2. Úplný problém vl. čísel – QR alg. ①

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $sp(A) = ?$, vl. vekt. $= ?$

výpočet vl. č. (všech):

- $p(A) = \det(A-\lambda I)$ … kořeny char. pol.
  - Abel → neex. finitní alg. pro výpočet kořenů pol. stupně ≥ 5
  - výpočet kořenů je citlivý k změnám koef.
- Schurův rozklad: $A \overset{(*)}{=} URU^*$, U – unit., $R = \boxed{\diagdown}$

$\Rightarrow AU = UR$

$A[u_1,\dots,u_m] = [u_1,\dots,u_m]R_m$, $m = 1,\dots,n$

$\Rightarrow [u_1,\dots,u_m]$ je inv. podpr. A, příslušná vl. č. jsou na diagonále R_m

pozor: u_2 – nemusí být vl. vekt. $\operatorname{span}\{u_1,u_2\}$ je inv. podpr. k λ_1,λ_2

pozn: A – norm. $\Rightarrow R = D$ a U jsou vl. vekt.

→ QR algoritmus: počítá aproximaci (*)

schéma alg:

$A_0 := A$

for $m = 1,2,\dots$

  $A_{m-1} = Q_m R_m$

  $A_m := R_m Q_m$

end

platí: $A_m = R_m Q_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m = \dots = \underbrace{Q_m^* \cdots Q_1^*}_{=:Q^*} A \underbrace{Q_1 \cdots Q_m}_{=:Q}$

$\Rightarrow A_m, A_{m-1},\dots, A$ jsou si unit. podobné $\Rightarrow$ mají stejná vl. č.

navíc: → je-li A Herm., pak A_m jsou Herm.

(cvičení) → je-li $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lze zůstat celý výpočet v $\mathbb{R}$ (kompl. vl. č. viz dále)

→ je-li A regul, jak A_m jsou regul.

Později ukážeme, že $A_m \xrightarrow{m\to\infty}$ (blokově horní Δ-ová při kompl. sdruž. číslech) s vl. č. A na diagonále. (Pro A Herm. $A_m \to$ a výjimečně R.)

ALE! ⊖ drahé – QR rozklad ... $\frac{4}{3}n^3$

+ násobení mtic ... $O(n^3)$

(nelze příliš zvýšit rychlost konv.)

⊖ konv. obvykle pomalu

Preprocessing – transf. do horního Hes. tvaru

platí: je-li A regul. horní Hes., jak totéž platí pro $\forall A_m$

D: $A_{m-1} = Q_m R_m \Rightarrow Q_m = A_{m-1} \cdot R_m^{-1} = \; \Rightarrow$

$\Rightarrow A_m = R_m Q_m =$ (ověřit) □

pozn.: je-li A sing., lze konstruovat Q_m, R_m, aby A_m bylo horní Hes. $\forall m$ (Giv. rot.)

konstrukce: Hous. reflexe: $\tilde{Q} \equiv 1 - 2ww^T$, $\tilde{Q}^{-1} = \tilde{Q}$ unit.

$A \xrightarrow{\tilde{Q}_1 = [1\ \tilde{Q}_1]} \; = \tilde{Q}_1 A \xrightarrow[\text{podob. transf.}]{\text{chci}} \tilde{Q}_1 A \tilde{Q}_1 = \; \xrightarrow{\tilde{Q}_2 = [1\ \tilde{Q}_2]} \ldots$

$\Rightarrow \tilde{A} = \tilde{Q}_{n-2} \cdots \tilde{Q}_1 A \tilde{Q}_1 \cdots \tilde{Q}_{n-2} = H^* A H \ldots$

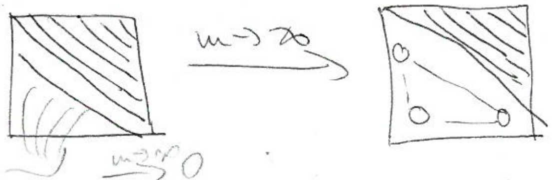
... unit. podob. transf. ... $O(n^3)$

→ QR rozklad lze pak v ∀ kroku QR-alg. počítat levně Giv. rotacemi – $O(n^2)$

+ nás. $R_m Q_m$ je levnější

dále: nechť A je horní Hes.

Urychlení konvergence – shifty

$A_m =$ 

Uvážme, že je-li $|\lambda_i| > |\lambda_{i+1}|$, pak $a^{(m)}_{i+1,i} \to 0$ lineárně s rychlostí $\left|\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right| < 1 \Rightarrow$ konv. je rychlejší, jsou-li vl. č. dobře oddělena.

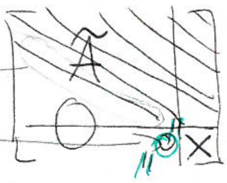
$\Rightarrow$ vol. „dobrý" shift ϱ: aby $\left|\frac{\lambda_{i+1}-\varrho}{\lambda_i-\varrho}\right| \ll \frac{|\lambda_{i+1}|}{|\lambda_i|} < 1$

$A \longmapsto A - \varrho I$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \qquad \lambda_1 - \varrho, \dots, \lambda_n - \varrho$ pro nějaké i

$\rightarrow$ chceme ϱ blízko nějakého vl. č. A_m

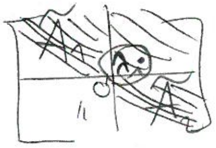
napr: $\varrho \approx \lambda_n$, pak QR na $(A - \varrho I)$ dává

$A_m - \varrho I =$ 

.... deflace – máme aproximaci vl. č. a dále počítáme jen s $\tilde{A}$ (redukce problému)

současně s tím konv. k „0" jsou další $\Rightarrow$ každá další deflace je rychlejší

• obecně může nastat i v průběhu výpočtu, že



$\Rightarrow$ problém se rozpadá na 2 menší podproblémy

volba ϱ: mnoho strategií

opět: $A_m, A_{m-1}, \dots, A$ jsou si unit. podobné DCVIČ.

shifted QR-alg.:
$$\boxed{\begin{aligned} A_{m-1} - \varrho_{m-1} I &= Q_m R_m \\ R_m Q_m + \varrho_{m-1} I &=: A_m \end{aligned}}$$

$\rightarrow \varrho_m$ upřesňujeme

~~např~~: • Rayl. quotient shift – diag prvek $a^{(m-1)}_{nn} =: \varrho_m$

př (cvič): $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \varrho_0 = 0 \Rightarrow A_0 - \varrho_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_1^{(0)} = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} = Q_1^*$, $c = 0, s = 1$

$\rightarrow G_1^{(0)} \cdot (A - \varrho_0 I)$, $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow R_1 Q_1 + \varrho_0 I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_1$

$|A - \lambda I| = +\lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \varrho_0 = 0$

PROČ NEFUNGUJE?

• Wilkinson shift – vl. č. mce $\begin{pmatrix} a^{(m-1)}_{n-1,n-1} & a^{(m-1)}_{n-1,n} \\ a^{(m-1)}_{n,n-1} & a^{(m-1)}_{nn} \end{pmatrix}$, které je blíže k $a^{(m-1)}_{nn}$

komplexní shifty pro $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

- Rayl. quot. shift je vždy $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ nemůže dobře aproximovat vl. č. v $\mathbb{C}$
- Wilk. shift: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \in sp(A) \Rightarrow \bar\lambda \in sp(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ vol. $\rho_{m-1}, \bar\rho_{m-1}$ a aplikuj současně $\Rightarrow$ nejspíš zůstat v $\mathbb{R}$

$A_{m-1} \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow A_{m-1} - \rho_{m-1} I \in \mathbb{C}^{n\times n}$, tj. $A_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$

ALE! $A_m - \bar\rho_{m-1} I \longmapsto A_{m+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Rightarrow$ konstruujeme rovnou A_{m+1}

platí: pak $a^{(m)}_{n-1,n-2} \to 0$, tj. „double deflation"

$A_m \longrightarrow$ 

$\to$ double shifted QR (~~Francis~~)

$A_{m-1} - \rho_{m-1} I = Q_m R_m$, $A_m := R_m Q_m + \rho_{m-1} I$

$A_m - \bar\rho_{m-1} I = Q_{m+1} R_{m+1}$, $A_{m+1} := R_{m+1} Q_{m+1} + \bar\rho_{m-1} I$

ozn. $M_m := (A_{m-1} - \bar\rho_{m-1} I)(A_{m-1} - \rho_{m-1} I) = \quad \in \mathbb{R}$

$= A_{m-1}^2 - (\rho_{m-1} + \bar\rho_{m-1}) A_{m-1} + \rho_{m-1}\bar\rho_{m-1} I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$\Rightarrow \exists\, \hat Q_m, \hat R_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $M_m = \hat Q_m \hat R_m = (Q_m Q_{m+1})(R_{m+1} R_m)$ D: cvič.

$A_{m+1} = Q_{m+1}^* A_m Q_{m+1} = Q_{m+1}^* Q_m^* A_{m-1} Q_m Q_{m+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

.. tj. lze konstruovat zároveň Q_m, Q_{m+1}, že $Q_m Q_{m+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

postup: $\rho_{m-1}, \bar\rho_{m-1}$ $\to$ konstruuj M a spočti jeho reálný QR rozklad $\to$ $A_{m+1} := \hat Q^T A_{m-1} \hat Q$

$\ominus$ n^3 operací

Důkazy (cvič):

- $M = (A_{m-1} - \bar{\varrho}_{m-1} I)\underbrace{(A_{m-1} - \varrho_{m-1} I)}_{= Q_m R_m} \stackrel{?}{=} (Q_m Q_{m+1})(R_{m+1} R_m)$

$= (A_{m-1} - \bar{\varrho}_{m-1} I) Q_m R_m = Q_m \underbrace{(A_m - \bar{\varrho}_{m-1} I)}_{= Q_{m+1} R_{m+1}} \cdot R_m = Q_m Q_{m+1} R_{m+1} R_m$

$A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m \Rightarrow A_{m-1} Q_m = Q_m A_m$

$\Rightarrow (A_{m-1} - \bar{\varrho}_{m-1} I) Q_m = Q_m (A_m - \bar{\varrho}_{m-1} I)$ □

- $A_{m-1} - \varrho_{m-1} I = Q_m R_m$
  $R_m Q_m + \varrho_{m-1} I =: A_m$ $\Big\} \stackrel{?}{\Rightarrow} A_m, A_{m-1}, \dots, A$ jsou unit. pod.

$A_m - \varrho_{m-1} I = R_m Q_m = Q_m^* (A_{m-1} - \varrho_{m-1} I) \cdot Q_m =$

$= Q_m^* A_{m-1} Q_m - \varrho_{m-1} \cdot I \Rightarrow \cancel{Q_m^* A_{m-1} Q_m}$

$\Rightarrow \boxed{A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m = \dots = Q_m^* \cdots Q_1^* A Q_1 \cdots Q_m}$ □

DOPOSUD: aplikace QR alg.

⊖ někdy může odečet $A - \varrho I$ vést ke ztrátě informace