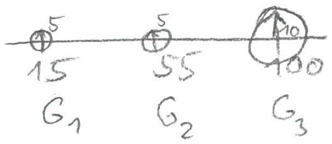
Cvič. – Gerš. kruhy

Odhadněte polohu vl. č. z Gerš. věty!

1) $A = \begin{bmatrix} 100 & 5 & 5 \\ 5 & 55 & 0 \\ 5 & 0 & 15 \end{bmatrix}$



$G_i \cap G_j = \emptyset$, $i,j = \{1,2,3\}$, $i \neq j$

$\Rightarrow \exists!\, \lambda_1 \in G_1,\ \exists!\, \lambda_2 \in G_2,\ \exists!\, \lambda_3 \in G_3$

$\Rightarrow$ A je diagonalizovatelná s navz. různými vl. č. $> 0 \Rightarrow$ <u>A je SPD</u>

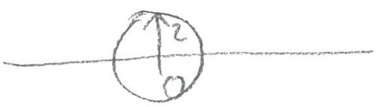
2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ kruhy nelze oddělit zpřesněním Gerš. kruhů, ale lze je zpřesnit

$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \cdot 1 \\ \alpha^{-1} \cdot 4 & 0 \end{bmatrix}$

$\alpha > 0$

$\Rightarrow \alpha := 2$

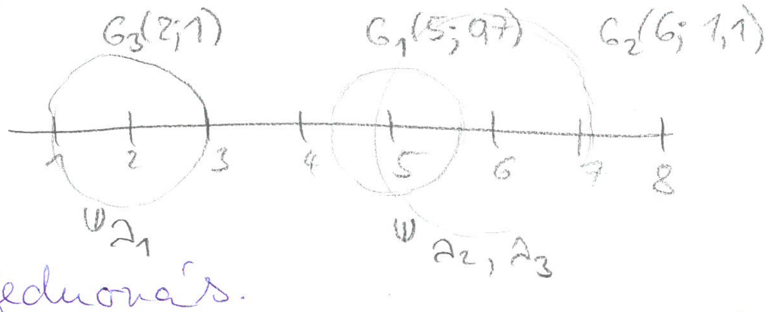


$G_1 = G_2 \ni \{\lambda_1, \lambda_2\}$

$\Rightarrow$ <u>$|\lambda_i| \leq 2$</u>, $i = 1,2$

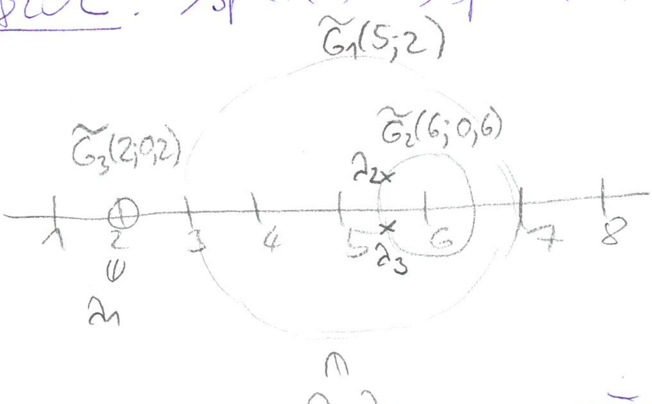
PŘESNĚ: $\lambda_{1,2} = \pm 2$

3) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ -1 & 6 & -0{,}1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$



$\Rightarrow \lambda_1 \in (1,3)$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, jednonás.

<u>trik</u>: $sp(A) = sp(A^T) \Rightarrow$ Gerš. věta na A^T



$\Rightarrow$ <u>$\lambda_1 \in \langle 1{,}8;\ 2{,}2 \rangle$</u>

$\Rightarrow$ <u>$Re(\lambda_{2,3}) \in \langle 4{,}3;\ 7 \rangle$</u>

PŘESNĚ: $\lambda_1 \approx 1{,}97$, $\lambda_{2,3} \approx 5{,}5 \pm 0{,}61$

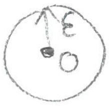
POZN: G_1, G_2 nelze oddělit řádnou pod. transf. tvaru $\begin{bmatrix}\alpha&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = P$ nebo $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\beta&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, protože

$\lambda_2 = \overline{\lambda_3}$!

4) $A_1 = \Theta$, $A_2 = \overbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ & & & 0\end{bmatrix}}^{N}$, $E = \begin{bmatrix} & \Theta \\ \boxed{\varepsilon} & \end{bmatrix} \Rightarrow \|E\| = \varepsilon$

- $A_1 = \Theta$, $A_1 + E = \begin{bmatrix} & \Theta \\ \boxed{\varepsilon} & \end{bmatrix}$, $sp(A_1) = sp(A_1+E) = \{0\}$

  $\bigcup_{i=1}^{N} G_i(A_1) = \{0\}$ $\qquad$ $\bigcup_{i=1}^{N} G_i(A_1+E) = G(0,\varepsilon)$

  $G_i(A) \ni \lambda = 0$ $\qquad$  $G(0,\varepsilon) \ni \tilde{\lambda}$ $\Rightarrow$ $|\lambda - \tilde{\lambda}| \le \varepsilon$

  z ger. kruhů

- A_2, $A_2 + E = \begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1\\ \varepsilon & & & 0\end{bmatrix}$, $sp(A_2+E) = \{\tilde{\lambda}_k \in \mathbb{C} : |\tilde{\lambda}| = \varepsilon^{1/N}\}$

  $\bigcup_{i=1}^{N} G_i(A_2) = G(0,1)$ $\qquad$ $\bigcup_{i=1}^{N} G_i(A_2+E) = G(0,1)$

   $\ni \lambda$ $\qquad$  $\ni \tilde{\lambda}$ $\qquad$ $\forall\, 0 \le \varepsilon \le 1$

$\Rightarrow |\lambda - \tilde{\lambda}| < 2$ a víc nevíme

navíc: $G_i(A_2) = G_i(A_2+E)$ pro $0 \le \varepsilon \le 1$,

tj. kruhy jsou stejné až do pert. $\|E\| = 1$

$\Rightarrow G_i(A_2)$ musí být velké, nepřesné

Využití g.V. (další):

- lokalizace kořenů polynomu

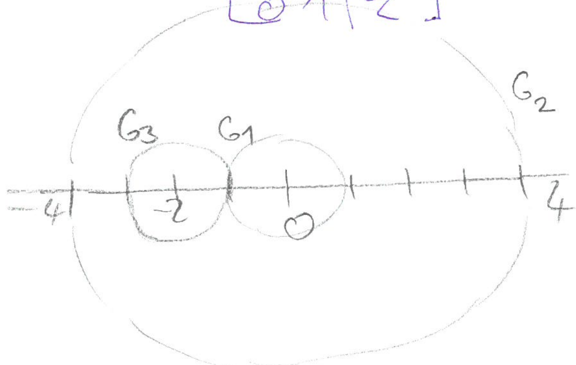
$$\left.\begin{aligned} &P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \\ &A_n := \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & & \Theta & -a_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ \Theta & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \det(A_n - \underset{\text{vl. č. } A}{\lambda} I) = (-1)^n \cdot \underset{\text{kořeny } P_n}{P_n}$$

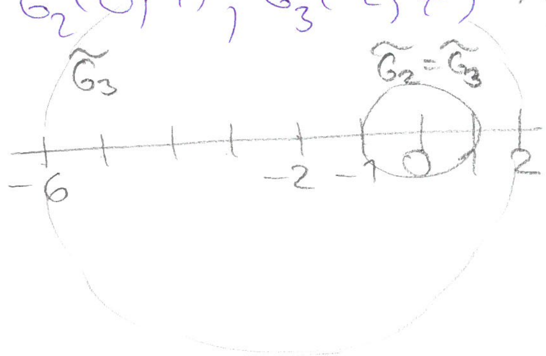
A_n ... companion matice k polynomu P_n

Př: $x^3+2x^2-3x-1=0 \Rightarrow$

$$A_3=\left[\begin{array}{cc|c}0&0&1\\ \hline 1&0&3\\ 0&1&-2\end{array}\right] \Rightarrow G_1(0,1),\ G_2(0,4),\ G_3(-2,1) \ldots A_3$$

$$\tilde{G}_1(0,1),\ \tilde{G}_2(0,1),\ \tilde{G}_3(-2,4) \ldots A_3^T$$





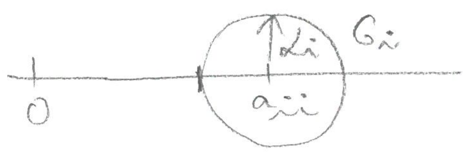
$\Rightarrow \underline{Re(x_{1,2,3}) \in \langle -4, 2\rangle}$ ... přesnost lokalizace závisí na velikosti koef. polynomu

- důkazy vět, vlastnosti matic atd.

Lemma: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je ostře diagonálně dominantní, pak A je regulární

D: A - ODD $\Rightarrow \forall i \in \{1,..,n\}: |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{N} |a_{ij}|$

$$\Rightarrow \underset{\text{střed } G_i}{|a_{ii}|} - \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ \neq i}}^{N} |a_{ij}|}_{= r_i \ldots \text{poloměr } G_i} > 0$$



$\Rightarrow 0 \notin G_i \quad \forall i \in \{1,..,n\}$

protože $\forall \lambda \in sp(A): \lambda \in G_i$ pro něj. i, pak $|\lambda| > 0$

□

PŘÍKLAD MAT. NORMY NESPLŇUJÍCÍ KONZ.:

$\|A\|_B := \max_{i,j\in\{1,\dots,N\}} |a_{ij}|$ ... velikost max. prvku,

pak obecně neplatí $\|AB\|_B \le \|A\|_B \|B\|_B$

př: $A := \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} =: B \quad \Rightarrow \|A\|_B = \|B\|_B = 1$

$\Rightarrow \|AB\|_B > 1$

pozn: $\|\cdot\|_B$ se využívá v odhadech chyby Strassen~~ova~~ alg. pro efektivní násobení matic