skleničky.** Pro novoroční přípitek chcete postavit pyramidu z $n$ skleniček pro všechny pozvané hosty. Kolik bude mít pater? Kolik bude mít pater, pokud základnami nebudou čtverce, nýbrž trojúhelníky?

Obecně: Figurální čísla.



1. **Bonus: Plesový speciál: Tombola.** Každý přispěje do tomboly nějakou věcí a každý si zakoupí lístek. Jaká je pravděpodobnost, že:
2. právě vy si odnesete věc, kterou jste přispěli?
3. každý si odnese vlastní věc?
4. nikdo si neodnese vlastní věc?

Odpovědi pro 3, 4, 5 a obecně $n$ účastníků nejprve odhadněte a následně přesně vypočítejte!

Pozn.: Tato úloha se také označuje jako *problém šatnářky* (též *hat-check problem, derangement*): jaká je pravděpodobnost, že roztržitá šatnářka, která hostům náhodně vrací jejich klobouky, vrátí alespoň jednomu hostu jeho vlastní klobouk? (I to se může na plese stát…)

### Prázdninové úlohy

1. **Celsius a Fahrenheit.** Odvoďte převodní vztah mezi stupni Fahrenheita a stupni Celsia, pokud jste si v předpovědi počasí všimli, že 10 °C = 50 °F, $-$5 °C = 23 °F a víte, že mezi stupnicemi je lineární závislost.

Jaký je bod mrazu a bod varu vyjádřený ve °F? A naopak, kolik °C je při 0 °F? A kolik °C je v dystopickém románu Raye Bradburyho *451 stupňů Fahrenheita*? (Proč právě tolik?)

A pro jakou číselnou hodnotu udávají °C a °F stejnou teplotu?

1. **Výlet.** Vyrazili jste na kole na Křivoklát. Cestu tam jste ujeli průměrnou rychlostí 30 km/h. Jakou nejmenší průměrnou rychlostí můžete jet stejnou cestou zpět, aby vaše celková průměrná rychlost neklesla pod 24 km/h? (*Pozn.*: Není to tak přímočaré, jak to na první pohled vypadá…)
2. **Faustformel für die Zeitangaben auf Wegschildern.** Haben Sie sich schon einmal gefragt, wie die Zeitangaben für Wanderweg-Etappen zustande kommen? Als Richtwerte zur Berechnung der Gehzeit gelten: Circa 300 Höhenmeter (hm) pro Stunde für den Aufstieg, ca. 500 Höhenmeter pro Stunde für den Abstieg und ca. 4 Kilometer horizontal pro Stunde. Wir berechnen beide Werte (Gehzeit für Höhendifferenz bzw. für Horizontalentfernung) zuerst separat. Dann wird der kleinere Wert halbiert und zum größeren Wert addiert.

Spočítejte, jak dlouho podle tohoto vzorce trvá výstup od fjordu v Sunndalu na horskou chatu Fonnabu (cca 1500 m. n. m.) a jak dlouho naopak sestup, jestliže celková délka (nikoliv vodorovná) je 12 km a stoupání je přibližně rovnoměrné.

1. **Hustota zalidnění.** Pořadí pěti španělských regionů (Asturie, Baskicka, Galicie, Kastilie a Katalánska) podle počtu obyvatel je $Kat>Gal>Bask>Kast>Ast$, podle rozlohy $Kast>Kat>Gal>Ast>Bask$. Co z toho můžeme usoudit o uspořádání podle hustoty zalidnění?

K zamyšlení: Jak by vypadalo zadání, abychom dostali úplné uspořádání? A jak naopak takové, z nichž bychom žádnou informaci nezjistili?

---

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Koláč** | **Mák** | **Tvaroh** |
| Makovo-tvarohový | 200 g | 50 g |
| Tvarohovo-makový | 50 g | 200 g |

1. **Optimalizace funkce více proměnných.** Malá cukrárna se chystá péct posvícenské koláče. Receptura požaduje, aby byly plněné mákem a tvarohem; množství máku a tvarohu použité na jeden koláč v jednotlivých variantách uvádí tabulka vpravo.

Jeden makovo-tvarohový koláč se tradičně prodává za 48 Kč, jeden tvarohovo-makový za 56 Kč. Spotřeba ostatních surovin je přibližně stejná v obou variantách. Vzhledem k tomu, že těsně před posvícením jsou obě suroviny v okolí rozprodány, musí cukrář vystačit pouze se zásobami – má k dispozici 25 kg máku a 30 kg tvarohu.

Kolik má upéct kterých koláčů, aby dosáhl maximálního zisku? Řešení znázorněte také graficky.

*Nápověda*:

1. Vhodně si označte proměnné a sestavte (ne)rovnice pro spotřebu máku a spotřebu tvarohu.
2. Zakreslete je do grafu, sestavte funkci zisku a určete, pro jako kombinaci bude maximální.
3. Ověřte, která z možných celočíselných kombinací dává skutečně nejvyšší zisk.

### Několik geometrických úloh

1. **Rozkládací stůl.** Dvojitá deska obdélníkového stolu $ABCD$ se má otočit kolem šroubu $S$ do polohy $A’B’C’D‘$, aby se pak mohla horní deska překlopit kolem osy $A’D‘$ do polohy $A’D’C\_{1}D\_{1}$ (viz obrázek). Kam musíme umístit šroub?
2. **Lahváče.** Kolikrát, resp. o kolik procent je vyšší půllitrová láhev piva oproti třetince? (Předpokládáme, že lahve mají stejný tvar, tedy jedna je zvětšeninou druhé, neboli, řečeno geometricky, jsou si *podobné*.)
3. **Lodní navigace pomocí tří majáků.** Proplouváte nebezpečným Bonifáckým průlivem. Máte mapu, kde jsou vyznačeny polohy tří majáků. Mezi 1. a 2. jste změřili úhlovou vzdálenost 52°, současně mezi 2. a 3. majákem 35°.

Určete na mapě polohu vaší lodi v okamžiku vašeho měření.

Bonus: Spočítejte vzdálenosti vaší lodi od jednotlivých majáků na základě změření vzdálenosti jednotlivých majáků v mapě. (Měřítko: vzdálenost 1 a 2 jsou přesně 4 km.)



1. **Nejkratší spojnice třech bodů.** Podbořansko patří dlouhodobě mezi naše nejsušší oblasti. Města Kryry a Vroutek plánují připojení k vodojemu, který se nachází severně od nich (viz mapa).

Navrhněte do mapy vedení potrubí propojující vodojem a obě města (vyznačené body) tak, aby jeho celková délka byla co nejkratší. Výslednou celkovou délku změřte: $d≈$

Jak dlouhé by bylo potrubí, které by vedlo nejprve přímo do jedné obce a z ní pak přímo do druhé? O kolik procent by bylo delší než nejkratší varianta?

Jak dlouhé by bylo potrubí, které by vedlo z vodojemu kolmo na přímou spojnici těchto obcí + tato spojnice? O kolik procent by bylo delší než nejkratší varianta?

