Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hudební ladění pohledem středoškolské matematiky

Musical tuning from the viewpoint of high school mathematics

Lukáš Koudelka

Vedoucí práce: JUDr. Mgr. Filip Beran

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

2022

Odevzdáním této bakalářské práce na téma Hudební ladění pohledem středoškolské matematiky potvrzuji, že jsem ji vypracoval pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 19. dubna 2022

Rád bych poděkoval JUDr. Mgr. Filipu Beranovi, vedoucímu mé bakalářské práce, za rady, připomínky a vřelé podněty ke zpracování této práce a za vstřícnost při konzultacích.

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá matematickým pohledem na hudební ladění. Je určena převážně pro učitele a žáky středních škol, ale díky jejímu jazyku jí porozumí i laická veřejnost. Práce si klade za cíl nastínit čtenáři matematickou podstatu konstrukce pythagorejského, přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění. Dále navrhuje související příklady použitelné v rámci rozšíření výuky racionálních čísel na střední škole.

První dvě kapitoly popisují teorii racionálních čísel a hudební teorii, které jsou nezbytné pro pochopení práce. Následující tři kapitoly se zabývají podrobně matematickou konstrukcí jednotlivých ladění vypsaných výše. Podkapitoly mimo jiné uvádějí měření intervalů v centech a řetězové zlomky jako aproximace iracionálních čísel. Další kapitola je rozšiřující a věnuje se různým jiným temperovaným laděním. Poslední část obsahuje matematické vyjádření alikvotní řady pomocí několika prvních přirozených čísel, které však nejlépe aproximují alikvotní tóny.

KLÍČOVÁ SLOVA

racionální čísla, hudební intervaly, pythagorejské ladění, přirozené ladění, rovnoměrně temperované ladění

ABSTRACT

The bachelor thesis deals with a mathematical view of musical tuning. It is intended mainly for secondary school teachers and students, however, its language is also readable by the general public. The aim of this thesis is to outline to the reader the mathematical principle of the construction of pythagorean tuning, just intonation and equal temperament. The thesis also suggests related math problems useful for extending highschool knowledge of rational numbers.

The first two chapters describe the theory of rational numbers and music theory, which are crucial for understanding the thesis. The following three chapters deal in detail with the mathematical construction of the individual tunings listed above. Among other things, the subchapters present interval measurements in cents and continued fractions as approximations of irrational numbers. The next chapter is extensional and deals with various other tempered scales. The last chapter shows the mathematical expression of the series of harmonics using the first few positive integers, which best approximate harmonics.

KEYWORDS

rational numbers, musical intervals, pythagorean tuning, just intonation, equal temperament

Obsah

Úvod

Matematika a hudba – dvě zdánlivě odlišná témata, která však mají nemálo společného. V historii nebylo spojení těchto dvou oborů – vědy a umění – nic zvláštního. Například ještě ve středověku byla hudba jedním z prvků vyšší části sedmi svobodných umění. Zkoumali se její matematické principy, čemuž se budu také v této bakalářské práci věnovat. Chtěl jsem se zabývat propojením těchto dvou témat hlavně z důvodu, že kromě studia matematiky navštěvuji i Pražskou konzervatoř (obor dirigování), a tedy mám blízko jak k matematice, tak k hudbě. Ač jsem žákem hudební školy, k matematickému pohledu na hudební ladění jsem se nikdy v průběhu svého dosavadního studia nedostal.

Bakalářská práce je koncipována tak, aby byla použitelná při výuce matematiky na střední škole, zvláště jako rozšíření základního učiva v hodinách, ve kterých se probírají racionální čísla (zlomky) a čísla iracionální. Další možné uplatnění je i v rámci matematických seminářů, hudebních výchov, matematických či hudebních kroužků nebo v rámci příslušných hodin na hudebních konzervatořích. Pro takovéto použití obsahuje práce řešené příklady, které jsou buďto autorské, nebo upravené podle použitých zdrojů s citací „upraveno dle“, popřípadě ze zdrojů řádně citovaných. Rád bych se také pokusil vytvořit konkrétní pracovní listy, které by se daly použít v příslušných vyučovacích hodinách.

V práci jsou dále obsaženy tabulky a obrázky mající za úkol zpřehlednit vykládaný text. Možné citace se vyjadřují analogickým způsobem jako u výše uvedených příkladů. Obrázky jsem vytvořil zejména pomocí programů *GeoGebra* a *Malování*. Většina je upravena dle obrázku klaviatury volně dostupného z `https://tinyurl.com/vektor-klaviatura`. Pokud je to vhodné, používá se místo grafického znázornění na klaviatuře notového zápisu vytvořeného pomocí LaTeXového balíku *musixtex*.

Součást práce tvoří rovněž Příloha A, ve které jsou popsány zvukové soubory porovnávající pythagorejské, přirozené a rovnoměrně temperované ladění. Příloha taktéž uvádí i jejich seznam. Ukázky jsou vytvořeny pomocí *Online Tone Generator* dostupného z `https://www.szynalski.com/tone-generator/`, webové stránky

Ladění na portále *Wikipedie* dostupné z `https://cs.wikipedia.org/wiki/Lad%C4%9Bn%C3%AD` a následně sestříhané v programu *Audacity*.

V první kapitole popisuji úvod do racionálních čísel tak, jak jsou obvykle na střední škole definována. Na konci kapitoly jsou zavedena i čísla iracionální. Tady čerpám ze středoškolské učebnice *Matematika pro gymnázia* [2] a z učebního textu *Posloupnosti a řady* [1].

Druhá kapitola se zaměřuje na nezbytnou hudební teorii pro pochopení práce. Zavádí zvláště hudební intervaly a teorii k tomu potřebnou. Je určena převážně pro ty, kteří se hudbě nevěnují. Ostatní hudebně teoretické pojmy jsou vysvětleny v poznámce pod čarou tam, kde je jich užito. V této kapitole čerpám ze Zenklova *ABC hudební nauky* [3].

Kapitoly tři až pět jsou věnovány podrobné konstrukci pythagorejského, přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění. Každá z kapitol obsahuje na začátku krátký historický úvod, aby čtenář měl představu o základním dějinném vývoji jednotlivých ladění. Kapitola tři – *Pythagorejské ladění* – se dále dělí na podkapitoly: *Konstrukce*, kde se rozebírá výstavba diatonické durové stupnice; *Pythagorejské půltóny a pythagorejské komma*, ve které postupně docházím k základnímu problému tohoto ladění; *Úvod ke konstrukci přirozeného ladění*, která popisuje, jak se z pythagorejského ladění dospěje k ladění přirozenému. Čtvrtá kapitola – *Přirozené ladění* – se zaměřuje v první podkapitole nejprve na konstrukci durové stupnice a v podkapitole druhé na konstrukci mollové stupnice a problém transponování, kvůli kterému není toto ladění použitelné pro složitější skladby. Pátá kapitola nazvaná *Rovnoměrně temperované ladění* je členěna do čtyř podkapitol. V podkapitole *Konstrukce* ukazuji samotnou výstavbu dnešního rovnoměrně temperovaného ladění, podkapitola *Centy* zavádí měření poměru intervalů ve stejnojmenné jednotce. Následující podkapitola se orientuje na řetězové zlomky, které nejprve definuje a poté ukazuje, jak se pomocí nich aproximačně dojde k rovnoměrně temperované kvintě. Poslední podkapitola porovnává rovnoměrně temperovanou pentatoniku z pěti tónů v oktávě s pentatonikou tvořenou tóny dnešního dvanáctitónového rovnoměrně temperovaného ladění.

V těchto třech kapitolách je čerpáno převážně z výukového a metodického textu *Využití matematiky v praxi* Zdeňka Halase [7] a z knihy *Music: A Mathematical Offering*, kterou napsal Dave Benson [4].

Kapitola *Jiná temperovaná ladění* práci rozšiřuje, a tedy v ní už neuvádím žádné příklady. Tato kapitola popisuje několik vybraných temperovaných ladění a čerpám opět z knihy *Music: A Mathematical Offering* [4].

Poslední kapitola se věnuje matematické výstavbě alikvotní řady pomocí několika prvních přirozených čísel, které nejlépe aproximují alikvotní tóny. Zde jsem se inspiroval textem *Mathematics and Music* od autora Dave Wright [8].

1 Racionální a iracionální čísla

Jelikož v této práci budeme převážně pracovat s racionálními čísly $\mathbb{Q}$, budeme si je muset zavést. Budeme je však definovat pouze středoškolsky, aby zavedení bylo pro žáka střední školy srozumitelné. Korektní zavedení racionálních čísel s operací sčítání a násobení $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ pomocí tzv. zobecněné věty o vnoření pologrupy do grupy můžeme najít v [1, s. 151–153]. Ve středoškolské učebnici *Základní poznatky z matematiky* [2, s. 18] jsou racionální čísla definována následovně[1]:

„Množina $\mathbb{Q}$ všech racionálních čísel obsahuje právě ta čísla, jež lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je přirozené číslo.“

V této definici však narážíme na problém nejednoznačnosti, jelikož každé číslo z množiny $\mathbb{Q}$ lze vyjádřit více způsoby, např. rozšiřováním nebo krácením. Ve skupině zlomků

$$\frac{-93}{124}, \frac{-27}{36}, \frac{-6}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{12}, \frac{15}{20}, \frac{21}{28}, \frac{75}{100},$$

je ale jen jeden zlomek s čísly p a q, která jsou nesoudělná, tedy jejich společným dělitelem je pouze číslo jedna. Takovou vlastnost splňuje pouze zlomek $\frac{3}{4}$ a říkáme o něm, že je v základním tvaru. Shrneme-li tyto informace, můžeme říct, že racionální číslo $\frac{p}{q}$ je v základním tvaru, pokud jsou p a q nesoudělná. Pokud nám při počítání vyjde nějaký zlomek, vždy ho také do základního tvaru převedeme [2, s. 18–19].

Poznámka. Čísla p a q ve zlomku $\frac{p}{q}$ nazýváme po řadě čitatel a jmenovatel.

Jelikož v racionálním čísle $\frac{p}{q}$ je $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$, můžeme z toho odvodit, že každé přirozené i celé číslo lze zapsat jako zlomek. Například čísla 2, 0 a -17 je možno zapsat po řadě jako $\frac{2}{1}$, $\frac{0}{1}$ a $\frac{-17}{1}$ [2, s. 19]. Tedy přirozená čísla $\mathbb{N}$ a celá čísla $\mathbb{Z}$ jsou podmnožinou racionálních čísel $\mathbb{Q}$, což je graficky znázorněno na obrázku 1.

Abychom mohli se zlomky počítat, musíme si uvést několik pravidel pro práci s racionální čísly. Nejprve si ukážeme, jak se zlomky sčítají a násobí.

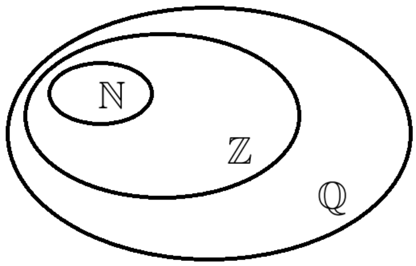
Sčítání racionálních čísel je definováno následovně

$$\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs},$$

[1] Ve středoškolské matematice uvažujeme přirozená čísla $\mathbb{N}$ bez nuly.

a násobení zlomků takto

$$\forall \frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} : \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$



Obrázek 1: Přirozená a celá čísla jako podmnožiny čísel racionálních

Dále pro tři libovolná racionální čísla $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ platí:

1) $\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{r}{s} + \dfrac{p}{q}$,

2) $\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s}\right) + \dfrac{t}{u} = \dfrac{p}{q} + \left(\dfrac{r}{s} + \dfrac{t}{u}\right)$,

3) $\dfrac{p}{q} + \dfrac{0}{1} = \dfrac{p}{q}$,

4) $\dfrac{p}{q} + \dfrac{-p}{q} = 0$,

5) $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{r}{s} = \dfrac{r}{s} \cdot \dfrac{p}{q}$,

6) $\left(\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{r}{s}\right) \cdot \dfrac{t}{u} = \dfrac{p}{q} \cdot \left(\dfrac{r}{s} \cdot \dfrac{t}{u}\right)$,

7) $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$,

8) $\dfrac{p}{q} \neq 0 \implies \left[\left(\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{r}{s} = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{t}{u}\right) \implies \dfrac{r}{s} = \dfrac{t}{u}\right]$,

9) $\dfrac{p}{q} \neq 0 \implies$ k němu existuje inverzní prvek $\left(\dfrac{p}{q}\right)^{-1} = \dfrac{q}{p}$,

10) $\left(\dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{s}\right) \cdot \dfrac{t}{u} = \dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{t}{u} + \dfrac{r}{s} \cdot \dfrac{t}{u}$. [1, s. 152–153]

Racionální čísla nemusíme zapisovat pouze ve zlomcích, ale někdy je vhodné zvolit zápis jiný. Takovým jiným zápisem je číslo desetinné. Desetinným číslem rozumíme racionální číslo mající konečný desetinný rozvoj, nebo nekonečně periodický desetinný rozvoj a můžeme jej vyjádřit zlomkem. Příkladem čísla ve tvaru nekonečného periodického desetinného rozvoje může být například číslo

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333\,333\,333\,333\,333\,333\,333\,333\,333\,333\,333\ldots$$

a naopak číslo s konečným desetinným rozvojem je kupříkladu

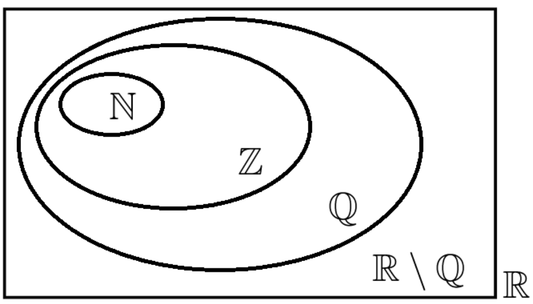
$$\frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Čísla, která mají konečný, nebo nekonečně periodický desetinný rozvoj, můžeme tedy rozlišit podle jmenovatele takto:

$$\forall c \in \mathbb{Z}, (c, n) = 1 : \frac{c}{n} \text{ má } \begin{cases} \text{konečný desetinný rozvoj} & \text{pro } n = 2^k \cdot 5^l, \\ & \text{kde } k, l \in \mathbb{N}, \\ \text{nekonečný periodický des. rozvoj} & \text{pro } n \in \mathbb{N} \text{ ostatní.} \end{cases}$$

Ostatními $n \in \mathbb{N}$ rozumíme ty, ve kterých se vyskytuje alespoň jedna kladná mocnina prvočísla různého od čísel 2 a 5.

Čísla mající nekonečný neperiodický desetinný rozvoj nazýváme čísla iracionální [2, s. 29]. Ty tvoří doplněk racionálních čísel do čísel reálných, což můžeme vidět graficky znázorněno na obrázku 2. Příkladem iracionálních čísel jsou kupříkladu odmocniny ($\sqrt{5}$, $\sqrt[12]{2^7}$ apod.), Ludolfovo číslo π nebo Eulerovo číslo e. Více si k iracionálním číslům řekneme v podkapitole 5.3 o řetězových zlomcích.



Obrázek 2: Přirozená, celá a racionální čísla jako podmnožiny čísel reálných

2 Hudební intervaly

K pochopení této práce budeme potřebovat znalost základní hudební teorie o intervalech. Z tohoto důvodu bude opět nutné si dané pojmy definovat.

Poznámka. Ostatní hudebně teoretické pojmy budou vysvětleny tam, kde jich bude použito.

Na začátek si vysvětleme, co je to zvuk. Zvukem rozumíme z hudebního hlediska všechno, co slyšíme. Vzniká chvěním těles, kapalin nebo plynů. Zvuky můžeme dělit na tóny, které se chvějí pravidelně a znějí nám libozvučně, a hluky, které se chvějí nepravidelně a tedy nám nejsou tak příjemné [3, s. 9].

V hudební teorii rozlišujeme čtyři základní vlastnosti tónů: délku, sílu, barvu a výšku. Délka je dána časovou jednotkou, síla neboli hlasitost je měřena v decibelech a výška (frekvence) v hertzech. Barvu daného tónu určuje stavba hudebního nástroje nebo lidských hlasivek (např. klavír má jinou barvu než housle, mužský či ženský hlas) [3, s. 10].

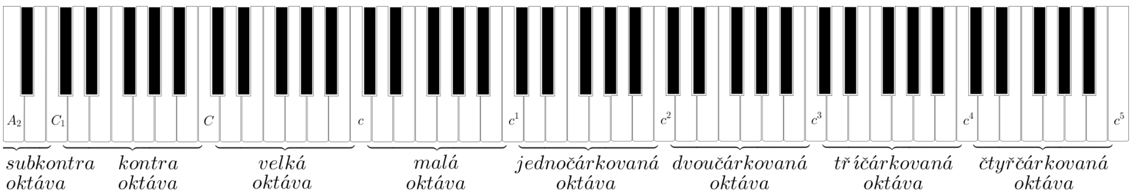
Jelikož při zpěvu a při hře na většinu primitivních nástrojů můžeme tvořit výšky zcela libovolně, bylo pro praktické použití při více hráčích na hudební nástroje nebo při opakování stejné melodie potřeba, aby hráči hráli stejně vysoko a melodie se ve stejném tvaru zachovávala. Proto bylo důležité dodržovat určité zásady a hlavně si vybrat z nepřeberného množství výšek jen ty, které jsou dobře rozlišitelné a ve vzájemných vztazích dobře zapamatovatelné. Vybrané tónové výšky se tak ustálily v různých tónových systémech [3, s. 126].

Tónové systémy však určují tónové výšky jen přibližně, například v půltónech a celých tónech. Přesné rozdíly mezi těmito celými tóny a půltóny vymezují soustavy ladění, které se nicméně mohou vztahovat k jednomu tónovému systému a přitom být různé. Soustavy ladění mohou být tvořeny například přirozeně (např. pythagorejské a přirozené ladění), nebo temperovaně (např. středotónové a rovnoměrně temperované ladění) [3, s. 127].

Tónový systém je tedy uspořádání všech tónů podle jejich výšek. Základem dnešního takového systému je sedm tónů c, d, e, f, g, a, h, které se v tomto pořadí za sebou opakují. Tónový systém obsahuje devět těchto řad (oktáv), ve kterých je příslušnost tónů označována způsobem:

- tóny subkontra, resp. kontra, oktávy se značí velkým písmenem s číslem dva, resp. jedna, v dolním indexu (např. D_2, E_1);
- tóny velké, resp. malé, oktávy značíme velkým, resp. malým, písmenem (např. F, g);
- jedno až pětičárkované tóny se značí malým písmenem s číslem jedna až pět v horním indexu (např. a^1, h^4) [3, s. 11].

Obrázek 3 nám ukazuje dnešní klaviaturu, která má rozsah od A_2 do c^5. Tento rozsah nám nepokrývá celé krajní oktávy, jelikož se v těchto oktávách používá jen několik tónů.



Obrázek 3: Rozložení jednotlivých oktáv na dnešní klaviatuře

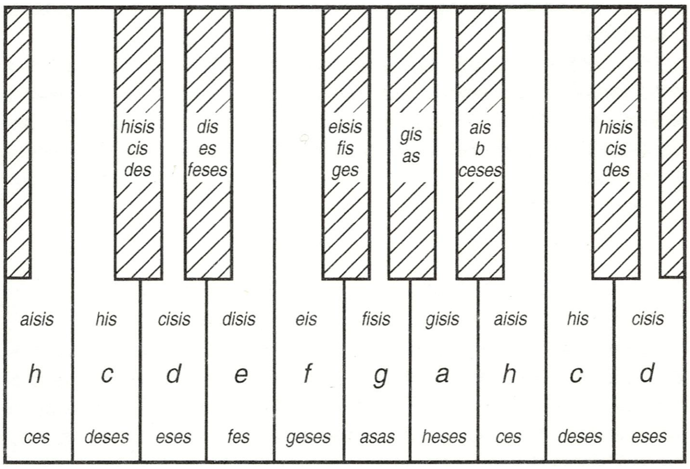
Tóny můžeme zvyšovat, resp. snižovat, pomocí posuvek a označujeme příslušnou příponou ($\sharp$, resp. $\flat$; příponou -is, resp. -es). Rozlišujeme i tóny dvojzvětšené (𝄪, -isis) a dvojzmenšené (𝄫, -eses). Takovéto tóny nazýváme odvozené [3, s. 12].[2]

Na obrázku 4 můžeme vidět všechny základní a odvozené tóny.

Tóny můžeme také dělit na více částí: půltóny, čtvrttóny, atd. (viz kapitola 6 na s. 67).

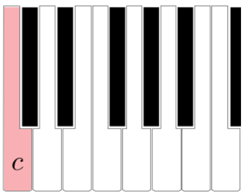
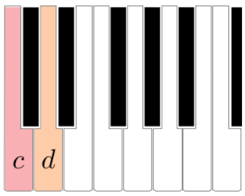
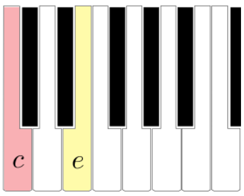
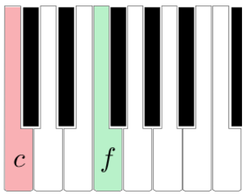
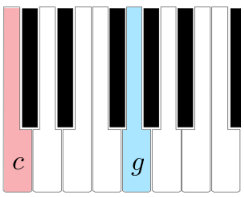
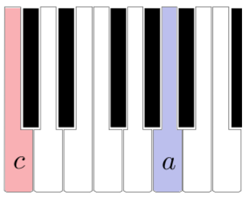
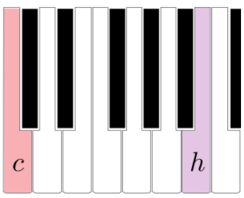
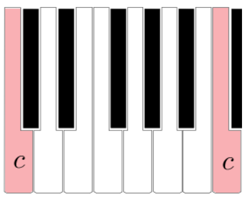
Z obrázku 4 je patrné, že pro tón o jedné výšce používáme několik jmen. Proto se v hudební teorii zavádí pojem enharmonická záměna. Enharmonickou záměnou rozumíme zaměnění daného tónu za tón stejné výšky ale jiného jména (např. $c\sharp$–$d\flat$, e–$f\flat$, g𝄪–a) [3, s. 14].

[2] V české a německé notaci je zvykem písmenem b označovat tón $h\flat$, zatímco v anglickém systému a tamních publikacích se označení písmenem b používá pro tón h [3, s. 178–179].



Obrázek 4: Základní a odvozené tóny [3, s. 13]

Nyní se už dostáváme k definování intervalů. Hudební interval chápeme jako výškovou vzdálenost mezi jakýmikoliv dvěma tóny. Názvy intervalů se sestávají ze dvou slov, číslovky (latinsky nebo pomocí odpovídajícího čísla) a přídavného jména, které daný interval upřesňuje [3, s. 78, 80]. V tabulce 1 vidíme základní intervaly vyobrazené na klaviatuře.

prima		sekunda	
tercie		kvarta	
kvinta		sexta	
septima		oktáva	

Tabulka 1: Základní intervaly

V hudbě rozlišujeme tři základní skupiny intervalů: čisté (zkratka: *č.*), malé a velké (*m.* a *v.*), zmenšené a zvětšené (*zm.* a *zv.*). V tabulce 2 vidíme, jak se prima, sekunda, tercie, kvarta, kvinta, sexta, septima a oktáva rozdělují do těchto skupin. Do skupiny zmenšených a zvětšených intervalů mohou patřit všechny, ale pouze dva, které můžeme enharmonicky zaměnit, nám utvoří poslední zbývající tón do dvanácti rovnoměrně temperovaných tónů – zvětšená kvarta a zmenšená kvinta. Tento interval nazýváme tritón [3, s. 80].

1	2		3		4		5	6		7		8
č.	m.	v.	m.	v.	č.	tritón	č.	m.	v.	m.	v.	č.

Tabulka 2: Rozdělení intervalů

Intervaly také můžeme dělit na konsonantní (č. 1, č. 4, č. 5, č. 8, m. 3, v. 3, m. 6, v. 6) a disonantní (m. 2, v. 2, m. 7, v. 7, zv. 4) [3, s. 130].

Analogií tónů a intervalů mohou být v matematice po řadě body a vektory. Pokud od nějakého tónu jdeme o nějaký interval k jinému tónu, rozumíme tím, že k nějakému bodu přičteme vektor a dostaneme tak bod jiný. (Interval čistou primu můžeme vyjádřit nulovým vektorem.)

3 Pythagorejské ladění

Slovo hudba (z řec. μουσικη) mělo ve starověkém Řecku širší význam, než jak ho známe dnes [4, s. 193]. Hudba byla především teoretickým věděním. Lidem nešlo o to, jaké pocity v nich hudba vyvolává. Spíš je zajímalo to, na jakých principech hudba funguje. Tyto zákonitosti byly v první řadě založené na principech matematických, o kterých se věřilo, že vládnou stvořenému světu. Proto byla hudba přetvořena tak, aby pozvedla duši od smyslového požitku k rozjímání o věčné, kosmické pravdě. Důkazem takového uvažování by mohlo být to, na jaké disciplíny se matematika dále dělila: aritmetika, hudba, geometrie a astronomie, což přetrvalo až do středověku. V hudbě se však studenti zabývali především její teorií, například matematickými poměry intervalů. Tyto odvětví byly součástí tzv. kvadrivia, což byla vyšší část sedmi svobodných umění, vyučovaných na univerzitách [5, s. 1–2].

Nejvíce používané ladění bylo ve starověkém Řecku pythagorejské. K výstavbě tohoto systému jsou použity jen dva poměry délek struny: 1 : 2 představující oktávu a 2 : 3 představující kvintu. Ostatní intervaly se tvoří sčítáním, resp. násobením jejich poměrů. Pythagorejská stupnice se používala ve středověké evropské hudbě od osmého do čtrnáctého století po Kristu [4, s. 193].

3.1 Konstrukce

Jak jsme zmínili výše, Pythagoras (okolo 570–510 př. Kr.) zvolil jako základní intervaly oktávu a kvintu, ze kterých pak odvodil intervaly ostatní. Objevil totiž, že intervaly a poměry délek struny spolu úzce souvisí [6, s. 1]. Tedy přišel na to, že když zkrátíme strunu o $\frac{1}{2}$, tak nám zazní vyšší tón velice podobný základnímu tónu (tónu nezkrácené struny), který je uchem skoro nerozpoznatelný. Právě tento interval se nazývá oktáva.[3] Zjistil, že když zkrátí strunu o $\frac{2}{3}$, tak vznikne opět velmi libozvučný souzvuk, kvinta [4, s. 154]. Jeho tónový systém je tedy založený na intervalu oktávy a kvinty, pomocí kterých můžeme vytvořit všechny ostatní tóny pouhým skládáním těchto dvou intervalů, což je velmi jednoduchý matematický princip. Tento princip

[3] Pokud nebude řečeno jinak, budeme vždy intervaly primu, kvartu, kvintu a oktávu považovat za čisté.

ovšem naráží na to, že není použitelný ve větším tónovém rozsahu skladby [6, s. 1]. Níže si ukážeme, že když složíme od tónu c dvanáct kvint na sebe, tak dostaneme enharmonickou záměnou opět tón c, který by měl odpovídat sedmi oktávám, což není správně, protože poměry se liší o tzv. *pythagorejské komma*, malý rozdíl, který je ovšem dobře slyšitelný [7, s. 20].

Pythagoras objevil, že pro interval oktávy musí být rozdělení struny v poměru 1 : 2 a pro interval kvinty v poměru 2 : 3. Pro popis výšky tónů se však tyto poměry nepoužívají, nýbrž pracuje se s poměry frekvencí daných tónů. Už staří Řekové věděli, že frekvence kmitání struny je nepřímo úměrná její délce za předpokladu, že napětí a hmotnost dané struny na jednotku délky zůstanou stejné. Tedy vztah mezi délkou struny l a frekvencí f lze vyjádřit jako

$$f = \frac{k}{l},$$

pro nějaké $k \in \mathbb{R}^+$, které právě označuje konstantní napětí a hmotnost. Dále potřebujeme zjistit, v jakém vztahu jsou poměry dvou frekvencí a dvou délek [8, s. 50].

Mějme $f = \frac{k}{l}$ a $f' = \frac{k}{l'}$. Poměry dvou frekvencí f a f' jsou následně

$$f \div f' = \frac{k}{l} \div \frac{k}{l'} = \frac{k}{l} \cdot \frac{l'}{k} = l' \div l.$$

Zjistili jsme, že poměry dvou frekvencí jsou také nepřímo úměrné poměrům dvou délek [8, s. 50].

Poznámka. Pokud nebude řečeno jinak, budeme v práci používat označení $\frac{x}{y}$ pro poměry délek struny a označení $y : x$ pro poměry frekvencí. Aby se nám označení pro poměry délek struny a označení pro poměry frekvencí nepletlo s dělením dvou poměrů, budeme pro toto dělení používat znak $\div$.

Nyní si vysvětlíme, jak se odvozují další intervaly pouze pomocí kvinty a oktávy.

Odvození 1. Kvarta v pythagorejském ladění

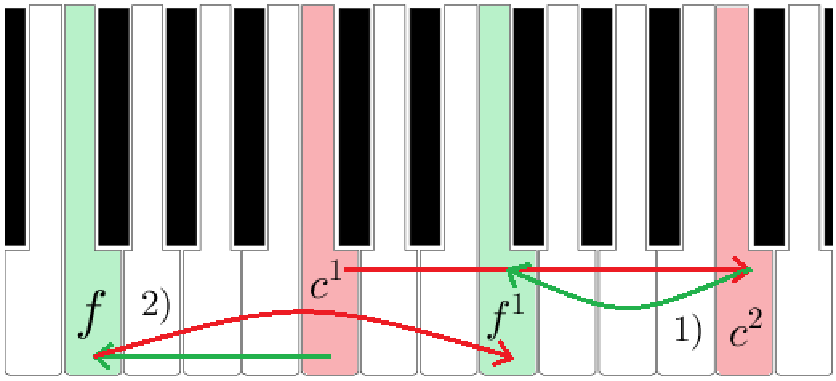
Nejprve odvoďme kvartu. Jelikož sčítání, resp. odčítání, intervalů odpovídá násobení, resp. dělení, jejich poměrů, můžeme kvartu vytvořit dvěma následujícími způsoby (na klaviatuře graficky znázorněné na obrázku 5):

1) kvarta = oktáva − kvinta

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4},$$

2) kvarta = − kvinta + oktáva

$$1 \div \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ [7, s. 15–16].}$$



Obrázek 5: Kvarta v pythagorejském ladění

Vidíme, že oba způsoby jsou prakticky totožné, ač to tak na první pohled nemusí vypadat. Je tomu tak, protože operace násobení je na reálných číslech komutativní (operace dělení je násobení inverzním prvkem vzhledem k operaci násobení).

Ke kvintě a kvartě se ovšem můžeme pomocí základního tónu a oktávy dostat i jinak. Použijeme aritmetický, harmonický a geometrický průměr:

- aritmetický průměr čísel a a b je roven $\dfrac{a+b}{2}$,
- harmonický průměr čísel a a b spočítáme jako $\dfrac{2ab}{a+b}$,
- geometrický průměr čísel a a b je $\sqrt{ab}$ [7, s. 16–17].

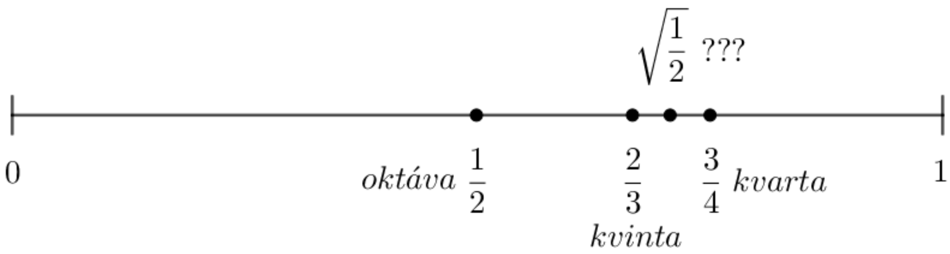
Příklad 1. *Spočtěte výše uvedené průměry pro základní tón a oktávu.*

Řešení. Dosadíme do vzorců pro aritmetický, harmonický a geometrický průměr $a = \frac{1}{1}$ (základní tón) a $b = \frac{1}{2}$ (oktáva):

- aritmetický průměr $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$,

- harmonický průměr $\dfrac{2ab}{a+b} = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$,
- geometrický průměr $\sqrt{ab} = \sqrt{\dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

Vidíme, že aritmetický průměr poměrů základního tónu a oktávy je právě kvarta, harmonický průměr kvinta a geometrický nám zatím není jasný, ale později na takové číslo také narazíme (viz s. 45). Na obrázku 6 můžeme vidět, kde se tato čísla ($\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ a $\sqrt{\frac{1}{2}}$) vyskytují na struně.



Obrázek 6: Aritmetický, harmonický a geometrický průměr na struně

Nyní můžeme opět jenom pomocí oktáv a kvint zjistit poměry pro ostatní intervaly tak, že budeme pořád vrstvit kvinty po kvintovém kruhu[4] na sebe a pak je pomocí odčítáním oktáv převedeme do základní polohy. Ukážeme si to na následujícím příkladu 2.

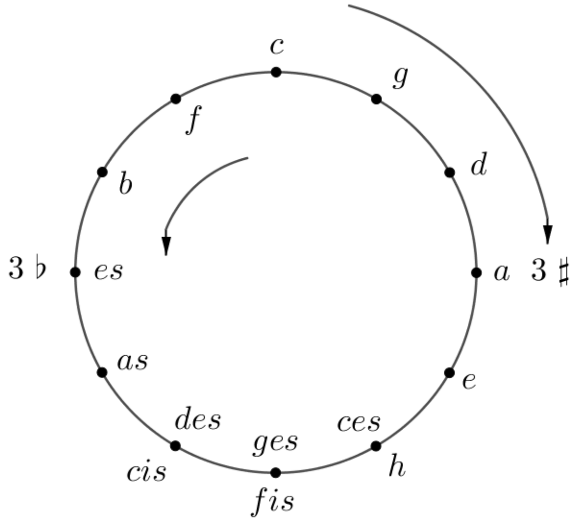
Odvození 2. Velká sekunda v pythagorejském ladění

Víme, že o kvintu výše než je tón g^1 (naše původní kvinta), je tón d^2, který se ovšem nachází v o jedno vyšší oktávě, proto ho oktávou přeneseme do tónu d^1 takto: kvinta + kvinta − oktáva[5] (viz obrázek 8) [7, s. 17]. Matematicky

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{1} = \frac{8}{9}.$$

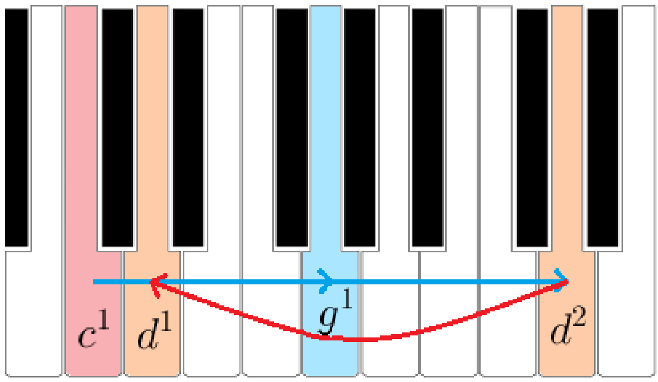
[4] **Kvintový kruh** je znázornění počtu předznamenání jednotlivých tónin na kružnici rozdělené na dvanáct stejných dílů. Vnější šipka na obrázku 7 ukazuje směr zvětšování počtu křížků, vnitřní šipka zvětšování počtu béček. Někdy se tomuto kruhu říká i kvartový, protože pokud bychom šli po kruhu v kladném směru, šli bychom po kvartách, tedy ne po kvintách jako je tomu ve směru záporném [3, s. 61–62].

[5] Upozornění: g^1, d^2, apod. značíme tóny jednočárkované, dvoučárkované, apod. oktávy, tedy ne první nebo druhé mocniny proměnných (viz s. 15).



Obrázek 7: Kvintový kruh [3, upraveno dle s. 62]

Tedy velkou sekundu vytvoříme zkrácením struny na $\frac{8}{9}$ původní délky. Z hudební teorie je nám známo, že velká sekunda je také mezi tónem f a g, tedy kvartou a kvintou.[6]



Obrázek 8: Velká sekunda v pythagorejském ladění

[6] Pokud není potřeba rozlišení, do které oktávy daný tón patří, budeme používat značení malými písmeny f, g, apod.

Příklad 2. *Spočítejte poměr intervalu mezi kvartou a kvintou.*

Řešení. Ptáme se tedy, jaký interval musíme přičíst ke kvartě, abychom dostali kvintu. V poměrech se opět sčítání převede na násobení, dostaneme následující rovnici:

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{2}{3},$$

kde x je náš hledaný interval. Po vyřešení této rovnice dostaneme znovu výsledek $\frac{8}{9}$, což je právě ona sekunda, kterou jsme spočítali výše. Ta se nazývá **pythagorejský celý tón** [7, s. 16].

Odvození 3. Velká sexta v pythagorejském ladění

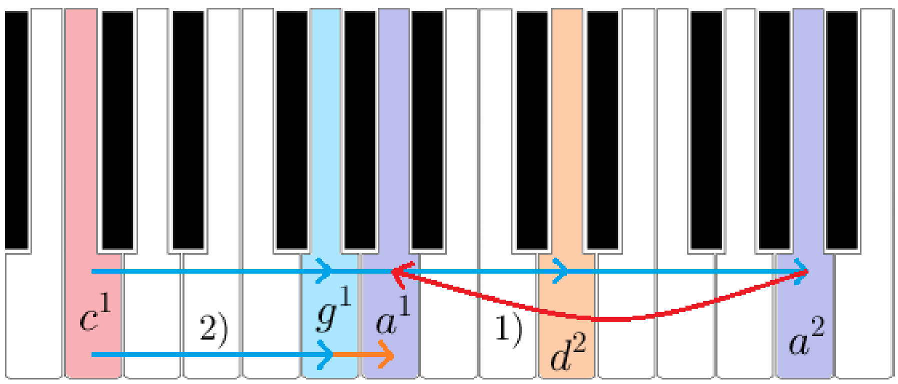
Dalším tónem, který v kvintovém kruhu následuje, je tón a^2. Můžeme ho opět vytvořit dvěma způsoby (viz obrázek 9):

1) pomocí kvint: velká sexta = 3 · kvinta − oktáva

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \frac{1}{2} = \frac{8}{27} \cdot 2 = \frac{16}{27},$$

2) pomocí sekundy: velká sexta = kvinta + sekunda

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{27}.$$



Obrázek 9: Velká sexta v pythagorejském ladění

Analogickými postupy dospějeme k ostatním poměrům diatonické durové stupnice[7], které uvádí tabulka 3.

[7]**Stupnice** je stoupající nebo klesající řada tónů, která je určena počtem tónů v oktávě a vzdáleností mezi nimi.

Odvození 4. Velká tercie a velká septima v pythagorejském ladění

Příklad 3. *Spočítejte poměry zbývajících intervalů diatonické durové stupnice za pomoci kvint a oktáv.*

Řešení. Nejdříve z kvintového kruhu (viz obrázek 7) zjistíme, jak jdou kvinty postupně za sebou. Dostaneme řadu:

$$c^1 - g^1 - d^2 - a^2 - e^3 - h^3 - \dots,$$

přičemž další tóny zatím nemusíme uvažovat, neboť je nepotřebujeme.

Naše nové tóny (intervaly) budou:

1) e (velká tercie), kterou získáme součtem čtyř kvint a následným odečtením dvou oktáv
$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{81} \cdot 4 = \frac{64}{81},$$

2) h (velká septima) vznikne pomocí pěti kvint a dvou oktáv
$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{32}{243} \cdot 4 = \frac{128}{243} \text{ [7, s. 17].}$$

Pro shrnutí uvádíme všechny tóny (a intervaly[8]) diatonické durové stupnice v tabulce níže.

interval	č. 1	v. 2	v. 3	č. 4	č. 5	v. 6	v. 7	č. 8
tón	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
poměr	1 : 1	9 : 8	81 : 64	4 : 3	3 : 2	27 : 16	243 : 128	2 : 1

Tabulka 3: Poměry frekvencí intervalů durové stupnice v pythagorejském ladění

[8] Jednotlivé intervaly jsou brány vzhledem k tónu c.

3.2 Pythagorejské půltóny a pythagorejské komma

Mezi intervaly primou a velkou sekundou, velkou sekundou a velkou tercií, kvartou a kvintou, kvintou a velkou sextou, velkou sextou a velkou septimou, je pythagorejský celý tón. U kvarty a kvinty jsme to ukázali v příkladu 2 a ukázat to můžeme analogicky i pro intervaly ostatní. Mezi nám známými půltóny (velká tercie a kvarta, velká septima a oktáva) je interval s poměrem $\frac{243}{256}$, což zjistíme analogickým výpočtem jako u příkladu 2 [7, s. 18]. Ptáme se na to, jaký poměr má interval mezi velkou tercií a kvartou, resp. velkou septimou a oktávou. Rovnice, ve které je x náš neznámý interval, by pro tercii a kvartu vypadala následovně

$$\frac{64}{81} \cdot x = \frac{3}{4},$$

a pro septimu s oktávou takto

$$\frac{128}{243} \cdot x = \frac{1}{2}.$$

Z obou rovnic dostaneme stejný výsledek $x = \frac{243}{256}$. Tento interval se nazývá **malý pythagorejský půltón**[9]. Malý z důvodu, že není jediným půltónem, který v pythagorejském ladění najdeme. Když totiž složíme tyto dva intervaly nad sebe, výsledek nám nedá celý tón, který bychom očekávali:

$$\frac{243}{256} \cdot \frac{243}{256} = \frac{3^{10}}{2^{16}} \neq \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} \text{ [7, s. 18]}.$$

Příklad 4. *Ukažte, že neplatí rovnost:* $\dfrac{3^{10}}{2^{16}} = \dfrac{2^3}{3^2}$.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že rovnost platí. Na rovnici provedeme ekvivalentní úpravy.

$$\begin{aligned} \frac{3^{10}}{2^{16}} &= \frac{2^3}{3^2} && / \cdot \frac{2^{16}}{3^{10}} \\ 1 &= \frac{2^3}{3^2} \cdot \frac{2^{16}}{3^{10}} \\ 1 &= \frac{2^{19}}{3^{12}} \end{aligned}$$

Levá strana se ale nikdy pravé rovnat nebude. Zlomek je totiž v základním tvaru, nejde už více zkrátit, jelikož v čitateli máme sudé číslo a ve jmenovateli liché.

[9] též diesis, nebo (později) limma [4, s. 155]

Jakákoli kladná mocnina čísla 2 je sudé číslo a každá kladná mocnina čísla 3 je číslo liché. Dokázali jsme, že rovnost neplatí.

Musí tedy existovat ještě nějaký další půltón. K nalezení takového půltónu budeme potřebovat znát ostatní půltóny ve stupnici, čili tóny $c\sharp$, $d\sharp$, $f\sharp$, $g\sharp$, $a\sharp$. Jejich poměry zjistíme analogicky, jako jsme zjišťovali tóny diatonické durové stupnice. Tedy pomocí vzestupných kvint.

Příklad 5. *Spočítejte poměry tónů uvedených výše za pomoci kvint a oktáv.*

Řešení. Rozšíříme si řadu tónů z příkladu 3 a dopočítáme analogicky. K řadě přidáme vzestupnými kvintovými kroky další tóny. Dostaneme:

$$c^1 - g^1 - d^2 - a^2 - e^3 - h^3 - f\sharp^4 - c\sharp^5 - g\sharp^5 - d\sharp^6 - a\sharp^6.$$

1) $f\sharp$ (zvětšená kvarta[10]):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2^6}{3^6} \cdot 2^3 = \frac{2^9}{3^6},$$

2) $c\sharp$ (zvětšená prima):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7 \div \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2^7}{3^7} \cdot 2^4 = \frac{2^{11}}{3^7},$$

3) $g\sharp$ (zvětšená kvinta):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^8 \div \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2^8}{3^8} \cdot 2^4 = \frac{2^{12}}{3^8},$$

4) $d\sharp$ (zvětšená sekunda):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^9 \div \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^9}{3^9} \cdot 2^5 = \frac{2^{14}}{3^9},$$

5) $a\sharp$ (zvětšená sexta):

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \div \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{2^{10}}{3^{10}} \cdot 2^5 = \frac{2^{15}}{3^{10}} \text{ [7, s. 19].}$$

Výsledky ukazuje tabulka 4.

[10] Jednotlivé intervaly jsou brány vzhledem k tónu c.

interval	zv. prima	zv. sekunda	zv. kvarta	zv. kvinta	zv. sexta
tón	$c\sharp$	$d\sharp$	$f\sharp$	$g\sharp$	$a\sharp$
poměr	$3^7 : 2^{11}$	$3^9 : 2^{14}$	$3^6 : 2^9$	$3^8 : 2^{12}$	$3^{10} : 2^{15}$

Tabulka 4: Poměry frekvencí ostatních intervalů v pythagorejském ladění

Zbývá nám zjistit, jaké poměry jsou mezi tóny diatonické durové stupnice a námi nově zjištěnými tóny. Ukážeme si to na tónech f, $f\sharp$, g.

- $f - f\sharp$:

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{2^9}{3^6} \qquad \Longrightarrow x = \frac{2^{11}}{3^7},$$

- $f\sharp - g$:

$$\frac{2^9}{3^6} \cdot y = \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow y = \frac{3^5}{2^8} = \frac{243}{256}.$$

Vidíme, že mezi tóny $f\sharp$ a g je malý pythagorejský půltón a mezi f a $f\sharp$ je jiný půltón s poměrem $\frac{2^{11}}{3^7}$, ten nazveme **velkým pythagorejským půltónem**[11].

Příklad 6. *Ukažte, mezi kterými tóny je malý pythagorejský půltón a mezi kterými velký pythagorejský půltón.*

Řešení.

- $c - c\sharp$:

$$\frac{2^{11}}{3^7} \div \frac{1}{1} = \frac{2^{11}}{3^7} \tag{1}$$

- $c\sharp - d$:

$$\frac{8}{9} \div \frac{2^{11}}{3^7} = \frac{2^3}{3^2} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^5}{2^8} \tag{2}$$

- $d - d\sharp$:

$$\frac{2^{14}}{3^9} \div \frac{8}{9} = \frac{2^{14}}{3^9} \cdot \frac{3^2}{2^3} = \frac{2^{11}}{3^7} \tag{3}$$

[11] též apotomē

- $d\sharp - e$:

$$\frac{64}{81} \div \frac{2^{14}}{3^9} = \frac{2^6}{3^4} \cdot \frac{3^9}{2^{14}} = \frac{3^5}{2^8} \tag{4}$$

- $e - f$:

$$\frac{3}{4} \div \frac{64}{81} = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3^4}{2^6} = \frac{3^5}{2^8} \tag{5}$$

- $f - f\sharp$:

$$\frac{2^9}{3^6} \div \frac{3}{4} = \frac{2^9}{3^6} \cdot \frac{2^2}{3} = \frac{2^{11}}{3^7} \tag{6}$$

- $f\sharp - g$:

$$\frac{2}{3} \div \frac{2^9}{3^6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3^6}{2^9} = \frac{3^5}{2^8} \tag{7}$$

- $g - g\sharp$:

$$\frac{2^{12}}{3^8} \div \frac{2}{3} = \frac{2^{12}}{3^8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2^{11}}{3^7} \tag{8}$$

- $g\sharp - a$:

$$\frac{16}{27} \div \frac{2^{12}}{3^8} = \frac{2^4}{3^3} \cdot \frac{3^8}{2^{12}} = \frac{3^5}{2^8} \tag{9}$$

- $a - a\sharp$:

$$\frac{2^{15}}{3^{10}} \div \frac{16}{27} = \frac{2^{15}}{3^{10}} \cdot \frac{3^3}{2^4} = \frac{2^{11}}{3^7} \tag{10}$$

- $a\sharp - h$:

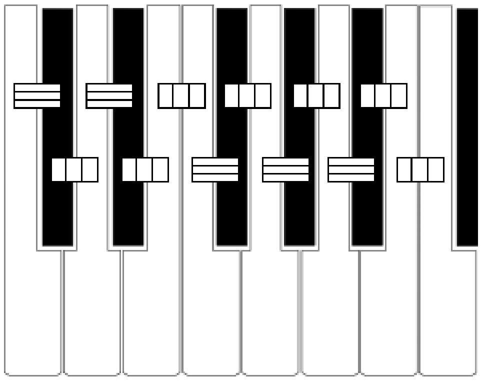
$$\frac{2^7}{3^5} \div \frac{2^{15}}{3^{10}} = \frac{2^7}{3^5} \cdot \frac{3^{10}}{2^{15}} = \frac{3^5}{2^8} \tag{11}$$

- $h - c$:

$$\frac{1}{2} \div \frac{2^7}{3^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^5}{2^7} = \frac{3^5}{2^8} \tag{12}$$

Malý pythagorejský půltón je tedy v (2), (4), (5), (7), (9), (11), (12) a velký pythagorejský půltón v (1), (3), (6), (8), (10) [7, s. 19].

Na obrázku 10 můžeme vidět grafické rozmístění malých $\left(\frac{3^5}{2^8}\right)$ a velkých $\left(\frac{2^{11}}{3^7}\right)$ pythagorejských půltónů na klaviatuře. Malé půltóny jsou vyobrazeny obdélníkem mezi příslušnými tóny a velké půltóny obdélníkem .



Obrázek 10: Rozmístění pythagorejských půltónů na klaviatuře

Výše jsme si ukázali, že dva malé pythagorejské půltóny nám celý tón nedají. Obdobně to neplatí ani pro dva velké pythagorejské půltóny.

Příklad 7. *Dokažte výpočtem, že součet dvou velkých pythagorejských půltónů není roven celému tónu.*

Řešení. Máme tedy dokázat, že $\frac{2^{11}}{3^7} \cdot \frac{2^{11}}{3^7} = \frac{8}{9}$ neplatí. Předpokládejme, že daná rovnost platí, a proveďme na ni ekvivalentní úpravy.

$$\begin{aligned} \frac{2^{11}}{3^7} \cdot \frac{2^{11}}{3^7} &= \frac{8}{9} \\ \frac{2^{22}}{3^{14}} &= \frac{2^3}{3^2} && / \cdot \frac{3^{14}}{2^{22}} \\ 1 &= \frac{2^3}{3^2} \cdot \frac{3^{14}}{2^{22}} \\ 1 &= \frac{3^{12}}{2^{19}} \end{aligned}$$

Ze stejných důvodů jako v příkladu 4 tato rovnost neplatí.

Ovšem pokud sečteme malý a velký pythagorejský půltón, dostaneme žádaný pythagorejský celý tón:

$$\frac{3^5}{2^8} \cdot \frac{2^{11}}{3^7} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9} \text{ [7, s. 20]},$$

na což můžeme přijít i bez znalosti poměru velkého pythagorejského půltónu.

Příklad 8. *Zamyslete se a následně matematickým výpočtem ukažte, jak lze bez předchozí znalosti velkého pythagorejského půltónů dojít k tomu, že součet malého a velkého pythagorejského půltónů nám dá celý tón.*

Řešení. Zeptáme se, jakým číslem (poměrem) x musíme malý pythagorejský tón vynásobit, abychom dostali pythagorejský celý tón. Matematicky:

$$\frac{3^5}{2^8} \cdot x = \frac{8}{9}.$$

Vypočítáme, že $x = \frac{2^{11}}{3^7}$, což je náš velký pythagorejský půltón.

Rozdíl mezi malým a velkým pythagorejským tónem

$$\frac{3^5}{2^8} \div \frac{2^{11}}{3^7} = \frac{3^5}{2^8} \cdot \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^{12}}{2^{19}},$$

se nazývá **pythagorejské komma** [7, s. 20].

Jinými slovy, pythagorejský systém ladění je založen na tom, že

$$2^{19} \approx 3^{12}, \text{ neboli } 524\,288 \approx 531\,441.$$

V podílu[12]

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}013\,643\,264\,770\,507\,812\,5,$$

což je o něco více než jedna devítina celého tónu. Protože práce s hudebními intervaly je analogická počítání s logaritmy, tak dělení celého tónu na devět částí odpovídá deváté odmocnině příslušného poměru (viz podkapitola 5.2) [4, s. 155].

Poznámka. Znak $\approx$ budeme používat pouze ve smyslu číslo x aproximuje číslo y. Pokud budeme nějaká čísla zaokrouhlovat, použijeme znak $\doteq$.

[12]Číslo $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ má konečný desetinný rozvoj, jelikož se ve jmenovateli vyskytuje mocnina čísla 2, proto je jeho desetinný rozvoj uveden zcela přesně (viz kapitola 1 na s. 11).

Na pythagorejské komma však narazíme i na jiných místech, v jiných problémech, tohoto systému. Kupříkladu si můžeme všimnout, že pokud poskládáme od jednoho tónu c nad sebe dvanáct kvint a od toho samého tónu sedm oktáv, měli bychom dospět ke stejnému tónu[13]. To ale není pravda, což můžeme vidět níže.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{12} \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$$
$$\frac{2^{12}}{3^{12}} \neq \frac{1}{2^{7}}$$
$$2^{19} \neq 3^{12}$$

Opět jsme tedy narazili na pythagorejské komma. Obdobně to neplatí ani pro dvanáct kvart a pět oktáv [4, s. 155].

Příklad 9. *Dokažte, že pokud poskládáme od jednoho tónu nad sebe dvanáct kvart a od toho samého tónu pět oktáv, nedostaneme stejný tón.*

Řešení. Máme dokázat, že neplatí $\left(\frac{3}{4}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$. Pro spor budeme předpokládat, že uvedená rovnost platí a provedeme ekvivalentní úpravy.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$
$$\frac{3^{12}}{2^{24}} = \frac{1}{2^{5}}$$
$$3^{12} = 2^{19}$$

Ze stejných důvodů jako v příkladu 4 tato rovnost neplatí.

[13] U kvint s enharmonickou záměnou $h\sharp$ za c.

3.3 Úvod ke konstrukci přirozeného ladění

Výše jsme si odvodili všech dvanáct tónů stupnice směrem nahoru a vznikly nám tóny s křížky (posuvka pro zvýšení tónu). Analogicky se dá odvodit pythagorejský systém sestupnými kvintovými kroky, kdy dostaneme tóny s béčky (posuvka pro snížení tónu) [7, s. 20–21].

Příklad 10. *Zjistěte, jaké tóny nám vzniknou sestupnými kvintovými kroky, a spočítejte jejich poměry.*

Řešení. Poměry vypočítáme analogicky jako v příkladu 3 a 5 s tím rozdílem, že budeme odčítat kvinty (dělit) a přičítat oktávy (násobit). Výsledek ukazuje následující tabulka.

tón	c	des	$eses$	es	fes	f
poměr	$1:1$	$2^8:3^5$	$2^{16}:3^{10}$	$2^5:3^3$	$2^{13}:3^8$	$4:3$
tón	ges	$asas$	as	$heses$	b	ces
poměr	$2^{10}:3^6$	$2^{18}:3^{11}$	$2^7:3^4$	$2^{15}:3^9$	$2^4:3^2$	$2^{12}:3^7$

Tabulka 5: Tóny pythagorejského ladění tvořené kvintovými kroky sestupně

Vidíme, že jsme dostali jiné poměry než vzestupnými kvintovými kroky, za což opět může pythagorejské komma. Zajímavostí je zde zmenšená kvarta ($c - fes$):

$$\frac{3^8}{2^{13}} = 0{,}800\,903\,320\,312\,5,$$

což je enharmonickou záměnou velká tercie ($c - e$) [7, s. 21].

Příklad 11. *Zjistěte, kterému zlomku tvořeného malými přirozenými čísly se podobá výše uvedený zlomek* $\left(\frac{3^8}{2^{13}}\right)$.

Řešení. Zlomek $\frac{3^8}{2^{13}}$ se nápadně – s velkou přesností – shoduje se zlomkem $\frac{4}{5} = 0{,}8$ (chyba je menší než jedna tisícina) [7, s. 21].

Tento fakt nás povede k zavedení velké tercie jako zkrácení struny o pětinu, což využijeme v následující kapitole o přirozeném ladění.

4 Přirozené ladění

James Murray Barbour píše ve své knize *Tuning and Temperament, A Historical Survey* [6, s. 15–24] o několika dalších laděních, která se vyskytovala v starověkém Řecku. Pro vývoj hudby však byla důležitá hlavně dvě z Ptolemaiových diatonických ladění – Ditoniaion a Syntonon. První z nich je shodné s pythagorejským a druhé, nazývané přirozené, mělo svůj význam v harmonii[14]. Pro hudební praxi bylo důležité, aby vybudovaná stupnice obsahovala nejen kvintu, ale i přirozenou tercii (poměr 5 : 4), protože právě taková stupnice by byla pro harmonii velmi vhodná, což si ukážeme v následující podkapitole.

4.1 Konstrukce durové stupnice

Na konci předchozí kapitoly jsme došli k tomu, že velká tercie by se dala zavést poměrem 5 : 4, což využijeme v budování přirozeného ladění[15]. Jelikož kvarta, kvinta i oktáva znějí libozvučně, zachováme je jako základ našeho nového ladění. Máme tedy:

interval	prima	velká tercie	kvarta	kvinta	oktáva
tón	c^1	e^1	f^1	g^1	c^2
poměr	1 : 1	5 : 4	4 : 3	3 : 2	2 : 1

Tabulka 6: Základní intervaly v přirozeném ladění

Příklad 12. *Zopakujte si vytvoření sekundy z pythagorejského ladění.*

Řešení. Sekundu dostaneme jako dva vzestupné kvintové kroky a jeden sestupný krok oktávový (viz obrázek 8 na s. 22). Matematicky:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \div \frac{1}{2} = \frac{4}{9} \cdot 2 = \frac{8}{9}.$$

Toto je naše velká sekunda.

[14]**Harmonii** určuje stavba a úprava akordů a jejich uplatnění v hudebních dílech [3, s. 152]. **Akordem** nazýváme souzvuk nejméně tří tónů různé výšky [3, s. 96].

[15]**Syntonickým kommatem** o poměru 81 : 80 je nazýván rozdíl velké pythagorejské tercie 81 : 64 a velké přirozené tercie 5 : 4.

Odvození 5. Velká sexta a velká septima v přirozeném ladění

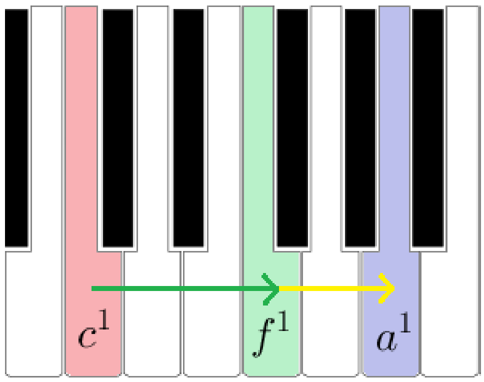
Příklad 13. *Vytvořte velkou sextu a velkou septimu za pomoci přirozené tercie.*

Řešení.

- Velkou sextu můžeme vytvořit dvěma způsoby, buďto jako přičtení kvarty a tercie[16] nebo jako odečtení tercie a následně přičtení oktávy. Druhý způsob však není správný, nesmíme zapomenout na to, že naše tercie je velká. Tedy bychom dostali tón $a\flat$, který však do durové stupnice nepatří. Využijeme tedy první způsob (viz obrázek 11):

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5},$$

což je hledaná velká sexta.



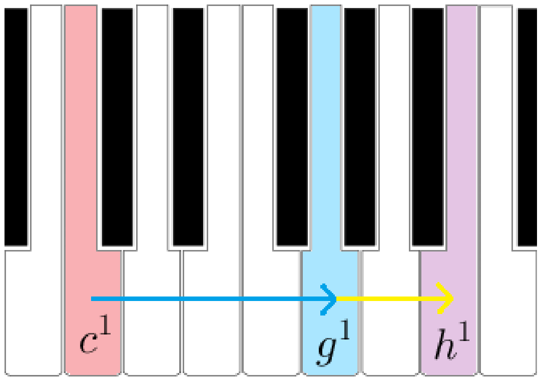
Obrázek 11: Velká sexta v přirozeném ladění

- Při vytváření velké septimy budeme postupovat podobně. Jelikož už víme, že odečíst od základního tónu tercii nám dá tón nenáležící hledané stupnici, tak máme pouze jednu možnost – sečíst kvintu a tercii (viz obrázek 12):

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}.$$

Výsledek udává poměr velké septimy [7, s. 22–23].

[16] Můžeme také uvažovat přičtení nejdříve tercie a pak kvarty, což je však to samé, neboť sčítání intervalů (t.j. násobení jejich poměrů) je komutativní.



Obrázek 12: Velká septima v přirozeném ladění

Nyní máme celou diatonickou durovou stupnici. Pro přehled ji uvádíme celou v tabulce 7 níže.

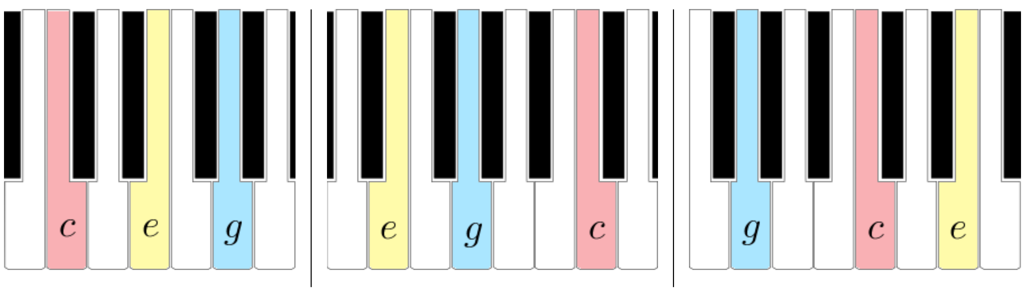
interval	č. 1	v. 2	v. 3	č. 4	č. 5	v. 6	v. 7	č. 8
tón	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
poměr	1 : 1	9 : 8	5 : 4	4 : 3	3 : 2	5 : 3	15 : 8	2 : 1

Tabulka 7: Poměry frekvencí intervalů durové stupnice v přirozeném ladění

Odvození 6. Malá tercie v přirozeném ladění

Výhodou takto vybudované stupnice je využitelnost v harmonii. Základem harmonie je totiž durový kvintakord[17], který takto vytvořená stupnice obsahuje po řadě na prvním, čtvrtém a pátém stupni – v hudební teorii označované po řadě jako

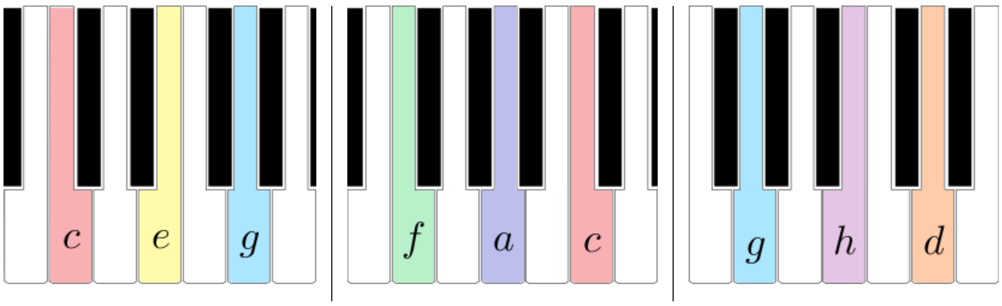
[17]**Kvintakordy** jsou základní druhy akordů tvořené dvěma nad sebou postavenými terciemi. U kvintakordu rozlišujeme dva druhy obratů: sextakord (spodní tón kvintakordu se přeloží o oktávu výš) a kvartsextakord (spodní tón sextakordu se přeloží o oktávu výš) [3, s. 99].



Tabulka 8: Zleva kvintakord, sextakord a kvartsextakord C dur

tónika, subdominanta a dominanta. Ladění je vybudované na myšlence, že poměry intervalů mají být tvořené malými přirozenými čísly. Takový přístup, který jako první popsal Aristoxenos z Tarentu (okolo 360–300 př. Kr.), však s rozvojem hudebních nástrojů neobstál. Jakmile jsme totiž chtěli nějakou melodii transponovat[18] do jiné tóniny, narazili jsme na problém, že dané intervalové poměry se nezachovávají, což si ale ukážeme později [7, s. 21–22].

Na hlavních funkcích[19] (tónice, subdominantě a dominantě) nám tedy vznikly durové kvintakordy (viz tabulka 9), které mají vždy stejný poměr mezi sousedními tóny v daném akordu.



Tabulka 9: Zleva kvintakordy C dur, F dur a G dur

Příklad 14. *Ověřte výpočtem, že na hlavních funkcích jsou durové kvintakordy.*

Řešení.

Kvintakord C dur tvořen tóny c^1, e^1, g^1 s poměry po řadě $1:1$, $5:4$, $3:2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1}\cdot k &= \frac{4}{5} &&\implies k = \frac{4}{5},\\ \frac{4}{5}\cdot l &= \frac{2}{3} &&\implies l = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Kvintakord F dur skládající se z tónů f^1, a^1, c^2 s poměry po řadě $4:3$, $5:3$, $2:1$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\cdot m &= \frac{3}{5} &&\implies m = \frac{4}{5},\\ \frac{3}{5}\cdot n &= \frac{1}{2} &&\implies n = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

[18]**Transponováním melodie** rozumíme posunutí melodie o nějaký interval výš nebo níž.

[19]**Harmonické funkce** jsou jednotlivé stupně stupnice, kde první tón stupnice označujeme jako první stupeň, druhý tóny jako druhý stupeň, …, sedmý tón jako sedmý stupeň. Rozlišujeme tři hlavní funkce: tóniku jako první stupeň, subdominantu jako čtvrtý a dominantu jako pátý stupeň [3, s. 152–153].

Kvintakord G dur obsahující tóny g^1, h^1, d^2 s poměry po řadě 3 : 2, 15 : 8, 9 : 4.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot o &= \frac{8}{15} & &\implies o = \frac{4}{5}, \\ \frac{8}{15} \cdot p &= \frac{4}{9} & &\implies p = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Vidíme, že $k = m = o$ a zároveň $l = n = p$, akordy tedy budou znít stejně až na výšku. Získali jsme ale nový poměr 6 : 5, který byl vždy mezi druhým a třetím tónem akordu. Tento poměr nám bude zřejmě udávat nový interval [7, s. 23].

Příklad 15. *Určete, mezi jakými dvěma intervaly se bude interval o poměru* 6 : 5 *nacházet.*

Řešení. Interval o poměru frekvencí 6 : 5 budeme shora a zdola postupně odhadovat jinými poměry, abychom zjistily, kde se náš interval nachází. Hledaný interval bude někde mezi primou a oktávou, protože

$$\frac{1}{1} > \frac{5}{6} > \frac{1}{2},$$
$$\frac{6}{6} > \frac{5}{6} > \frac{3}{6}.$$

Odhadneme shora velkou sekundou:

$$\frac{8}{9} > \frac{5}{6} \implies \frac{16}{18} > \frac{15}{18}.$$

Velká sekunda je tedy určitě níže než námi hledaný interval. Pokusíme se opět odhadnout shora tentokrát velkou tercií:

$$\frac{4}{5} > \frac{5}{6} \implies \frac{24}{30} > \frac{25}{30},$$

což není pravda – velká tercie nebude odhad shora nýbrž zdola. Interval o poměru 6 : 5 se bude tedy nacházet mezi velkou sekundou a velkou tercií:

$$\frac{8}{9} > \frac{5}{6} > \frac{4}{5},$$
$$\frac{80}{90} > \frac{75}{90} > \frac{72}{90}.$$

Tento interval nazveme **malá přirozená tercie**. Pomocí velké tercie jsme sestavili durovou stupnici, analogicky můžeme pomocí malé tercie vybudovat diatonickou stupnici moll [7, s. 23].

4.2 Konstrukce mollové stupnice a problém transponování

V diatonické stupnici moll se vyskytují intervaly malá sexta a malá septima, proto si je nyní zkonstruujeme. Následně si ukážeme problém transponování v přirozeném ladění.

Odvození 7. Malá sexta a malá septima v přirozeném ladění.

Příklad 16. *Určete poměry intervalů malé sexty a malé septimy diatonické stupnice moll.*

Řešení.

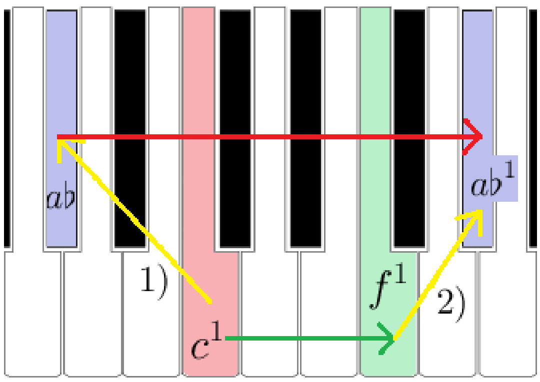
- Malá sexta může vzniknout dvěma způsoby (viz obrázek 13):

  1) odečtením velké tercie a přičtením oktávy

  $$1 \div \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8};$$

  2) přičtením kvarty a malé tercie

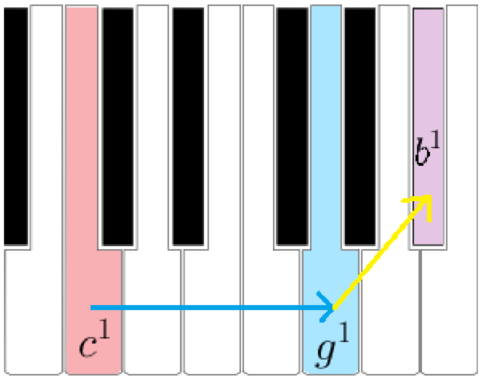
  $$\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8}.$$



Obrázek 13: Malá sexta v přirozeném ladění

- Malá septima může vzniknout pouze jedním způsobem (za pomoci tercie) – přičtením kvinty a malé tercie (viz obrázek 14):

  $$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{9}.$$



Obrázek 14: Malá septima v přirozeném ladění

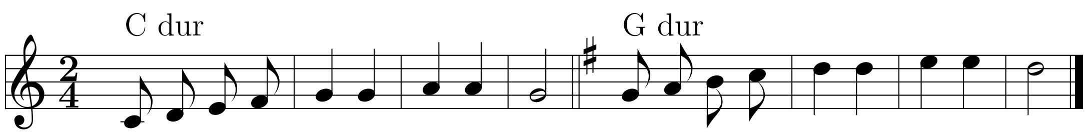
Diatonickou stupnici moll shrnuje tabulka 10.

interval	č. 1	v. 2	m. 3	č. 4	č. 5	m. 6	m. 7	č. 8
tón	c^1	d^1	$e\flat^1$	f^1	g^1	$a\flat^1$	b^1	c^2
poměr	1 : 1	9 : 8	6 : 5	4 : 3	3 : 2	8 : 5	9 : 5	2 : 1

Tabulka 10: Poměry frekvencí intervalů mollové stupnice v přirozeném ladění

Už výše jsme zmínili, že v přirozeném ladění narážíme ale na problém při transponování melodie. Každá tónina zní totiž trochu jinak a některé nejsou vůbec poslouchatelné [7, s. 24]. Ukážeme si to na následujícím příkladu.

Mějme úryvek písně *Kočka leze dírou* (viz obrázek 15) v C dur ($c^1 - d^1 - e^1 - f^1 - g^1 - g^1 - a^1 - a^1 - g^1$). Melodii transponujeme do G dur (o kvintu výše): $g^1 - a^1 - h^1 - c^2 - d^2 - d^2 - e^2 - e^2 - d^2$. Melodie by měla znít stejně, ale nezní, protože poměry mezi tóny písně v G dur nejsou stejné jako v C dur, jelikož původní poměry tónů se zachovávají (jinak by transponování nemělo smysl). Matematicky uvádíme v tabulce 11.



Obrázek 15: Úryvek písně *Kočka leze dírou* v C dur a G dur

C dur		G dur	
$c^1 - d^1$	$\frac{8}{9} \div \frac{1}{1} = \mathbf{\frac{8}{9}}$	$g^1 - a^1$	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{9}{10}}$
$d^1 - e^1$	$\frac{4}{5} \div \frac{8}{9} = \mathbf{\frac{9}{10}}$	$a^1 - h^1$	$\frac{8}{15} \div \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{8}{9}}$
$e^1 - f^1$	$\frac{3}{4} \div \frac{4}{5} = \mathbf{\frac{15}{16}}$	$h^1 - c^2$	$\frac{1}{2} \div \frac{8}{15} = \mathbf{\frac{15}{16}}$
$f^1 - g^1$	$\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{8}{9}}$	$c^2 - d^2$	$\left(\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{8}{9}}$
$g^1 - a^1$	$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{9}{10}}$	$d^2 - e^2$	$\left(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2}\right) = \mathbf{\frac{9}{10}}$

Tabulka 11: Poměry mezi jednotlivými tóny úryvku písně *Kočka leze dírou*

Vidíme, že v některých poměrech tónů se tóniny shodují, je to však proto, že jsou si navzájem příbuzné, ale neshodují se ve všech. První dva kroky písně proto budou znít trošku odlišně. Čím více bychom se tóninově vzdalovali od C dur – do tónin s mnoha předznamenáními – tím více by se melodie zvukově měnila. Proto přirozené ladění není pro transponování vhodné a v historii se hledalo, jak tento problém vyřešit. Nakonec se vynalezlo rovnoměrně temperované ladění, které tento problém řeší a jehož konstrukcí se zabývá následující kapitola.

5 Rovnoměrně temperované ladění

Na konci předchozí kapitoly jsme si ukázali, že přirozené ladění není pro harmonii vhodné. Popišme si, jak se harmonické myšlení vyvíjelo v dějinách.

O harmonickém obsahu hudby starověku je známo jen poměrně málo informací. Například z hudby starověkého Řecka se dochovalo pouze pár malých ve většině pouze melodických fragmentů [4, s. 194].

V jednoduché formě se harmonie jako první objevila v liturgické hudbě okolo roku 800 po Kristu ve formě paralelního organa (melodie v paralelních kvartách nebo kvintách). Durové tercie nebyly považovány za konsonantní, a tak pythagorejský systém s kvartami a kvintami fungoval pro takovou hudbu velmi dobře [4, s. 194].

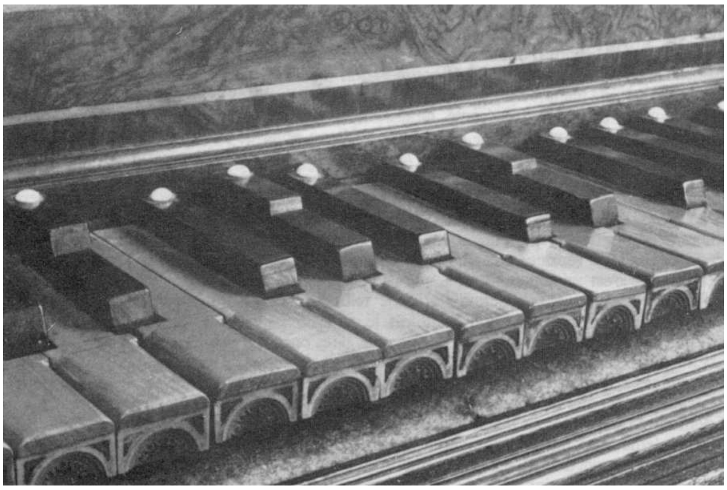
Kolem jedenáctého století se začala objevovat polyfonie. Avšak za konsonantní intervaly se považovaly stále kvarty, kvinty a oktávy. Proto se pythagorejská stupnice pořád hojně využívala. Tercie se ani v té době nepovažovaly za konsonantní, jen občas se používaly k přechodům mezi tóny [4, s. 194].

První zmínky o považování velké tercie (poměr $5 : 4$) za konsonantní interval pochází z Anglie z dvanáctého a třináctého století. Britská lidová hudba čtrnáctého a patnáctého století vynalezla harmonizování melodie přidáním velké tercie pod a kvarty nad melodickou linku. Tak vznikla melodie v paralelních sextakordech. Na počátku patnáctého století se konsonantní tercie dostala z Anglie na evropský kontinent. Když se ale ve Francii snažili napodobit zvuk paralelních sextakordů, tak použili pro hlavní melodii místo prostřední linky vrchní, a tak vznikl tzv. *Faux Bourdon* [4, s. 194].

Od poloviny do konce patnáctého století, zvláště v Itálii, dosahovalo mnoho aspektů umění nové úrovně technické a matematické přesnosti. V této době se v hudbě vynalezlo středotónové ladění využívající durových a mollových trojzvuků ve velké škále tónin a harmonické progrese s modulacemi[20], které dříve nebyly možné [4, s. 195]. O konstrukci středotónového ladění se můžete dočíst v podkapitole 6.1 na s. 67.

[20]**Modulace** je přechod z jedné tóniny do druhé za použití speciálních pravidel.

Mnoho klávesových nástrojů mělo od šestnáctého století rozdělené klávesy pro $G\sharp/A\flat$ a nebo $D\sharp/E\flat$ kvůli rozšíření použitelných tónin. Toho se dosáhlo rozdvojením klávesy uprostřed, kde zadní část byla vyšší než přední, což můžeme vidět na obrázku 16 [4, s. 195].



Obrázek 16: Varhany Malamini v San Petronio, Bologna, Itálie [4, s. 195]

Středotónové ladění přetrvávalo během historie dlouho. Až dodnes je běžné, že varhany se ladí ve čtvrt-středotónovém ladění. Hudební praxí šestnáctého a sedmnáctého století bylo vybrat si tonální střed a postupně se od něj vzdalovat. Nejvzdálenější tóniny se ale zřídka používali, protože než se k nim dostalo, modulovalo se zpátky do tonálního centra [4, s. 195].

Prvním, kdo se zasazoval o rovnoměrně temperované ladění pro klávesové nástroje, byl Jean Philippe Rameau (1683–1764). To mu pomohlo v získání popularity, protože až do počátku devatenáctého století bylo toto ladění alespoň v teorii hojně používáno. Nicméně mnoho klavírních skladeb Ludwiga van Beethovena (1770 až 1827) zní nejlépe v ladění nerovnoměrném a ani Fryderyk Chopin (1810–1849) nebyl ochotný v některých tóninách psát – např. charakteristika[21] tóniny D moll mu neseděla. Ve skutečnosti nebylo rovnoměrně temperované ladění plně využíváno až do konce devatenáctého století. Ladění pian v devatenáctém století často zahrnovalo mírnou odchylku od rovnoměrně temperovaného ladění, aby byla alespoň do určité míry zachována individuální charakteristika jednotlivých tónin. Ve dvacátém

[21] To, jak tónina zní.

století se projevila dominance chromatiky[22] a nástup dvanáctitónové hudby. Ty si do značné míry vynutily upuštění od nerovnoměrného ladění a ladění pian tento fakt přijalo a reflektovalo [4, s. 197].

Během dějin vznikalo mnoho různých ladění, které měly své výhody a nevýhody. Jednou z hlavních nevýhod bylo, že takové systémy byly budovány zvláště pro jednu stupnici (rozumíme např. C dur, A dur) a při transponování byly prakticky nepoužitelné, což byl problém vzhledem k tomu, že skladby byly čím dál tím víc bohaté na harmonii. Rovnoměrně temperované ladění bylo tedy výsledkem mnoha kompromisů [4, s. 197]. Ukázky konstrukce dalších ladění najdeme v kapitole 6.

5.1 Konstrukce

V předchozí podkapitole jsme se dozvěděli, že rovnoměrně temperované ladění se stalo kompromisem, aby ladění bylo prakticky použitelné pro harmonii (zvláště pro modulace) a zároveň aby si zachovalo svoji libozvučnost. Takové ladění dělí oktávu na dvanáct stejných půltónů. Proč zrovna na dvanáct se dozvíme v podkapitole 5.3 o řetězových zlomcích.

Poznámka. Pro jednoduchost nebudeme v této kapitole počítat s poměry délek struny, ale s poměry frekvencí, které jsou převrácenou hodnotou poměrů délek struny. A tedy i vyjádření zlomkem $\frac{x}{y}$ bude značit poměr frekvencí daných intervalů.

Příklad 17. *Určete, jak velký musí být půltón, aby se jich do oktávy vešlo právě dvanáct.*

Řešení. Víme, že oktávu dostaneme na struně, když ji zkrátíme o polovinu, tedy bude mít dvakrát větší frekvenci. Jelikož sčítání intervalů odpovídá v matematice násobení poměrů, dojdeme ke vztahu

$$x^{12} = 2,$$

kde x je hledaný půltón. Jelikož poměr frekvencí může být pouze kladné reálné číslo, získáme výsledek $x = \sqrt[12]{2}$ [7, s. 24–25].

[22] **Chromatická stupnice** se skládá z dvanácti půltónových kroků v jedné oktávě [3, s. 77].

Čili jednotlivé frekvence intervalu o n půltónech dostaneme vynásobením základního tónu

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^n ; n \in \{0, \dots 12\}, n \in \mathbb{N} \text{ [7, s. 25].}$$

Příklad 18. *Jakým matematickým pojmem můžeme tuto „frontu“ popsat?*

Řešení. Geometrická posloupnost $a_n = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n ; n \in \{0, \dots 12\}, n \in \mathbb{N}$ s kvocientem $q = \sqrt[12]{2}$ [7, s. 25].

Zjistili jsme, že poměr frekvencí půltónu v oktávě je $\sqrt[12]{2}$. Co to ale prakticky znamená pro půltóny? Významem takto vybudovaného systému je možnost enharmonické záměny, tedy např. pokud zvýším tón g na $g\sharp$, tak toto $g\sharp$ bude znít stejně jako snížený tón a (tedy na $a\flat$). Tento fakt je obrovská výhoda oproti laděním, které jsme zkoumali dříve. Melodie můžeme totiž libovolně transponovat a dále modulovat do jiných tónin bez toho, aby nám dané tóny změnily výšku.

Nyní si ladění vybudujeme matematicky.

Příklad 19. *Zjistěte poměry frekvencí jednotlivých tónů v rovnoměrně temperovaném ladění. Použijte poměr frekvencí půltónu z příkladu 17.*

Řešení. Postupně zjistíme poměry frekvencí všech půltónů v oktávě tak, že každý půltón získáme jako předchozí půltón vynásobený $\sqrt[12]{2}$.

- c^1:

$$1 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^0 = 1,$$

- $c\sharp^1$:

$$1 \cdot \sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{2},$$

- d^1:

$$\sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = 2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2},$$

- $d\sharp^1$:

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2},$$

- e^1:

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^3 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2},$$

- f^1:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = 2^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{2^5},$$

- $f\sharp^1$:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^6 = 2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2},$$

- g^1:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^6 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 = 2^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{2^7},$$

- $g\sharp^1$:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^8 = 2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2},$$

- a^1:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^8 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^9 = 2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3},$$

- $a\sharp^1$:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^9 \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{10} = 2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5},$$

- h^1:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{10} \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{11} = 2^{\frac{11}{12}} = \sqrt[12]{2^{11}},$$

- c^2:
$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^{11} \cdot \sqrt[12]{2} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2^{\frac{12}{12}} = 2.$$

Pro přehlednost uvádíme výsledné poměry v tabulce 12 níže.

tón	c^1	$c\sharp^1$	d^1	$d\sharp^1$	e^1	f^1	$f\sharp^1$
poměr	$1:1$	$\sqrt[12]{2}:1$	$\sqrt[6]{2}:1$	$\sqrt[4]{2}:1$	$\sqrt[3]{2}:1$	$\sqrt[12]{2^5}:1$	$\sqrt{2}:1$
tón	g^1	$g\sharp^1$	a^1	$a\sharp^1$	h^1	c^2	
poměr	$\sqrt[12]{2^7}:1$	$\sqrt[3]{2^2}:1$	$\sqrt[4]{2^3}:1$	$\sqrt[6]{2^5}:1$	$\sqrt[12]{2^{11}}:1$	$2:1$	

Tabulka 12: Poměry frekvencí tónů v rovnoměrně temperovaném ladění

Můžeme si všimnout, že jsme u tónu $f\sharp$ došli k poměru $\sqrt{2}$, o kterém jsme psali už dříve v kapitole 3 o pythagorejském ladění. Když jsme totiž používali poměry délek struny, došli jsme k analogickému výsledku $\sqrt{\frac{1}{2}}$ pomocí geometrického průměru primy a oktávy. Interval $c - f\sharp$ (popř. enharmonickou záměnou $c - g\flat$), označovaný jako *tritón*, je přesným středem oktávy. Ve středověku byl tento interval označován jako „ďábelský“ kvůli tomu, že zní velmi nelibě, je disonantní.

Každé dva tóny tedy mají mezi sebou rozdíl dvanácté odmocniny ze dvou. Tato soustava bude však prakticky použitelná jen tehdy, když budou poměry v rovnoměrně temperovaném ladění přibližně souhlasit s poměry přirozeného (popř. pythagorejského) ladění [7, s. 25].

Příklad 20. *Určete za pomoci kalkulačky odchylku rovnoměrně temperovaného (RTL) od přirozeného ladění (PŘIL). Výsledky zaokrouhlete na šest desetinných míst.*

Řešení. Výsledky uvádíme v tabulce 13 níže.

tón	**PŘIL**		**RTL**		**RTL – PŘIL**
c^1	1/1	1,000 000	1/1	1,000 000	+0,000 000
$c\sharp^1$			$\sqrt[12]{2}/1$	1,059 463	
d^1	9/8	1,125 000	$\sqrt[6]{2}/1$	1,122 462	−0,002 538
$e\flat^1$	6/5	1,200 000	$\sqrt[4]{2}/1$	1,189 207	−0,010 793
e^1	5/4	1,250 000	$\sqrt[3]{2}/1$	1,259 921	+0,009 921
f^1	4/3	$1,\overline{333\,333}$	$\sqrt[12]{2^5}/1$	1,334 839	+0,001 839
$f\sharp^1$			$\sqrt{2}/1$	1,414 213	
g^1	3/2	1,500 000	$\sqrt[12]{2^7}/1$	1,498 307	−0,001 693
$a\flat^1$	8/5	1,600 000	$\sqrt[3]{2^2}/1$	1,587 401	−0,012 599
a^1	5/3	$1,\overline{666\,666}$	$\sqrt[4]{2^3}/1$	1,681 792	+0,015 792
b^1	9/5	1,800 000	$\sqrt[6]{2^5}/1$	1,781 797	−0,018 203
h^1	15/8	1,875 000	$\sqrt[12]{2^{11}}/1$	1,887 748	+0,012 748
c^2	2/1	2,000 000	2/1	2,000 000	+0,000 000

Tabulka 13: Rozdíly poměrů tónů přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění [7, upraveno dle s. 25, Tab. 1]

Vidíme, že rovnoměrně temperovaného ladění se od ladění přirozeného liší nejvíce v řádu setin, což tedy ve výsledku vadit nebude, protože odchylka je velmi malá.

Pro hudební praxi je kromě poměrové vzdálenosti mezi tóny důležité znát i frekvence daných tónů – jejich absolutní výšky.

Příklad 21. *Zamyslete se nad tím, jak by se dala zjistit frekvence jednotlivých tónů.*

Řešení. Abychom mohli frekvence (výšky) jednotlivých tónů zjistit, potřebovali bychom znát alespoň hodnotu jednoho tónu. Nyní se v hudební praxi používá tón a^1 o frekvenci 440 Hz, tzv. komorní a.

V historii však frekvence komorního a nebyla jednotná. Například v době, kdy žil Wolfgang Amadeus Mozart (1756–1791), se frekvence a^1 blížila k 422 Hz, což je o trochu výše než náš dnešní půltón pod komorním a. Ještě předtím v baroku se lišily i výšky v jednotlivých městech, kde se hudba provozovala, až o cca ± 50 Hz. Naše komorní a^1 bylo poprvé zavedeno ve Spojených státech amerických v roce 1925. Následně se v květnu 1939 na mezinárodní konferenci v Londýně rozhodlo, že frekvence 440 Hz bude používána pro dnešní moderní ladění [7, s. 26].

Příklad 22. *Spočtěte frekvence tónů $c^1, \ldots, c^2$ za pomoci $a^1 = 440$ Hz.*

Řešení. Jednotlivé tóny budeme násobit hodnotou $\left(\sqrt[12]{2}\right)^n$, kde n je počet půltónů, o které se hledaný tón liší od a^1. Hodnotu $\sqrt[12]{2}$ použijeme z příkladu 33.

- $f\left(c^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-9} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-9} = 440 \cdot \frac{1\,379^9}{1\,461^9} \doteq 261{,}625$ Hz,
- $f\left(c\sharp^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-8} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-8} = 440 \cdot \frac{1\,379^8}{1\,461^8} \doteq 277{,}182$ Hz,
- $f\left(d^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-7} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-7} = 440 \cdot \frac{1\,379^7}{1\,461^7} \doteq 293{,}664$ Hz,
- $f\left(d\sharp^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-6} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-6} = 440 \cdot \frac{1\,379^6}{1\,461^6} \doteq 311{,}126$ Hz,
- $f\left(e^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-5} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-5} = 440 \cdot \frac{1\,379^5}{1\,461^5} \doteq 329{,}627$ Hz,
- $f\left(f^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-4} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-4} = 440 \cdot \frac{1\,379^4}{1\,461^4} \doteq 349{,}228$ Hz,
- $f\left(f\sharp^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-3} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-3} = 440 \cdot \frac{1\,379^3}{1\,461^3} \doteq 369{,}994$ Hz,
- $f\left(g^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-2} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-2} = 440 \cdot \frac{1\,379^2}{1\,461^2} \doteq 391{,}995$ Hz,

- $f\left(g\sharp^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{-1} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{-1} = 440 \cdot \frac{1\,379}{1\,461} \doteq 415{,}305$ Hz,
- $f\left(a^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{0} = 440{,}000$ Hz,
- $f\left(a\sharp^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{1} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{1} = 440 \cdot \frac{1\,461}{1\,379} \doteq 466{,}164$ Hz,
- $f\left(h^1\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{2} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{2} = 440 \cdot \frac{1\,461^2}{1\,379^2} \doteq 493{,}884$ Hz,
- $f\left(c^2\right) = 440 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{3} \approx 440 \cdot \left(\frac{1\,461}{1\,379}\right)^{3} = 440 \cdot \frac{1\,461^3}{1\,379^3} \doteq 523{,}252$ Hz.

V příloze A jsou popsané soubory s nahrávkami tónů a *Preludia C Dur* skladatele J. S. Bacha porovnávající pythagorejské, přirozené a rovnoměrně temperované ladění v hertzech.

5.2 Centy

Jak jsme si ukázali dříve, sčítání intervalů odpovídá násobení poměru frekvencí (nebo převrácených poměrů délek struny). Tedy hudební vzdálenost mezi dvěma tóny je ve frekvenci logaritmická. Nyní si ukážeme systém měření poměrů intervalů v centech, který první představil okolo roku 1875 anglický matematik Alexander Ellis (1814–1890). Tento systém spočívá v tom, že uvažujeme logaritmickou stupnici takovou, ve které máme 1 200 centů v oktávě [4, s. 158].

Příklad 23. *Kolika centům odpovídá v rovnoměrně temperovaném ladění celý tón a kolika půltón? Hodnoty poměrů v centech spočítejte pro tóny durové stupnice. Výsledky uveďte v tabulce.*

Řešení. V rovnoměrně temperovaném ladění máme v oktávě dvanáct půltónů. Počet centů v půltónu je $\frac{1\,200}{12}$. Jeden půltón tedy odpovídá 100 centům a jeden celý tón 200 centům [4, s. 158].

Ostatní poměry vypočítáme tak, že vynásobíme počet centů v půltónu číslem označujícím pozici daného tónů v dvanáctitónové chromatické stupnici.

tón	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	h^1	c^2
poměr	$1/1$	$\sqrt[6]{2}/1$	$\sqrt[3]{2}/1$	$\sqrt[12]{2^5}/1$	$\sqrt[12]{2^7}/1$	$\sqrt[4]{2^3}/1$	$\sqrt[12]{2^{11}}/1$	$2/1$
centy	0	200	400	500	700	900	1 100	1 200

Tabulka 14: Poměry frekvencí intervalů rovnoměrně temperovaného ladění v centech

Pro převedení poměru frekvencí r na počet centů n používáme vztah

$$1\,200 \cdot \log_2 r = 1\,200 \cdot \frac{\ln r}{\ln 2} = n \text{ [4, s. 158].} \tag{13}$$

Příklad 24. *Určete vztah pro převedení intervalu o n centech na poměr frekvencí r?*

Řešení. Výše jsme pro převedení poměru frekvencí na centy používali logaritmickou funkci. Jelikož chceme udělat operaci „zpět“, budeme k tomu potřebovat funkci inverzní. Inverzní funkce k funkci logaritmické je funkce mocninná. Právě funkce inverzní totiž převádí hodnoty „tam a zpět“. Najdeme ji následovně:
Víme, že

$$1\,200 \cdot \log_2 r = n,$$

kde r je poměr frekvencí.
Upravíme na

$$\log_2 r = \frac{n}{1\,200}.$$

Převedeme na mocninnou funkci pomocí vzorce $\log_a c = b \iff a^b = c$. Dostaneme

$$2^{\frac{n}{1\,200}} = r.$$

Čili převedení intervalu o n centech na poměr frekvencí můžeme vyjádřit vztahem

$$2^{\frac{n}{1\,200}}/1 \text{ [4, s. 158].}$$

Když už víme, jak se poměry frekvencí přepočítávají na centy, můžeme si to zkusit u pythagorejského a přirozeného ladění.

Příklad 25. *Spočítejte hodnoty intervalů v centech u pythagorejského ladění. Použijte poměry frekvencí z kapitoly 3 na s. 18.*

Řešení. Například interval z c do d (velkou sekundu) reprezentuje poměr frekvencí 9 : 8. Dosadíme do vzorce a spočítáme:

$$1\,200 \cdot \log_2 \left(\frac{9}{8}\right) = 1\,200 \cdot \frac{\ln\left(\frac{9}{8}\right)}{\ln 2} \doteq 203{,}910 \text{ centů.}$$

Ostatní intervaly spočítáme analogicky. Výsledky ukazuje tabulka 15.

tón	c^1	d^1	e^1	f^1
poměr	1/1	9/8	81/64	4/3
centy	0,000	203,910	407,820	498,045
tón	g^1	a^1	h^1	c^2
poměr	3/2	27/16	243/128	2/1
centy	701,955	905,865	1 109,775	1 200,000

Tabulka 15: Poměry frekvencí intervalů pythagorejského ladění v centech [4, upraveno dle s. 158]

Příklad 26. *Spočítejte hodnoty intervalů v centech u přirozeného ladění. Použijte poměry frekvencí z kapitoly 4 na s. 33.*

Řešení. Počet centů u jednotlivých intervalů spočítáme analogicky jako v předchozím příkladu (viz Příklad 25). Výsledky ukazuje tabulka 16.

tón	c^1	d^1	e^1	f^1
poměr	1/1	9/8	5/4	4/3
centy	0,000	203,910	386,314	498,045
tón	g^1	a^1	h^1	c^2
poměr	3/2	5/3	15/8	2/1
centy	701,955	884,359	1 088,269	1 200,000

Tabulka 16: Poměry frekvencí intervalů přirozeného ladění v centech

Příklad 27. *Spočítejte, o kolik se v centech liší přirozené od rovnoměrně temperovaného ladění. Výsledky zaokrouhlete na tři desetinná místa.*

Řešení. Rozdíl poměrů v centech daného tónu spočítáme tak, že vezmeme hodnotu v rovnoměrně temperovaném ladění (RTL) z tabulky 14 a od ní odečteme hodnotu v přirozeném ladění (PŘIL), kterou najdeme v tabulce 16.

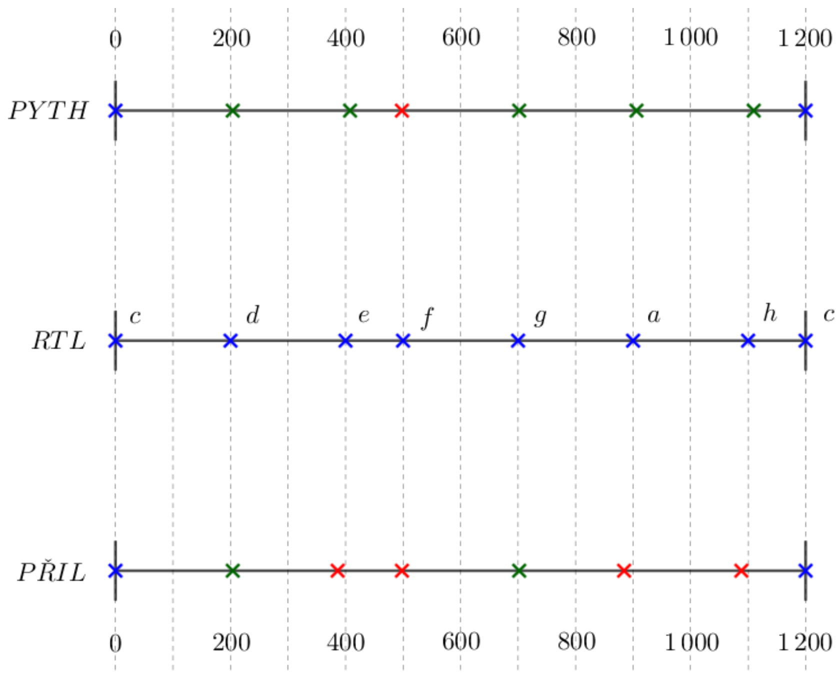
Výsledky ukazuje tabulka 17.

tón	**PŘIL**		**RTL**		**RTL – PŘIL**
	poměr	centy	poměr	centy	centy
c^1	$1/1$	0,000	$1/1$	0,000	+0,000
$c\sharp^1$			$\sqrt[12]{2}/1$	100,000	
d^1	$9/8$	203,910	$\sqrt[6]{2}/1$	200,000	−3,910
$e\flat^1$	$6/5$	315,641	$\sqrt[4]{2}/1$	300,000	−15,641
e^1	$5/4$	386,314	$\sqrt[3]{2}/1$	400,000	+13,686
f^1	$4/3$	498,045	$\sqrt[12]{2^5}/1$	500,000	+1,955
$f\sharp^1$			$\sqrt{2}/1$	600,000	
g^1	$3/2$	701,955	$\sqrt[12]{2^7}/1$	700,000	−1,955
$a\flat^1$	$8/5$	813,686	$\sqrt[3]{2^2}/1$	800,000	−13,686
a^1	$5/3$	884,359	$\sqrt[4]{2^3}/1$	900,000	+15,641
b^1	$9/5$	1 017,596	$\sqrt[6]{2^5}/1$	1 000,000	−17,596
h^1	$15/8$	1 088,269	$\sqrt[12]{2^{11}}/1$	1 100,000	+11,731
c^2	$2/1$	1 200,000	$2/1$	1 200,000	+0,000

Tabulka 17: Rozdíly poměrů tónů přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění v centech

Na obrázku 17 můžeme vidět porovnání pythagorejského (PYTH), přirozeného (PŘIL) a rovnoměrně temperovaného (RTL) ladění v centech. Modře jsou zobrazeny tóny o stejné hodnotě vzhledem k rovnoměrně temperovanému ladění, červeně tóny o hodnotě nižší a zeleně tóny o hodnotě vyšší.

Ve Francii se spíše než počítání s centy používá k měření poměrů intervalů jednotka savart, pojmenovaná po francouzském fyzikovi Félixi Savartovi (1791–1841).



Obrázek 17: Porovnání pythagorejského, přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění v centech

V tomto systému je poměr 10 : 1 vyjádřen hodnotou 1 000 savartů. Tedy poměr oktávy 2 : 1 je

$$1\,000 \cdot \log 2 \doteq 301{,}030 \text{ savartů.}$$

Jeden savart se dá vyjádřit poměrem $10^{\frac{1}{1000}} : 1$ a je roven

$$\frac{1\,200}{1\,000 \cdot \log 2} = \frac{6}{5 \cdot \log 2} \doteq 3{,}98631 \text{ centů [4, s. 158].}$$

Příklad 28. *Ověřte, že pythagorejské komma je rovno* 23,460 *centům. Kolik je to v savartech [4, s. 158]?*

Řešení. Pythagorejské komma je vyjádřeno poměrem $3^{12}/2^{19}$. Dosadíme do vzorce (13) a dostaneme

$$n = 1\,200 \cdot \log_2 \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right) \doteq 23{,}460 \text{ centů.}$$

Počet s savartů poměru frekvencí r je vyjádřen vzorcem

$$s = 1\,000 \cdot \log r.$$

Dosadíme do vzorce pythagorejské komma a vypočítáme:

$$s = 1\,000 \cdot \log \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right) \doteq 5{,}885 \text{ savartů.}$$

5.3 Řetězové zlomky

Následující podkapitola bude převážně zaměřena na to, jak se pomocí řetězových zlomků aproximují iracionální čísla, tedy ta čísla, která tvoří doplněk racionálních čísel do čísel reálných, jak jsme si už popsali v kapitole 1 na s. 11.

V této části budeme mluvit o tzv. dobrých aproximacích. Co je to dobrá aproximace daného čísla popisuje Vítězslav Kala v [9, s. 18] takto:

„*Buď* $\xi \in \mathbb{R}$. *Zlomek* $\frac{r}{s}$, *kde* $(r, s) = 1$ *a* $s > 0$, *je dobrá aproximace čísla* ξ,

pokud pro každé $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *kde* $1 \leq q < s$, *platí* $|r - s\xi| < |p - q\xi|$

a $|r - s\xi| \leq |p - q\xi|$ *platí pro všechna* $p \in \mathbb{Z}$.“

Takto formulovaná definice nám říká, že zlomek $\frac{r}{s}$ má nejmenší „relativní chybu“

$$\frac{\left|\frac{r}{s} - \xi\right|}{\frac{1}{s}} = |r - s\xi|\,,$$

tedy že se od daného čísla ξ skoro neliší [9, s. 18].

Dá se dokázat, že všechny konvergenty čísla $\xi > 0$ dávají dobré aproximace. Zde tento důkaz uvádět nebudeme, můžeme ho najít v [9, s. 18–19]. Co to jsou konvergenty nějakého čísla, si vysvětlíme později, až budeme mít zadefinované řetězové zlomky.

Dnešní rovnoměrně temperované ladění je založené na faktu, že

$$2^{\frac{7}{12}} \approx \frac{3}{2},$$

tedy že rovnoměrně temperovaná kvinta s poměrem $2^{\frac{7}{12}} : 1$ se přibližně rovná pythagorejské (a přirozené) kvintě s poměrem $3 : 2$, což můžeme přepsat na

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \approx \frac{7}{12} \text{ [4, s. 204].}$$

Že hodnota zlomku $\frac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$ je dobrá aproximace čísla

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \doteq 0{,}584\,962\,500\,7$$

si ukážeme v příkladu 37 na s. 60.

Tedy pokud rozdělíme oktávu na dvanáct stejných půltónů, tak sedmý z nich je dobrá aproximace kvinty. Tento fakt nás přivádí k otázce, jestli číslo $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ může být vyjádřeno zlomkem $\frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, tedy jestli je racionální [4, s. 204].

Příklad 29. *Rozhodněte, zda číslo* $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ *je racionální, nebo iracionální. Své tvrzení dokažte [4, upraveno dle s. 204].*

Řešení. Číslo $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ je vhodné si nejdříve upravit. Logaritmus upravíme na

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \log_2(3) - \log_2(2) = \log_2(3) - 1$$

a nyní nás zajímá pouze, jestli číslo $\log_2(3)$ je racionální.

Předpokládejme, že číslo $\log_2(3)$ je racionální, tedy jde vyjádřit jako $\frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{N}^+$. Pak $3 = 2^{\frac{m}{n}}$, neboli $3^n = 2^m$. Číslo 3^n je vždy liché a číslo 2^m vždy sudé (jelikož $m > 0$), čili rovnost není možná. Proto číslo $\log_2(3)$, a tedy i $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$, je iracionální [4, s. 204].

Dobrou aproximací čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ je tedy zlomek $\frac{7}{12}$. Racionální aproximací iracionálních čísel se systematicky zabývá teorie řetězových zlomků.

Řetězový zlomek je výraz ve tvaru

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}, \tag{14}$$

kde a_0,a_1, $\ldots \in \mathbb{N}$ a a_i je obvykle kladné pro $i \geq 1$ [4, s. 204].

Tento výraz (14) může být konečný nebo mít nekonečný rozvoj. Pokud je konečný, tak poslední a_n nemůže být rovno 1, protože tato 1 by byla převzata do členu a_{n-1} a rozvoj by skončil dříve (např. $1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1}}$ může být přepsáno jako $1 + \frac{1}{3}$) [4, s. 204].

Poznámka. Pro typografickou jednoduchost budeme psát řetězový zlomek (14) ve tvaru

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] \text{ [4, s. 204].}$$

Nyní si ukážeme algoritmus popsaný v [4, s. 205], díky kterému dokážeme nějaké reálné číslo převést do tvaru řetězových zlomků.

Nechť x je reálné číslo. Pak největší přirozené číslo, které je menší než x, je dolní celá část $\lfloor x \rfloor$. $\lfloor x \rfloor$ tedy bude naše a_0. Pokud je zbytek $x - \lfloor x \rfloor$ splňující $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ nenulový, tak ho obrátíme na zlomek $\frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$, který je pak určitě větší než jedna.

Formálněji tento postup můžeme zapsat následovně.

Nechť $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x \rfloor$ a $x_1 = \frac{1}{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor}$. Máme

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Takto pokračujeme. Nechť $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ a $x_2 = \frac{1}{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor}$, pak

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}}.$$

Obecně, nechť $a_n = \lfloor x_n \rfloor$ a $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - \lfloor x_n \rfloor}$, tak

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$

Výše ukázaný algoritmus lze opakovat do nekonečna právě tehdy, když $x_n \neq 0$, tedy když x je iracionální. Jinak, pokud x je racionální, dostaneme z algoritmu konečný zlomkový rozvoj.

Příklad 30. *Spočítejte řetězový zlomek pro číslo* $\sqrt[12]{2}$ *pomocí algoritmu popsaného výše.*

Řešení. Na kalkulačce spočítáme hodnotu

$$\sqrt[12]{2} \doteq 1{,}059\,463\,094\,4.$$

Máme $a_0 = 1$ a

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt[12]{2} - 1} \doteq 16{,}817\,153\,745\,1.$$

Následně $a_1 = 16$ a zároveň

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 16} \doteq 1{,}223\,759\,917\,9.$$

Dále

$$a_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} \doteq 4{,}469\,075\,648\,2,$$

$$a_3 = 4,\ x_4 = \frac{1}{x_3 - 1} \doteq 2{,}131\,852\,301\,3,$$

$$a_4 = 2,\ x_5 = \frac{1}{x_4 - 1} \doteq 7{,}584\,243\,812\,9,$$

$$a_5 = 7,\ x_6 = \frac{1}{x_5 - 1} \doteq 1{,}711\,614\,189\,0.$$

Pokračováním bychom dostali následující řetězový zlomek

$$\sqrt[12]{2} = [1; 16, 1, 4, 2, 7, 1, 1, 2, 2, 7, 4, 1, 2, 1, 60, 1, 3, 1, 2, \ldots]\,.$$

Příklad 31. *Vyjádřete aproximaci čísla* $\sqrt[12]{2}$ *až do* a_5 *pomocí jednoduchého zlomku.*

Řešení. Zapíšeme $\sqrt[12]{2}$ jako řetězový zlomek v základním tvaru a postupnými úpravami převedeme složený zlomek na jednoduchý.

$$\begin{aligned}
\sqrt[12]{2} &\approx 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7}}}}} = 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\frac{15}{7}}}}} = \\
&= 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \frac{7}{15}}}} = 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{67}{15}}}} = \\
&= 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{1 + \frac{15}{67}}} = 1 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{\frac{82}{67}}} = \\
&= 1 + \cfrac{1}{16 + \frac{67}{82}} = 1 + \cfrac{1}{\frac{1\,379}{82}} = 1 + \frac{82}{1\,379} = \\
&= \frac{1\,461}{1\,379} \doteq 1{,}059\,463\,379\,3.
\end{aligned}$$

$$\sqrt[12]{2} \doteq 1{,}059\,463\,094\,4.$$

Věta 1. *Nechť čísla* p_n *a* q_n *jsou definována indukčně takto:*

$$p_0 = a_0, \qquad p_1 = a_1 a_0 + 1, \qquad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad (n \geq 2), \tag{15}$$

$$q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1, \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (n \geq 2). \tag{16}$$

Pak máme

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n} \ \textit{[4, s. 206].}$$

Příklad 32. *Dokažte Větu 1.*

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí pro n. Pro $n = 0$ a $n = 1$ je důkaz triviální. Předpokládejme tedy, že $n \geq 2$ a věta platí pro menší hodnoty n. Pak máme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}.$$

Nyní použijeme vzorec daný větou a za n dosadíme $n - 1$.

$$\frac{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) q_{n-2} + q_{n-3}} = \frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Indukcí jsme dokázali, že věta platí pro n [4, s. 206–207]. □

Příklad 33. *Pomocí Věty 1 vypočtěte aproximaci čísla* $\sqrt[12]{2}$ *až do* a_5.

Řešení. Určeme podle Věty 1 hodnoty $p_0, \ldots, p_5$ a $q_0, \ldots, q_5$. Máme $p_0 = a_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_1 a_0 + 1 = 16 \cdot 1 + 1 = 17$, $q_1 = a_1 = 16$. Dále vypočteme ostatní p, q podle vzorce až do indexu 5.

$$\begin{aligned}
p_2 &= a_2 p_1 + p_0 = 1 \cdot 17 + 1 = 18, & q_2 &= a_2 q_1 + q_0 = 1 \cdot 16 + 1 = 17,\\
p_3 &= a_3 p_2 + p_1 = 4 \cdot 18 + 17 = 89, & q_3 &= a_3 q_2 + q_1 = 4 \cdot 17 + 16 = 84,\\
p_4 &= a_4 p_3 + p_2 = 2 \cdot 89 + 18 = 196, & q_4 &= a_4 q_3 + q_2 = 2 \cdot 84 + 17 = 185,\\
p_5 &= a_5 p_4 + p_3 = 7 \cdot 196 + 89 = 1\,461, & q_5 &= a_5 q_4 + q_3 = 7 \cdot 185 + 84 = 1\,379.
\end{aligned}$$

Nyní dopočítáme aproximaci

$$\frac{p_5}{q_5} = \frac{1\,461}{1\,379} \doteq 1{,}059\,463\,379\,3.$$

Vidíme, že nám vyšel stejný zlomek jako u Příkladu 31. Jak vidíme, tento postup počítání aproximaci je však mnohem jednodušší a rychlejší než u výše zmíněného příkladu, kdy počítání velkého složeného zlomku zabere docela dost času.

Jak jsou ale racionální aproximace získané z řetězových zlomků přesné? Na to nám odpoví následující věta [4, s. 208].

Věta 2. *Nechť $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ je n-tý konvergent. Chyba n-tého konvergentu rozvoje řetězového zlomku reálného čísla x je ohraničená*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| < \frac{1}{q_n^2} \text{ [4, s. 208].}$$

Příklad 34. *Dokažte Větu 2.*

Důkaz. Jako první si ukážeme, že $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$. Nejjednodušší cestou bude důkaz matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ máme $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$, tedy $p_0a_1 - p_1a_0 = -1$. Pro $n > 1$ použijeme rovnice (15) a (16) ze s. 56 a dostaneme

$$\begin{aligned} p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} &= p_{n-1}(q_{n-2} + a_nq_{n-1}) - (p_{n-2} + a_np_{n-1})q_{n-1} \\ &= p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} \\ &= -(p_{n-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n-2}) \\ &= -(-1)^{n-1} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Nyní využijeme faktu, že x leží mezi

$$\frac{p_{n-2} + a_np_{n-1}}{q_{n-2} + a_nq_{n-1}} \text{ a } \frac{p_{n-2} + (a_n + 1)p_{n-1}}{q_{n-2} + (a_n + 1)q_{n-1}}$$

nebo jinými slovy mezi $\frac{p_n}{q_n}$ a $\frac{p_n+p_{n-1}}{q_n+q_{n-1}}$. Vzdálenost mezi těmito dvěma čísly je

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| &= \left|\frac{(p_n + p_{n-1})q_n - p_n(q_n + q_{n-1})}{(q_n + q_{n-1})q_n}\right| \\ &= \left|\frac{p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}}{q_n^2 + q_nq_{n-1}}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)^n}{q_n^2 + q_nq_{n-1}}\right| < \frac{1}{q_n^2} \text{ [4, s. 208].} \end{aligned}$$

□

Vidíme, že pokud zvolíme jmenovatel q náhodně, potom intervaly mezi reálnými čísly tvaru $\frac{p}{q}$ budou o velikosti $\frac{1}{q}$. Tedy minimalizováním chyby volbou p dostaneme $\left|\frac{p}{q} - x\right| \leq \frac{1}{2}q$. Význam výše uvedené věty je takový, že konvergenty rozvoje řetězových zlomků jsou výrazně lepší než náhodní jmenovatelé a tedy tvoří dobré aproximace, což jsme se dozvěděli na začátku této podkapitoly [4, s. 208].

V kapitole 3 na s. 18 o pythagorejském ladění jsme si ukázali, co je problém tohoto ladění – tzv. pythagorejské komma. Ukázali jsme si, že pokud postavíme nad sebe dvanáct kvint a od stejného tónu sedm oktáv, dostaneme se do dvou tónů, které jsou sice po provedení enharmonické záměny totožné, ale jejich poměr frekvencí se liší právě o pythagorejské komma [7, s. 27].

Abychom dostali přesnou shodu oktávových a kvintových vzestupných kroků, musela by platit pro nějaká přirozená čísla m a k rovnice

$$\left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{2}{3}\right)^k \text{ [7, s. 27].} \tag{17}$$

Příklad 35. *Vyjádřete m, k z rovnice 17.*

Řešení. Na rovnici provedeme k-tou odmocninu:

$$\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{k}}.$$

Upravíme na

$$2^{\frac{m}{k}} = \frac{3}{2}$$

a pomocí vzorce $\log_a c = b \iff a^b = c$ převedeme na logaritmus

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{m}{k}.$$

Výsledný logaritmus

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \doteq 0{,}584\,962\,500\,7$$

je iracionální číslo, jak jsme si už dokázali v příkladu 29 na s. 54. Pythagorejský způsob vzestupných kvint tedy nevede ke konečnému počtu tónů. Můžeme se však pokusit nalézt takové racionální číslo $\frac{m}{n}$, které bude daný logaritmus dobře aproximovat. Převedeme ho tedy na řetězový zlomek [7, s. 27–28].

Příklad 36. *Převeďte $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ na řetězový zlomek až do a_8.*

Řešení. Budeme postupovat stejně jako v příkladu 30 na s. 55. Získáme

$$a_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{\log_2\left(\frac{3}{2}\right)} \doteq 1{,}709\,511\,291\,4,$$

$$a_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} \doteq 1{,}409\,420\,839\,7,$$

$$a_2 = 1,\ x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} \doteq 2{,}442\,474\,596\,2,$$
$$a_3 = 2,\ x_4 = \frac{1}{x_3 - 1} \doteq 2{,}260\,016\,752\,7,$$
$$a_4 = 2,\ x_5 = \frac{1}{x_4 - 1} \doteq 3{,}845\,906\,041\,5,$$
$$a_5 = 3,\ x_6 = \frac{1}{x_5 - 1} \doteq 1{,}182\,164\,390\,5,$$
$$a_6 = 1,\ x_7 = \frac{1}{x_6 - 1} \doteq 5{,}489\,547\,092\,1,$$
$$a_7 = 5,\ x_8 = \frac{1}{x_7 - 1} \doteq 2{,}042\,704\,401\,8,$$
$$a_8 = 2,\ x_9 = \frac{1}{x_8 - 1} \doteq 23{,}416\,789\,808\,0.$$

Dostali jsme prvních devět čísel řetězového zlomku. Opakováním tohoto algoritmu bychom dospěli dále k řetězovému zlomku

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, \ldots]\,.$$

Příklad 37. *Vypočtěte aproximace (konvergenty) čísla* $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ *od* $\frac{p_0}{q_0}$ *do* $\frac{p_8}{q_8}$.

Řešení. Budeme postupovat analogicky jako v příkladu 33 na s. 57.

$$\begin{aligned}
p_0 &= a_0 = 0, & q_0 &= 1,\\
p_1 &= a_1 p_0 + 1 = 1 \cdot 0 + 1 = 1, & q_1 &= a_1 = 1,\\
p_2 &= a_2 p_1 + p_0 = 1 \cdot 1 + 0 = 1, & q_2 &= a_2 q_1 + q_0 = 1 \cdot 1 + 1 = 2,\\
p_3 &= a_3 p_2 + p_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3, & q_3 &= a_3 q_2 + q_1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5,\\
p_4 &= a_4 p_3 + p_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, & q_4 &= a_4 q_3 + q_2 = 2 \cdot 5 + 2 = 12,\\
p_5 &= a_5 p_4 + p_3 = 3 \cdot 7 + 3 = 24, & q_5 &= a_5 q_4 + q_3 = 3 \cdot 12 + 5 = 41,\\
p_6 &= a_6 p_5 + p_4 = 1 \cdot 24 + 7 = 31, & q_6 &= a_6 q_5 + q_4 = 1 \cdot 41 + 12 = 53,\\
p_7 &= a_7 p_6 + p_5 = 5 \cdot 31 + 24 = 179, & q_7 &= a_7 q_6 + q_5 = 5 \cdot 53 + 41 = 306,\\
p_8 &= a_8 p_7 + p_6 = 2 \cdot 179 + 31 = 389, & q_8 &= a_8 q_7 + q_6 = 2 \cdot 306 + 53 = 665.
\end{aligned}$$

Nyní postupně spočítáme konvergenty $\frac{p_0}{q_0}, \ldots, \frac{p_8}{q_8}$.

index $n \in \mathbb{N}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
konvergent $\frac{p_n}{q_n}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{24}{41}$	$\frac{31}{53}$	$\frac{179}{306}$	$\frac{389}{665}$

Tabulka 18: Konvergenty čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$

Taková posloupnost konvergentů by dále pokračovala až do $n \in \mathbb{N}$. Jmenovatelé jednotlivých zlomků nám udávají počet tónů v oktávě, čitatelé pak kolikátý tón určuje v dané soustavě kvintu. Dostáváme tedy rozdělení oktávy na 1, 2, 5, 12, 41, 53, 306, 665 tónů podle jmenovatelů z tabulky 18 [7, s. 30].

Abychom mohli vybrat mezi těmito laděními, potřebovali bychom nějaké kritérium nebo kritéria, podle kterých daná ladění seřadit od těch nejméně vhodných po ty nejvhodnější. Taková kritéria budeme mít tři:

- bohatost, kterou budeme rozumět to, kolik a jaké melodické a harmonické možnosti nám dané ladění poskytuje;
- úspornost (nebo praktičnost), která bude určovat, jestli je ladění vhodné pro stavbu nástrojů nebo pro manipulaci s nimi (např. aby nástroje nebyly moc velké pro velké množství tónů);
- čistotu kvinty (nebo dokonalost) ve smyslu dobré aproximace, která bude ladění rozdělovat podle toho, jak se liší od pythagorejské (a přirozené) kvinty.

Příklad 38. *Seřaďte ladění daná jmenovateli konvergentů z tabulky 18 podle*

1) bohatosti,

2) úspornosti (praktičnosti),

3) čistoty kvinty (dokonalosti).

Řešení.

1) Seřazení podle bohatosti bude jednoduché, jelikož nejvíce bohaté budou ladění s nejvíce tóny v oktávě, nejméně bohaté (nejchudší) s nejméně tóny v oktávě. Seřazení můžeme vidět v tabulce 19.

2) Úspornost, neboli praktičnost, je do jisté míry subjektivní, jelikož každý vnímáme toto kritérium trošku jinak. Pokusme se ale o seřazení v následující tabulce 20.

nejbohatší	665tónové ladění
	306tónové ladění
	53tónové ladění
	41tónové ladění
	12tónové ladění
	5tónové ladění
	2tónové ladění
	1tónové ladění
nejchudší	0tónové ladění

Tabulka 19: Konvergenty čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ seřazeny podle bohatosti

nejúspornější	12tónové ladění
	5tónové ladění
	41tónové ladění
	53tónové ladění
	306tónové ladění
	665tónové ladění
	2tónové ladění
	1tónové ladění
nejméně úsporné	0tónové ladění

Tabulka 20: Konvergenty čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ seřazeny podle úspornosti

3) Čistota kvinty je naopak přesně daná svými konvergenty. Nejprve musíme zjistit, jaká jsou komma jednotlivých konvergentů. To zjistíme tak, že jmenovatel konvergentu bude mocninou poměru frekvencí kvinty a čitatel poměru frekvencí oktávy. Matematicky:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k \div 2^m, \text{ kde } \frac{p_n}{q_n} = \frac{m}{k} \text{ je konvergent.}$$

Spočítejme komma příslušných konvergentů a zaokrouhleme na šest desetinných míst.

- $\frac{1}{2}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \div 2^1 = \frac{3^2}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{9},$$
- $\frac{3}{5}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \div 2^3 = \frac{3^5}{2^5} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^5}{2^8},$$
- $\frac{7}{12}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \div 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{12}} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}},$$
- $\frac{24}{41}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{41} \div 2^{24} = \frac{3^{41}}{2^{41}} \cdot \frac{1}{2^{24}} = \frac{3^{41}}{2^{65}},$$
- $\frac{31}{53}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{53} \div 2^{31} = \frac{3^{53}}{2^{53}} \cdot \frac{1}{2^{31}} = \frac{3^{53}}{2^{84}},$$
- $\frac{179}{306}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{306} \div 2^{179} = \frac{3^{306}}{2^{306}} \cdot \frac{1}{2^{179}} = \frac{3^{306}}{2^{485}},$$
- $\frac{389}{665}$:
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{665} \div 2^{389} = \frac{3^{665}}{2^{665}} \cdot \frac{1}{2^{389}} = \frac{3^{665}}{2^{1054}}.$$

Výsledky seřadíme do tabulky 21 podle čistoty kvinty vzestupně.

Systém s jedním nebo dvěma tóny nemá smysl uvažovat, protože hudba by v takovém případě byla velmi chudá, ozvláštnit by šla pouze nějakým zajímavým rytmem.

Dalším jmenovatelem konvergentu je číslo pět. Stupnicí s pěti tóny (tzv. pentatonikou) se budeme podrobněji zabývat v další podkapitole, jelikož se tato stupnice běžně používá. Podíváme se na její různé výstavby.

Dvanáctitónová stupnice je nám dobře známá, tvoří hudbu, kterou posloucháme a tvoříme. Tento systém však není postaven na kvintových vzestupných krocích, ale na principu rovnoměrného temperování, který jsme si ukázali v kapitole 5 na s. 41.

Hudba o 41 tónech by byla dokonalejší ve smyslu dobré aproximace pythagorejské nebo přirozené kvinty, nicméně pro praktické použití nevhodná (není úsporná), což platí i o následujících jmenovatelích jednotlivých konvergentů.

Naše stupnice o dvanácti tónech je tedy velmi dobrý kompromis mezi dokonalostí konvergentů, úsporností a bohatostí [7, s. 30].

konvergent $\frac{m}{k}$	**počet tónů**	**komma**		
		ve zlomku	v desetin. č. (D)	rozdíl $\lvert 1-D \rvert$
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{8}{9}$	1,125 000	0,125 000
$\frac{3}{5}$	5	$\frac{3^5}{2^8}$	0,949 219	0,050 781
$\frac{7}{12}$	12	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	1,013 643	0,013 643
$\frac{24}{41}$	41	$\frac{3^{41}}{2^{65}}$	0,988 603	0,011 397
$\frac{31}{53}$	53	$\frac{3^{53}}{2^{84}}$	1,002 090	0,002 090
$\frac{179}{306}$	306	$\frac{3^{306}}{2^{485}}$	0,998 978	0,001 022
$\frac{389}{665}$	665	$\frac{3^{665}}{2^{1054}}$	1,000 044	0,000 044

Tabulka 21: Konvergenty čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ seřazeny podle čistoty kvinty [7, upraveno dle s. 32, Tab. 2]

5.4 Porovnání pentatonik

V této podkapitole si rozebereme různé možnosti konstrukce pentatoniky, stupnice tvořené pěti tóny, jelikož právě rozdělení oktávy na pět tónů je jedna z možností dobré aproximace pythagorejské (a přirozené) kvinty.

Ne však každá pentatonika musí být rozdělena rovnoměrně temperovaně, tedy že v oktávě bude pět tónů rozdělených tak, aby každé dva měly mezi sebou stejný poměr frekvencí. Dnes se však spíše používá pentatonika tvořená pěti tóny ($c-d-e-g-a$) rovnoměrně temperovaného dvanáctitónového ladění.

Příklad 39. *Utvořte pentatoniku z rovnoměrně temperovaného dvanáctitónového ladění.*

Řešení. Jelikož máme pentatoniku tvořenou tóny $c-d-e-g-a$, stačí nám pouze tyto tóny vyjmout z rovnoměrně temperovaného dvanáctitónového ladění.

Pro přehlednost uvádíme v tabulce 22 níže.

tón	c	d	e	g	a	c
poměr	$1:1$	$2^{\frac{1}{6}}:1$	$2^{\frac{1}{3}}:1$	$2^{\frac{7}{12}}:1$	$2^{\frac{3}{4}}:1$	$2:1$

Tabulka 22: Pentatonika v rovnoměrně temperovaném dvanáctitónovém ladění

Příklad 40. *Utvořte pentatoniku z rovnoměrně temperovaného pětitónového ladění.*

Řešení. Konstrukci pětitónového rovnoměrně temperovaného ladění sestavíme analogickým způsobem jako ladění dvanáctitónové (viz příklad 17 na s. 43). Zeptáme se tedy, jak bude velkých pět tónů v oktávě, aby měli každé dva mezi sebou stejnou vzdálenost, což můžeme matematicky vyjádřit rovnicí

$$x^5 = 2,$$

která má právě jedno kladné reálné řešení $x = 2^{\frac{1}{5}}$.

Tóny takové pentatoniky však nemůžeme pojmenovat $c - d - e - g - a$, jelikož tyto hodnoty ani přibližně neodpovídají hodnotám v centech, což si ukážeme hned v následujícím příkladu, a takové pojmenování tónů by se nám tedy pletlo. Proto tóny pojmenujeme písmeny řecké abecedy $\alpha - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon$.

Poměry frekvencí těchto tónů podle příkladu 40 uvádíme v tabulce 23.

tón	α	β	γ	δ	ε	α
poměr	$1:1$	$2^{\frac{1}{5}}:1$	$2^{\frac{2}{5}}:1$	$2^{\frac{3}{5}}:1$	$2^{\frac{4}{5}}:1$	$2:1$

Tabulka 23: Rovnoměrně temperovaná pentatonika

Příklad 41. *Ukažte, jak se v centech liší dvanáctitónové rovnoměrně temperované ladění (12RTL) od rovnoměrně temperované pentatoniky (5RTL).*

Řešení. Spočítáme poměry frekvencí intervalů r v centech n podle vzorce

$$1\,200 \cdot \log_2 r = 1\,200 \cdot \frac{\ln r}{\ln 2} = n \text{ (viz vzorec (13) na s. 49)}$$

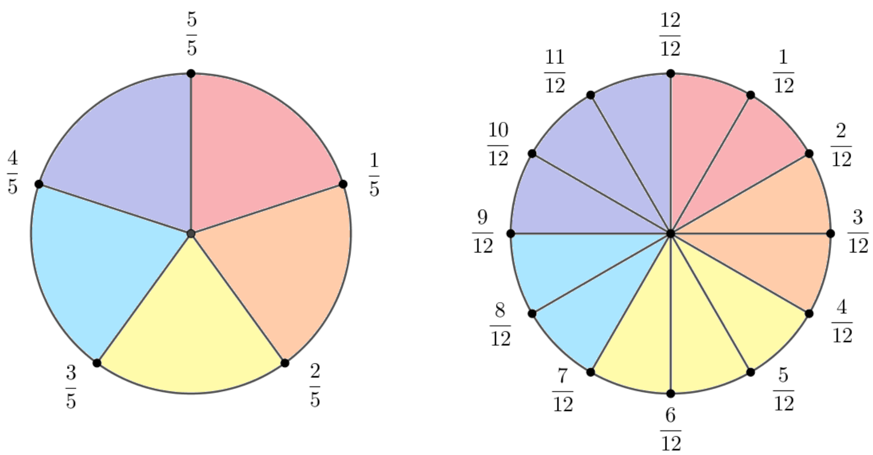
a porovnáme.

Výsledky uvádíme v tabulce 24.

12RTL			5RTL			12RTL−5RTL v centech
tón	poměr	centy	tón	poměr	centy	
c	$1:1$	0,0	α	$1:1$	0,0	+0,0
d	$2^{\frac{1}{6}}:1$	200,0	β	$2^{\frac{1}{5}}:1$	240,0	−40,0
e	$2^{\frac{1}{3}}:1$	400,0	γ	$2^{\frac{2}{5}}:1$	480,0	−80,0
g	$2^{\frac{7}{12}}:1$	700,0	δ	$2^{\frac{3}{5}}:1$	720,0	−20,0
a	$2^{\frac{3}{4}}:1$	900,0	ε	$2^{\frac{4}{5}}:1$	960,0	−60,0
c	$2:1$	1 200,0	α	$2:1$	1 200,0	+0,0

Tabulka 24: Srovnání 12tónového rovnoměrně temperovaného ladění a rovnoměrně temperované pentatoniky v centech

Vidíme, že rovnoměrně temperovaná pentatonika se liší od našeho rovnoměrně temperovaného mnohem více, než například pentatonika tvořená tóny z ladění přirozeného (viz podkapitola 4.1 na str. 33). Porovnání rovnoměrně temperované pentatoniky a dvanáctitónového rovnoměrně temperovaného ladění můžeme vidět například také graficky znázorněné na obrázku 18.



Obrázek 18: Porovnání 12tónové rovnoměrně temperovaného ladění a rovnoměrně temperované pentatoniky podle jednotlivých mocnin

Pentatonika by se dále mohla vytvořit vyjmutím příslušných tónů z pythagorejského nebo přirozeného ladění. Těmito pentatonikami se však zabývat blíže nebudeme, neboť nejsou tak zajímavé.

6 Jiná temperovaná ladění

Temperovaná ladění jsou systémy odvozené od upraveného pythagorejského nebo přirozeného ladění tak, že se dva tóny, které se liší o nějaké komma, srovnají do jednoho, aby se vyřešila nemožnost modulací a transponování melodie [4, s. 176]. V následujících podkapitolách si ukážeme několik dalších temperovaných ladění.

6.1 Středotónové ladění

Středotónové ladění je temperované ladění založené na upravení zlomku syntonického kommatu (viz kapitola 4 na s. 33) na kvintu, aby lépe zněla velká tercie. Nejpoužívanější variantou tohoto ladění je ladění čtvrt-středotónové, které je vytvořené z velké tercie o poměru 5 : 4 a zbývající tóny jsou doplněny, jak nejpřesněji je možné. Tedy tóny $c-d-e$ jsou vyjádřeny poměry $\frac{1}{1} : \frac{\sqrt{5}}{2} : \frac{5}{4}$, stejně jako $f-g-a$ a $g-a-h$. Nyní musíme rozhodnout o poměru dvou půltónů, které jsme zatím neurčili. Jelikož má pět tónů poměr $\frac{\sqrt{5}}{2} : 1$ a do oktávy nám zbývají půltóny dva, jejich poměr bude

$$\sqrt{\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^5}} : 1 = 8 : 5^{\frac{5}{4}} \text{ [4, s. 177].}$$

Pro přehlednost uvádíme následující tabulku 25.

tón	c	d	e	f
poměr	$1 : 1$	$\sqrt{5} : 2$	$5 : 4$	$2 : 5^{\frac{1}{4}}$
centy	0,000	193,157	386,314	503,422
tón	g	a	h	c
poměr	$5^{\frac{1}{4}} : 1$	$5^{\frac{3}{4}} : 2$	$5^{\frac{5}{4}} : 4$	$2 : 1$
centy	696,579	889,735	1 082,892	1 200,000

Tabulka 25: Diatonická durová stupnice ve středotónovém ladění [4, upraveno dle s. 177]

Vidíme, že kvinta v tomto ladění už není čistá (viz podkapitola 5.2 o centech na s. 48) [4, s. 177].

Druhým, více poučným způsobem, jak zkonstruovat čtvrt-středotónové ladění, je naladit každou kvintu tak, aby byla blíže kvintě pythagorejské. Toho dosáhneme tak, že každou žádanou kvintu snížíme přesně o čtvrtinu syntonického kommatu k tomu, aby nám velké tercie vycházely správně. Pokud půjdeme od tónu c, dostaneme kvintu g, která bude o čtvrtinu syntonického kommatu níže než její pythagorejská hodnota. Tón d bude o polovinu níž, tón a o tři čtvrtiny kommatu, a konečně tón e bude o celé komma níže od pythagorejské tercie, což nám dá přesnou rovnost s tercií přirozenou. Pokud bychom v tomto postupu pokračovali, dostali bychom tón h o pět čtvrtin kommatu níže, než je jeho pythagorejská hodnota. Stejným způsobem bychom pak došli k tónu f, který by byl o čtvrtinu syntonického kommatu vyšší, než pythagorejská kvarta [4, s. 177].

Syntonické komma nám dá tedy možnost modulovat do rozumného počtu předznamenání. Pythagorejské komma tuto možnost nemá, takže modulace není stále po kvintovém kruhu proveditelná. Rozdíl mezi enharmonickými tóny $a\flat$ a $g\sharp$ je vskutku tři syntonické komma mínus pythagorejské komma, což nám dává poměr 128 : 125 neboli rozdíl 41,059 centů. Tento interval, nazývaný **velké diesis**, se blíží polovině půltónu a je uchem velmi dobře rozpoznatelný. Nedokonalá kvinta mezi tóny $c\sharp$ a $a\flat$ (neboli kterýmikoli jinými) se ve středotónovém ladění někdy označuje jako tzv. **vlčí interval** [4, s. 178].

6.2 53tónové ladění

V podkapitole 5.3 o řetězových zlomcích na s. 53 jsme se dozvěděli, že rozvoj řetězového zlomku čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ vypadá takto

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) = [0; 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, 2, 2, 1, 1, 55, 1, 4, 3, 1, 1, \dots] .$$

Daná posloupnost konvergentů čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ je pak

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{12}, \frac{24}{41}, \frac{31}{53}, \frac{179}{306}, \frac{379}{665}, \frac{9\,126}{15\,601}, \dots,$$

kde jmenovatel členů této posloupnosti vyjadřuje počet tónů v oktávě a čitatel nám udává, kolik těchto tónů je potřeba k aproximaci kvinty $\left(\frac{3}{2}\right)$. Tyto znalosti budou pro zavedení dalších ladění klíčové, jelikož čím lépe bychom aproximovali kvintu, tím lépe by nám daná stupnice zněla. Čtvrtý člen posloupnosti vyjadřuje aproximaci kvinty rovnoměrně temperovaného ladění, které známe a používáme v dnešní době. Pro vybudování dalších ladění by v úvahu přicházely pouze další dva členy s 41 a 53 tóny v oktávě. Jmenovatel dalších členů je už totiž moc velký, takové stupnice s 306 a více tóny by byly prakticky nepoužitelné [4, s. 213].

53tónové rovnoměrně temperované ladění vyvolalo mnoho diskuzí. Například v roce 1876 Robert Bosanquet (1841–1912) sestavil harmonium s 53 tóny v oktávě (viz obrázek 19). Toto ladění je založeno na aproximaci, která ukazuje pythagorejské komma rovné $\frac{1}{53}$ v oktávě, neboli $\frac{1\,200}{53} = 22{,}642$ centů, spíše než pravá hodnota pythagorejského kommatu o 23,460 centech. Pokud bychom šli po kvintovém kruhu od začátku do konce, dostali bychom se z tónu c k tónu $h\sharp$, který je o 22,642 centů výš. To je shodné s rovností

$$12 \cdot 31 - 7 \cdot 53 = 1,$$

která nám říká, že rozdíl dvanácti kvintových kroků 53tónového ladění a sedmi oktáv odpovídá jednomu kroku v 53tónové stupnici [4, s. 215].

Obrázek 19: 53tónové harmonium sestavené Robertem Bosanquetem [4, s. 214]

Následující tabulka 26 ukazuje 53tónové ekvivalenty tónů pythagorejského ladění.

tón	c	$h\sharp$	$d\flat$	$c\sharp$	d	$e\flat$	$d\sharp$	e	f	$g\sharp$
poměr	0	1	4	5	9	13	14	18	22	26
tón	$f\sharp$	g	$a\flat$	$g\sharp$	a	b	$a\sharp$	$c\flat$	h	c
poměr	27	31	35	36	40	44	45	48	49	53

Tabulka 26: Chromatická stupnice v 53tónovém ladění [4, upraveno dle s. 215]

Tím pádem je 53tónová stupnice vytvořena z pěti celých tónů (každý z devíti stupňů) a dvou půltónů (každý ze čtyř stupňů), $5 \cdot 9 + 2 \cdot 4 = 53$. V tomto ladění je velmi blízko aproximace kvinty jednatřicátým stupněm:

$$\frac{31}{53} \cdot 1\,200 = 701{,}887 \text{ centů},$$

který je lepší než 701,955 centů v pythagorejském ladění [4, s. 215].

Tercie přirozeného ladění je zde aproximována sedmnáctým stupněm:

$$\frac{17}{53} \cdot 1\,200 = 384{,}906 \text{ centů},$$

což je lepší než pravá hodnota 386,314 centů [4, s. 215].

Pythagorejci si byli pravděpodobně 53tónového temperovaného ladění vědomi. Pythagorův žák Filolaos (cca 470–385 př. Kr.) si myslel, že tón je rozdělený na dva malé pythagorejské půltóny a pythagorejské komma. Určil tak malý pythagorejský půltón roven čtyřem kommatům, což vytvořilo devět kommatů v celém tónu. Dohromady tedy dostal 53 kommatů v oktávě. I čínský teoretik Jing Fang ze třetího století před Kristem si byl patrně vědom, že čtyřiapadesátý tón je v pythagorejském systému skoro identický s prvním [4, s. 217].

Po 53 je dalším jmenovatelem posloupnosti konvergentů čísla $\log_2\left(\frac{3}{2}\right)$ číslo 665. Zvláštními výhodami získanými z 665tónového rovnoměrně temperovaného ladění, které nám dá až pozoruhodně dobrou aproximaci kvinty, jsou daleko převažující fakta, že sousední tóny jsou velmi blízko u sebe (1,805 centů), tedy téměř k nerozeznání, a pro hudební praxi zcela nepoužitelné [4, s. 217].

6.3 Ostatní rovnoměrně temperovaná ladění

Ostatní dělení oktávy na rovnocenné intervaly, které byly použity pro různá experimentální ladění, zahrnovaly dělení 19, 24, 31 a 43. 19tónové ladění má výhodu dobré aproximace malé tercie (6 : 5) a velké sexty (5 : 3) a zároveň také aproximace velké tercie (5 : 4) a malé sexty (8 : 5). Jedenáctý stupeň tohoto ladění nám dává aproximaci kvinty (3 : 2), která je sice o něco horší než v našem 12tónovém ladění, ale pořád přijatelná. V tabulce 27 níže ukazujeme srovnání přirozeného a 19tónového ladění v centech [4, s. 217].

interval	poměr	centy	19tónový stupeň	centy
prima	1 : 1	0,000	0	0,000
malá tercie	6 : 5	315,641	5	315,789
velká tercie	5 : 4	386,314	6	378,947
kvinta	3 : 2	701,955	11	694,737
malá sexta	8 : 5	813,687	13	821,053
velká sexta	5 : 3	884,359	14	884,211
oktáva	2 : 1	1 200,000	19	1 200,000

Tabulka 27: Srovnání přirozeného a 19tónového ladění [4, upraveno dle s. 217]

Na konci sedmnáctého století byl Christiaan Huygens (1629–1695) nejspíše první, kdo používal k aproximaci přirozeného ladění ladění 19tónové, díky němuž mohl modulovat do jiných tónin. Tato vlastnost je s ohledem na stavbu diatonické stupnice velmi podobná dnešnímu 12tónovému ladění, ale například chromatické stupnice se chovají velmi rozdílně [4, s. 217].

Dalším rovnoměrně temperovaným laděním je ladění 24tónové, známější pod jménem čtvrttónové, které nezahazuje 12 tónů našeho ladění, ale vytváří nové tóny pouze dělením. Toto ladění nemá lepší aproximaci poměrů 3 : 2 a 5 : 4 než ladění 12tónové, ale má o něco lepší aproximaci 7 : 4 a mnohem lepší aproximaci 11 : 8. Dvě řady po dvanácti tónech složené vybráním každého druhého tónu lze se zajímavým efektem střídat, ale použití obou řad najednou má velkou tendenci vytvářet neshody, tedy všech dvacet čtyři tónů tohoto ladění není v celku použitelných [4, s. 217–218].

Příklady použití čtvrttónového ladění můžeme najít u německého skladatele Richarda Steina (1882–1942) v jeho skladbě pro violoncello a klavír *Zwei Konzertstücke*, op. 26, z roku 1906. Významným tuzemským skladatelem, který komponoval ve čtvrttónovém (a několika jiných) ladění, je Alois Hába (1893–1973). Hába toto ladění použil například ve své *Suitě pro smyčcový orchestr* (1917) nebo v opeře *Matka* (1927/1930) a jako první sestavil tzv. čtvrttónový klavír (viz obrázek 20). Dalšími skladateli jsou Howard Hanson (1896–1981) a Charles Ives (1874–1954), američtí skladatelé dvacátého století, kteří psali hudbu pro dva klavíry také ve čtvrttónovém ladění [4, s. 218].

Obrázek 20: Čtvrttónový klavír Aloise Háby [10]

Poslední rovnoměrně temperované ladění bude obsahovat 31 tónů v oktávě. Tomuto ladění věnujeme následující podkapitolu, jelikož v něm je neobvykle dobrá aproximace všech tří intervalů 3 : 2, 5 : 4 a 7 : 4 [4, s. 218].

6.4 31tónové ladění

31tónové ladění bylo jako první prostudováno italským hudebním teoretikem a skladatelem Nicolou Vicentinem (1511–1575/6) a později také Christiaanem Huygensem, o kterém jsme už mluvili ve spojitosti s laděním o devatenácti tónech. 31tónové ladění má lepší aproximaci kvinty než 19tónové, ovšem stále horší než ladění dnešní. Také obsahuje dobrou aproximaci velké tercie a malé sexty stejně jako velké septimy [4, s. 219]. Porovnání s přirozeným laděním ukazujeme v následující tabulce 28.

interval	poměr	centy	31tónový stupeň	centy
prima	1 : 1	0,000	0	0,000
malá tercie	6 : 5	315,641	8	309,677
velká tercie	5 : 4	386,314	10	387,097
kvinta	3 : 2	701,955	18	696,774
malá sexta	8 : 5	813,687	21	812,903
velká septima	7 : 4	968,826	25	967,742

Tabulka 28: Srovnání přirozeného a 31tónového ladění [4, upraveno dle s. 219]

Hlavní významem, proč je zajímavé studovat 31tónové ladění, je, že osmnáctý tón tohoto systému nečekaně lépe než kvintu přirozenou aproximuje kvintu v středotónovém ladění (696,579 centů) [4, s. 219]. Všimněme si v tabulce 29 níže, že se takto dobře aproximuje celé středotónové ladění.

Obrázek 21 ukazuje nástroj laděný v 31tónovém rovnoměrném ladění. Tento nástroj sestavil roku 1606 ital Vitus Trasuntinis. Každá oktáva má sedm bílých kláves, jak je obvyklé, a čtyři řady po pěti klávesách na místech, kde jsou běžně klávesy černé. Na místech, kde obyčejně nejsou bíle klávesy rozděleny černými, jsou ještě dva páry kláves, které potřebujeme do celkového počtu 31 tónů:

$$7 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 31 \text{ [4, s. 220–221].}$$

tón	**středotónové ladění** v centech	**31tónové ladění**	
		stupeň	centy
c	0,000	0	0,000
$c\sharp$	76,049	2	77,419
d	193,157	5	193,548
$e\flat$	310,265	8	309,677
e	386,314	10	387,097
f	503,422	13	503,226
$f\sharp$	579,471	15	580,645
g	696,579	18	696,774
$a\flat$	813,686	21	812,903
a	889,735	23	890,323
b	1 006,843	26	1 006,452
h	1 082,892	28	1 083,871
c	1 200,000	31	1 200,000

Tabulka 29: Srovnání středotónového a 31tónového ladění v centech [4, upraveno dle s. 220]

Obrázek 21: 31tónové cembalo sestavené Vitem Trasuntinim [4, s. 220]

Pojďme nyní prozkoumat vztah mezi středotónovým a 31tónovým laděním pomocí řetězových zlomků. Středotónový systém je založený na středotónové kvintě, kterou reprezentuje poměr $\sqrt[4]{5} : 1$. Tedy se podíváme na řetězový zlomek čísla $\log_2 \sqrt[4]{5}$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\log_2 \sqrt[4]{5} &= \frac{1}{4} \cdot \log_2 5 \doteq 0{,}580\,482\,023\,7 \\ &= [0; 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 5, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 7, 78, 2, 13, 5, 2, \ldots]\end{aligned}$$

s konvergenty

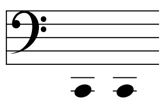
$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{7}{12}, \frac{11}{19}, \frac{18}{31}, \frac{101}{174}, \frac{119}{205}, \ldots \text{ [4, s. 221].}$$

Kdybychom řetězový zlomek ukončili před číslem pět ve jmenovateli, dostali bychom aproximaci $\frac{18}{31}$, což dává vzniknout 31tónovému rovnoměrnému ladění, které popisujeme výše [4, s. 221].

7 Alikvotní řada

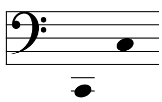
V [4, s. 85–91, 99–102] můžeme vidět, že pokud zahrajeme nějaký určitý tón o dané frekvenci na strunném nebo dechovém nástroji, tak s takovou frekvencí je daný zvuk periodický. Teorie Fourierových řad nám ukazuje, že takový zvuk může být rozdělen do několika sinusových vln s různými fázemi. Základní složkou takového zvuku je tzv. *fundamentál*, tedy tón, který na nástroji reálně hrajeme. Ostatní složky se nazývají alikvotní tóny, které spolu s fundamentálem tvoří alikvotní řadu [4, s. 136]. Taková řada se dá vyjádřit matematicky pomocí několika prvních přirozených čísel $n = 1, 2, 3, \ldots$, které v intervalech rovnoměrně temperovaného ladění dobře aproximují alikvotní tóny dané poměrem n. Ukážeme si, jak se takové intervaly s alikvotními tóny liší v centech [8, s. 97].

1) Poměrem 1 : 1 je vyjádřena prima. Není divné, že poměr dvou stejných frekvencí dává stejnou výšku.



Obrázek 22: Alikvótní tón s poměrem 1 : 1

2) Už jsme si ukázali, že poměrem 2 : 1 lze vyjádřit oktávu, která může být označována jako hudebně nejvíce konsonantní interval, protože, když ji zahrajeme, tak pro mnohé je stěží slyšitelná nebo neslyšitelná vůbec.



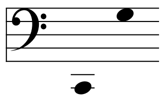
Obrázek 23: Alikvótní tón s poměrem 2 : 1

3) Poměrem 3 : 1 lze nejlépe vyjádřit oktávu s kvintou. To jsme mohli vidět už v kapitole 3 na s. 18, $1 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3$. Součet oktávy a kvinty nám dává 19 půltónů, což v rovnoměrně temperovaném ladění odpovídá 1 900 centům. Také jsme si

ukázali, že poměr 3 : 1 lze vyjádřit v centech takto:

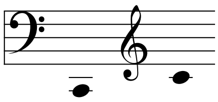
$$1\,200 \cdot \log_2 3 \doteq 1\,901{,}96.$$

Tedy aproximace poměru 3 : 1 je o 2 centy nižší, což je velmi přesné.



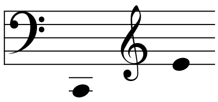
Obrázek 24: Alikvótní tón s poměrem 3 : 1

4) Poměr 4 : 1 jsou vlastně dvě oktávy nad sebou, protože $4 = 2^2$ a $1\,200 \cdot \log_2 4 = 2 \cdot 1\,200$. Vidíme, že mocniny dvojky jsou jediná přirozená čísla, která jsou zcela přesná.



Obrázek 25: Alikvótní tón s poměrem 4 : 1

5) Dalším zajímavým poměrem je 5 : 1, který lze v centech vyjádřit jako $1\,200 \cdot \log_2 5 \doteq 2\,786{,}31$. Nejbližší interval k tomuto poměru je interval o 2 800 centech, což jsou dvě oktávy a velká tercie. Aproximační rozdíl je přibližně o 14 centů výše. Tento rozdíl je už dobře rozeznatelný pro lidi s vycvičeným sluchem.

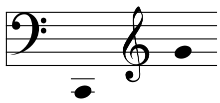


Obrázek 26: Alikvótní tón s poměrem 5 : 1

6) Dalším přirozeným číslem je číslo $6 = 3 \cdot 2$, což je součet oktávy a oktávy s kvintou, tedy dvou oktáv s kvintou. V centech můžeme poměr $6 : 1$ spočítat takto:

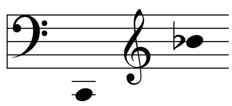
$$\begin{aligned}1\,200 \cdot \log_2 6 &= 1\,200 \cdot \log_2(2 \cdot 3)\\ &= 1\,200 \cdot (\log_2 2 + \log_2 3)\\ &= 1\,200 \cdot \log_2 2 + 1\,200 \cdot \log_2 3\\ &\doteq 1\,200 + 1\,901{,}96\\ &= 3\,101{,}96.\end{aligned}$$

Tento poměr je o 2 centy větší než 3 100 centů, což je 31 půltónů.



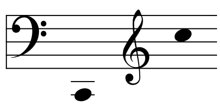
Obrázek 27: Alikvótní tón s poměrem 6 : 1

7) Prvočíslo 7 je nejmenší přirozené číslo, které je velmi špatně aproximované temperovanou chromatickou stupnicí. Hodnota v centech je dána $1\,200 \cdot \log_2 7 \doteq$ $\doteq 3\,368{,}83$, ke které je nejbližší interval o 34 půltónech (3 400 centech). Tento interval odpovídá dvěma oktávám s malou septimou a je o 31 centů vyšší.



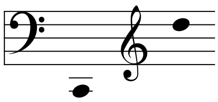
Obrázek 28: Alikvótní tón s poměrem 7 : 1

8) Číslo 8 je další (třetí) mocnina dvojky, tedy přesně tři oktávy.



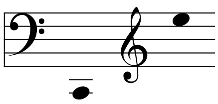
Obrázek 29: Alikvótní tón s poměrem 8 : 1

9) Prvočíselný rozklad čísla 9 je 3^2, což odpovídá dvakrát oktávě s kvintou, neboli třem oktávám se sekundou. V centech lze vyjádřit $1\,200 \cdot \log_2 9 = 1\,200 \cdot \cdot \log_2 3^2 = 1\,200 \cdot 2 \cdot \log_2 3 \doteq 2 \cdot 1\,901{,}96 = 3\,803{,}92$, což je přibližně čtyřcentový rozdíl oproti danému intervalu.



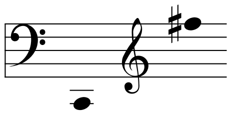
Obrázek 30: Alikvótní tón s poměrem 9 : 1

10) Poměr 10 : 1 je aproximace oktávy s intervalem tří oktáv a velké tercie ($10 = = 2 \cdot 5$) se stejnou chybou 14 centů jako aproximace čísla 5.



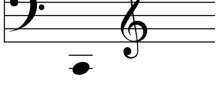
Obrázek 31: Alikvótní tón s poměrem 10 : 1

11) Dalším přirozeným číslem je prvočíslo 11, které má zatím nejhorší aproximaci (odchylku): $1\,200 \cdot \log_2 11 \doteq 4\,151{,}32$. Všimněme si, že tento alikvotní tón leží skoro v půlce půltónu, mezi 41 (tři oktávy a kvarta) a 42 půltóny (tři oktávy a tritón), ale blíže k druhému zmíněnému. Je o 49 centů výš.



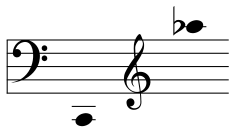
Obrázek 32: Alikvótní tón s poměrem 11 : 1

12) Víme, že $12 = 2^2 \cdot 3$ je aproximována o 14 centů výš třemi oktávami s kvintou.



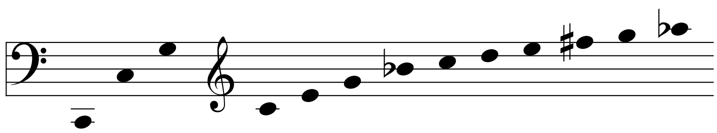
Obrázek 33: Alikvótní tón s poměrem 12 : 1

13) Posledním přirozeným číslem, které si ukážeme, je prvočíslo 13. Hodnota v centech poměru 13 : 1 je $1\,200 \cdot \log_2 13 \doteq 4\,440{,}53$. Poměr 13 : 1 je nejlepší aproximace 44 půltónů, neboli tří oktáv s malou sextou. Aproximace je okolo 41 centů níž, než zmíněný interval [8, s. 97–102].



Obrázek 34: Alikvótní tón s poměrem 13 : 1

Na obrázku 35 vidíme celou řadu tónů, kterou jsme teď vytvořili. Jak jsme si řekli na začátku kapitoly, tato řada se nazývá alikvotní a všechny tóny této řady se rozeznívají při zahrání námi zvoleného fundamentálu na nástroji. Některé však jsou slyšet více, některé méně, – záleží na konkrétní stavbě, materiálu a tvorbě tónu na daném nástroji.



Obrázek 35: Alikvótní řada od tónu C

Těmito tóny ale alikvótní řada nekončí. S dalšími přirozenými čísly většími než 13 bychom dostali další alikvótní tóny, které však v této kapitole dále popisovat nebudeme. Matematický pohled jsme si už totiž pro představu ukázali.

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo nastínit zvláště středoškolskému učiteli a žákovi matematický pohled na hudební ladění – pythagorejské, přirozené a rovnoměrně temperované – a ukázat řešené příklady, které je možné použít pro žáky jako úlohy rozšiřující znalosti o racionálních a iracionálních číslech. Výukový text, který byl vytvořen, je psán jazykem středoškolské matematiky, aby žáci neměli větší problémy s pochopením obsahu.

Práce obsahuje podrobnou konstrukci výše zmíněných ladění řazených tak, jak byly v dějinách objevovány. Zabývá se poměry jak základních, tak odvozených intervalů a matematicky je popisuje. Zajímavé je, že všechna tři ladění (pythagorejské, přirozené a rovnoměrně temperované) se od sebe v zásadě moc neliší, což můžeme vidět zvláště v podkapitole zabývající se vyjádřením intervalových poměrů v centech.

Součástí práce jsou rovněž, již v úvodu zmíněné, zvukové soubory porovnávající jednotlivé tóny durové stupnice pythagorejského, přirozeného a rovnoměrně temperovaného ladění. Tyto nahrávky mají za účel názorně ukázat rozdíly mezi jednotlivými laděními. Některé zvukové rozdíly se však netrénovaným sluchem jen stěží rozpoznávají, což je důsledek malých odchylek jednotlivých ladění. Poslední ukázka porovnává první takt skladby Johanna Sebastiana Bacha *Preludium C dur* (BWV 846) ve třech již zmíněných laděních. Bohužel se mi nepodařilo k práci najít další nahrávky, které by porovnávaly jednotlivá ladění, nebo dostupné webové stránky či programy, které by melodie převáděly do různých ladění.

Záměrem práce také bylo vytvořit konkrétní pracovní listy použitelné ve výuce na středních a jiných školách, ale pro časovou náročnost to nebylo možné realizovat. Nakonec se ukázalo, že to této bakalářské práce nijak neuškodilo, jelikož jsem zjistil, že nemám dostatečné pedagogické zkušenosti na to, abych mohl vytvořit kvalitní didaktické materiály. Také jsem se chtěl původně v práci věnovat zlatému řezu a jeho využití v hudbě, ale rozhodl jsem se tuto kapitolu nezařadit, aby text nebyl obsahově moc široký.

Práce by se tedy dala rozšířit v praktické části o pracovní listy a jejich následné použití v hodinách matematiky na střední škole, popř. v hodinách hudební teorie na hudebních konzervatořích. V teoretické části by mohlo být zajímavé zkoumat využití zlatého řezu v hudebních dílech, teorii grup v hudbě nebo matematický popis motivické a tematické práce.

Seznam použitých zdrojů

[1] KUBÍNOVÁ, Marie a Jarmila NOVOTNÁ, 1997. *Posloupnosti a řady: Matematická analýza, teoretická aritmetika*. Praha: Karolinum. ISBN 80-7184-564-7.

[2] BUŠEK, Ivan a Emil CALDA, 1992. *Matematika pro gymnázia: Základní poznatky z matematiky*. 3., upr. vyd. Praha: Prometheus. ISBN 80-7196-146-9.

[3] ZENKL, Luděk, 2003. *ABC hudební nauky*. 8. vyd., v Bärenreiter Praha vyd. 2 (dotisk). Praha: Bärenreiter Praha. ISBN 978-80-86385-21-1.

[4] BENSON, Dave, 2006. *Music: A Mathematical Offering*. New York: Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-85387-3.

[5] ASSAYAG, Gerard, Hans Georg FEICHTINGER a José Francisco RODRIGUES, ed., 2002. *Mathematics and Music: A Diderot Mathematical Forum*. Berlin: Springer-Verlag. ISBN 3-540-43727-4.

[6] BARBOUR, James Murray, 1951. *Tuning and Temperament: A Historical Survey* [online]. East Lansing: Michigan State College Press [cit. 2022-04-13]. ISBN 978-0-486-43406-3. Dostupné z: `https://archive.org/details/tuningtemperamen00barb/mode/2up?ref=ol&view=theater`.

[7] HALAS, Zdeněk, 2012. *Využití matematiky v praxi*. Praha: P3K. ISBN 978-80-87186-75-6.

[8] WRIGHT, David, 2009. *Mathematics and Music* [online]. Providence: American Mathematical Society [cit. 2022-04-13]. ISBN 978-0-8218-4873-9. Dostupné z: `https://www.math.wustl.edu/~wright/Math109/00Book.pdf`.

[9] KALA, Vítězslav, 2022. *Teorie čísel* [online]. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta [cit. 2022-04-13]. Dostupné z: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kala/files/TC22.pdf`.

[10] [Hábův čtvrttónový klavír]. In: *Národní muzeum* [online]. Praha [cit. 2022-04-13]. Dostupné z: `https://www.nm.cz/ceske-muzeum-hudby/oddeleni-hudebnich-nastroju/sbirka-hudebnich-nastroju`.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

A Zvukové nahrávky

V následujících dvou podkapitolách najdeme popis přiložených nahrávek tónů diatonické durové stupnice ($c^1, \ldots, c^2$) a *Preludia C dur*, BWV 846, skladatele Johanna Sebastiana Bacha (1685–1750) z prvního dílu sbírky preludií a fug *Das wohltemperierte Klavier*. Nahrávky jsou v pythagorejském, přirozeném a rovnoměrně temperovaném ladění.

A.1 Nahrávky tónů

V přiložených souborech najdeme nahrávky porovnání tónů v pythagorejském, přirozeném a rovnoměrně temperovaném ladění. Nahrávky obsahují vždy daný tón zahraný v prvním ladění, ve druhém ladění a poté současně.

Jako základní tón byl vzat tón c^1 o frekvenci 261,625 Hz vypočtený dle příkladu 22 na s. 47. Ostatní tóny o frekvenci f Hz byly vypočteny podle vzorce (uvedeného ve stejném příkladu):

$$f = c \cdot r,$$

kde c je daná frekvence tónu c^1 a r poměr frekvence hledaného tónu vůči frekvenci tónu c^1, a zaokrouhlena na tři desetinná místa. Poměry frekvencí pythagorejského ladění (PYTH) jsou převzaty z tabulky 3 na s. 24, poměry frekvencí přirozeného (PŘIL) z tabulky 7 na s. 35 a poměry frekvencí rovnoměrně temperovaného ladění (RTL) převzaty z příkladu 33 na s. 57. V tabulce níže jsou uvedeny dané frekvence.

Názvy nahrávek jsou ve tvaru

xx_ton_ladeni1-ladeni2.mp3,

kde

xx	číslo nahrávky;
ton	c^1, d^1, e^1, f^1, g^1, a^1, h^1, c^2;
ladeni1	pythagorejské ladění (PYTH), přirozené ladění (PRIL);
ladeni2	přirozené ladění (PRIL), rovnoměrně temperované ladění (RTL).

Poznámka. U některých tónů nejsou nahrávky všech tří kombinací, jelikož frekvence daných tónů jsou v pythagorejském a přirozeném ladění stejné.

tón	PYTH		PŘIL		RTL	
	poměr	f (Hz)	poměr	f (Hz)	poměr	f (Hz)
c^1	1 : 1	261,625	1 : 1	261,625	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^0 : 1$	261,625
d^1	9 : 8	294,328	9 : 8	294,328	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^2 : 1$	293,664
e^1	81 : 64	331,119	5 : 4	327,031	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^4 : 1$	329,627
f^1	4 : 3	348,833	4 : 3	348,833	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^5 : 1$	349,228
g^1	3 : 2	392,438	3 : 2	392,438	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^7 : 1$	391,995
a^1	27 : 16	441,492	5 : 3	436,042	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^9 : 1$	440,000
h^1	243 : 128	496,679	15 : 8	490,547	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^{11} : 1$	493,884
c^2	2 : 1	523,250	2 : 1	523,250	$\left(\frac{1461}{1379}\right)^{12} : 1$	523,252

A.2 Nahrávky Preludia C dur J. S. Bacha

V přiložených souborech je i nahrávka prvního taktu *Preludia C dur* J. S. Bacha ve všech třech laděních sestříhaná z nahrávek dostupných z `https://cs.wikipedia.org/wiki/Lad%C4%9Bn%C3%AD`. Nahrávka byla sestříhaná proto, aby odchylky různých ladění byly hned znatelné. Celou skladbu naleznete k poslechu na výše uvedeném odkazu i v jiných laděních.
Název nahrávky: 14_Preludium-C-dur_PYTH-PRIL-RTL.mp3.

A.3 Seznam nahrávek

01_d1_PYTH-RTL.mp3
02_e1_PYTH-PRIL.mp3
03_e1_PYTH-RTL.mp3
04_e1_PRIL-RTL.mp3
05_f1_PYTH-RTL.mp3
06_g1_PYTH-RTL.mp3
07_a1_PYTH-PRIL.mp3
08_a1_PYTH-RTL.mp3
09_a1_PRIL-RTL.mp3
10_h1_PYTH-PRIL.mp3

11_h1_PYTH-RTL.mp3

12_h1_PRIL-RTL.mp3

13_c2_PYTH-RTL.mp3

14_Preludium-C-dur_PYTH-PRIL-RTL.mp3