

## ŘETĚZOVÉ ZLOMKY A DOBRÉ APROXIMACE

**Motivace.** Chceme-li znát přibližnou hodnotu nějakého iracionálního čísla, obvykle používáme jeho (nekonečný) desetinný rozvoj. Z takového rozvoje, řekněme z rozvoje

$$3.1415926535897932384626433832795028841971693993751\dots$$

čísla  $\pi$ , ale nijak nevidíme např. to, že  $\pi$  lze velmi přesně, s chybou řádu desetimiliontin, odhadnout pomocí poměrně jednoduchého zlomku

$$\pi \sim \frac{355}{113}.$$

To vede k otázce, jaké zlomky lze považovat za vhodné aproximace iracionálních čísel (případně jaké zlomky s malým jmenovatelem lze považovat za dobré aproximace zlomků s velkým jmenovatelem).

Uvažujme zlomek  $\frac{22}{7}$ , který také aproximuje  $\pi$  s poměrně vysokou přesností, odchylka je zhruba 0.00126. Chceme-li se dostat k  $\pi$  blíže, můžeme použít zlomek  $\frac{179}{57}$ , který má odchylku zhruba 0.00124. Je ovšem otázka, zda chceme  $\frac{179}{57}$  opravdu považovat za lepší aproximaci. Snížení odchylky o necelá dvě procenta jsme totiž zaplatili více než osminásobně větším jmenovatelem. Pojem *dobré aproximace*, který budeme sledovat, vychází z rozhodnutí nezvyšovat jmenovatele, dokud příslušné zlepšení nebude nejméně toliknásobné, kolikanásobné je zvýšení jmenovatele. V takovém případě překoná odhad  $\frac{22}{7}$  až zlomek  $\frac{333}{106}$ , jehož odchylka od  $\pi$  je zhruba  $8.3 \cdot 10^{-5}$ . To je podle zvolené strategie lepší, ačkoli jen těsně: jmenovatel se zvýšil asi 15.14-krát, zatímco odchylka se zmenšila 15.18-krát. Na další zlepšení, tentokrát výrazné, není nutné, jak jsme už zmínili, čekat dlouho; zvýšením jmenovatele ze 106 na 113 dosáhneme snížení odchylky téměř třistanásobného.

**Definice dobré aproximace.** Předchozí úvahy ukazují, že za dobrou považujeme aproximaci čísla  $\alpha$ , která má co nejmenší součin jmenovatele a odchylky zlomku od aproximovaného čísla; snažíme se tedy minimalizovat hodnotu

$$q \cdot \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| = |q\alpha - p|.$$

Z tohoto vztahu dostáváme jinou přirozenou charakteristiku dobré aproximace: je to takový násobek  $\alpha$ , který je blízko celému číslu, blíže než všechny menší násobky. V případě  $\pi$  ukazuje příslušnou odchylku u zmíněných jmenovatelů následující tabulka:

$q$	zaokrouhlení $q \cdot \pi$	zaokrouhlovací chyba
7	22	0.00885
57	179	0.07078
106	333	0.00882
113	355	0.00003

Označme  $\|r\|$  jako chybu zaokrouhlení  $r \in \mathbb{R}$ , tedy jako vzdálenost  $r$  od nejbližšího celého čísla. Nyní už můžeme definovat dobré aproximace formálně.

*Definice.* Řekněme, že dvojice  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  je *dobrou aproximací* čísla  $\alpha \in \mathbb{R}$ , pokud pro libovolné přirozené  $q'$  menší než  $q$  platí

$$\|q\alpha\| < \|q'\alpha\|$$

a navíc

$$\|q\alpha\| = |q\alpha - p|.$$

Je vidět, že aproximace je dána především číslem  $q$ , číslo  $p$  se dopočítá jednoduše jako zaokrouhlení  $q\alpha$ . Tedy  $p$  je dáno jednoznačně vždy, kromě případu, kdy  $q\alpha$  je lichý násobek  $1/2$  a chyba zaokrouhlení je  $1/2$ . To je ovšem největší možná chyba, která je přípustná nanejvýš pro první dobrou aproximaci, což je vždy aproximace celočíselná, jak plyne přímo z definice. Kromě situace, kdy aproximujeme racionální číslo tvaru  $2z+1/2$ , je tedy posloupnost dobrých aproximací dána jednoznačně.

Je také zřejmé, že čísla  $p$  a  $q$  definující dobrou aproximaci musejí být nesoudělná, protože  $(p/d, q/d)$ , kde  $d = \text{nsd}(p, q)$ , je pro  $d > 1$  určitě lepší aproximací než  $(p, q)$ .

Vzhledem k tomu, že u dobrých aproximací hrají významnou roli právě jmenovatelé (a čitatelé se jen dopočítávají), říkáme jmenovatelům dobrých aproximací *dobré jmenovatele*.

*Konvence.* Z praktického hlediska je vhodné považovat za první dobrou aproximaci čísla  $\alpha$  vždy jeho spodní část, celé číslo  $\lfloor \alpha \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq \alpha\}$ . A to přesto, že je dobrou aproximací podle uvedené definice pouze v případě, kdy  $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor \leq 1/2$ . V takto upravené definici má tedy např. číslo  $\sqrt{8}$  dvě dobré celočíselné aproximace (tedy dobré aproximace se jmenovatelem jedna), a to 2 a 3.

**Dobré aproximace aproximují libovolně dobře.** Pokud je  $\alpha = a/b$  racionální, je poslední dobrou aproximací právě  $(a, b)$  (předpokládáme, že  $a/b$  je ve zkráceném tvaru) s nulovou odchylkou.

Pro iracionální  $\alpha$  samozřejmě nulové odchylky nedosáhneme nikdy, takže je otázkou, jestli můžeme  $\alpha$  aproximovat libovolně přesně. Je zřejmé, že můžeme nacházet stále lepší racionální aproximace, ale není na první pohled zřejmé, že to budou aproximace dobré, tj. že jmenovatel neporoste v porovnání se zpřesněním aproximace příliš rychle.

Pokud ale použijeme definici dobré aproximace čísla  $\alpha$ , vidíme, že to jsou podle definice „rekordy“ v posloupnosti

$$\|1 \cdot \alpha\|, \|2 \cdot \alpha\|, \|3 \cdot \alpha\|, \dots, \|n \cdot \alpha\|, \dots,$$

což je posloupnost čísel z intervalu  $[0, 1)$ .

Označme  $\langle \alpha \rangle$  necelou část čísla  $\alpha$ , tedy  $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ , jinak též  $\alpha \bmod 1$ . S rostoucím  $n$  bude množina bodů  $\langle q \cdot \alpha \rangle$ ,  $q = 1, 2, \dots, n$ , v intervalu  $[0, 1)$  stále hustší, přesněji řečeno, pro každé  $n$  existují dva body (počítáme i krajní body intervalu), které jsou od sebe vzdáleny nejvýše  $1/n+1$ . Pokud je např.  $\langle k \cdot \alpha \rangle$  vzdalena nejvýše  $1/n+1$  od nuly nebo jedničky, je zjevně  $\|k \cdot \alpha\| \leq 1/n+1$ . Pokud jsou oba blízké body vnitřní, tedy

$$0 < \langle i \cdot \alpha \rangle - \langle j \cdot \alpha \rangle \leq 1/n+1,$$

pak je  $\|k \cdot \alpha\| \leq 1/n+1$  pro  $k = |i - j|$ . Všimněme si, že mohou nastat dva případy:

- $i > j$ ,  $k = i - j$  a  $\langle k \cdot \alpha \rangle$  je blízko nule (zaokrouhlujeme dolů);
- $i < j$ ,  $k = j - i$  a  $\langle k \cdot \alpha \rangle$  je blízko jedničky (zaokrouhlujeme nahoru).

Uvažujme nyní dva po sobě jdoucí dobré jmenovatele  $q < q'$ . Protože je  $\|q \cdot \alpha\|$  nejmenším číslem až po  $\|(q' - 1) \cdot \alpha\|$ , plyne z výše provedených úvah

$$(\diamond) \quad \|q \cdot \alpha\| \leq \frac{1}{q'}.$$

Dále z těchto úvah plyne, že dobré aproximace jsou libovolně přesné, a v případě iracionálního čísla je jich tedy nekonečně mnoho.

**Vlastnosti posloupnosti dobrých aproximací.** Označme  $(p_i, q_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  posloupnost dobrých aproximací nějakého čísla  $\alpha$ . Posloupnost je konečná, právě když je  $\alpha$  racionální. Výše jsme viděli, že

$$\|q_i \cdot \alpha\| = q_i \cdot \left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{1}{q_{i+1}},$$

odtud

$$\left| \alpha - \frac{p_i}{q_i} \right| \leq \frac{1}{q_i \cdot q_{i+1}}.$$

Připomeňme, že podle naší konvence je  $(p_1, q_1) = (\lfloor \alpha \rfloor, 1)$ , což na platnosti uvedených nerovností nic nemění. Uvažme dva po sobě jdoucí dobré jmenovatele  $q_i$  a  $q_{i+1}$ . Pokud by byla obě čísla  $\langle q_i \cdot \alpha \rangle$  a  $\langle q_{i+1} \cdot \alpha \rangle$  blízko nule, dostali bychom, že  $\langle (q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha \rangle$  je velmi blízko jedničky, přesněji  $\| (q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha \| = \| q_i \cdot \alpha \| - \| q_{i+1} \cdot \alpha \| < \| q_i \cdot \alpha \|$ , přičemž je ale  $q_{i+1} - q_i < q_{i+1}$ . To je spor s tím, že  $q_{i+1}$  je dobrý jmenovatel následující vzápětí po dobrém jmenovateli  $q_i$ .

Výše uvedené výpočty jsou názorné počítáme-li „modulo jedna“. Je ale také možné (ale méně elegantní) počítat s pomocí čitatelů: Vidíme, že  $q_{i+1} \cdot \alpha - p_{i+1} < q_i \cdot \alpha - p_i$  jsou dvě kladná čísla. Proto platí, že  $(q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha - (p_{i+1} - p_i)$  je číslo záporné, přičemž  $(p_{i+1} - p_i) - (q_{i+1} - q_i) \cdot \alpha < q_i \cdot \alpha - p_i$ .

Podobně dostaneme spor, pokud budeme předpokládat, že obě čísla  $\langle q_i \cdot \alpha \rangle$  a  $\langle q_{i+1} \cdot \alpha \rangle$  jsou blízko jedničky. Z toho je vidět, že znaménka čísel  $q_i \alpha - p_i$  se střídají. Jinak řečeno, pro liché  $i$  (a iracionální  $\alpha$ ) je

$$(\clubsuit) \quad \frac{p_i}{q_i} < \alpha < \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}.$$

(Liché dobré aproximace dávají vždy spodní odhady díky přijaté konvenci, že první dobrou aproximací je dolní celá část.)

Délku intervalu, kterým je  $\alpha$  odhadnuto dvěma po sobě jdoucími dobrými aproximacemi lze díky následujícímu tvrzení určit přesně jako

$$\left| \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} - \frac{p_i}{q_i} \right| = \frac{1}{q_i q_{i+1}}.$$

*Tvrzení.*

$$(\spadesuit) \quad p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i = (-1)^i$$

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme pro liché  $i$ , pro sudé  $i$  je důkaz obdobný. Z nerovností  $(\clubsuit)$  a  $(\diamond)$  dostáváme, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_{i+1}} &\geq \|q_i \cdot \alpha\| = q_i \alpha - p_i > 0, \\ \frac{1}{q_i} &> \|q_{i+1} \cdot \alpha\| = p_{i+1} - q_{i+1} \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

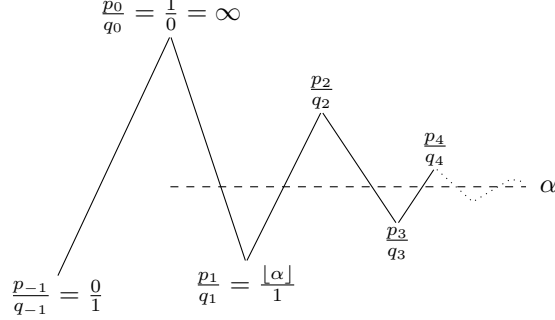
Odtud

$$2 > q_{i+1} q_i \alpha - p_i q_{i+1} + q_i p_{i+1} - q_{i+1} q_i \alpha = q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} > 0.$$

Tedy  $q_i p_{i+1} - p_i q_{i+1} = 1$  a důkaz je hotov.  $\square$

Nyní již můžeme dokázat následující tvrzení, které popisuje rekurzivní proces konstrukce dobrých aproximací pomocí posloupnosti přirozených čísel. Kvůli začátku procesu dodefinujeme  $p_{-1} = 0$ ,  $q_{-1} = 1$  a  $p_0 = 1$ ,  $q_0 = 0$ , což odpovídá „minus první dobré aproximaci“ pomocí nuly a „nulté dobré aproximaci“ pomocí

$+\infty$ . Všimněme si, že tato volba odpovídá tomu, že sudé aproximace jsou horní a liché spodní. Navíc platí vztah ( $\spadesuit$ ) i pro  $i = -1$  a  $i = 0$ .



*Tvrzení.* Existují přirozená čísla  $a_0, a_1, \dots$  taková, že pro všechna  $i \geq 0$  platí

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= a_i p_i + p_{i-1}, \\ q_{i+1} &= a_i q_i + q_{i-1}. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

*Důkaz.* Podle předchozího tvrzení platí

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i,$$

odkud plyne

$$q_i (p_{i+1} - p_{i-1}) = p_i (q_{i+1} - q_{i-1}).$$

Protože jsou čísla  $p_i$  a  $q_i$  nesoudělná, je číslo  $a_i$  definované jako

$$a_i := \frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{p_i} = \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{q_i}$$

přirozené a dokazované vztahy platí.  $\square$

Jak získat posloupnost  $(a_i)$  je hezky vidět ze souvislosti mezi dobrými aproximacemi a řetězovými zlomky, kterou ukážeme nyní.

**Řetězové zlomky.** Nechť  $a_0$  a  $a_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$  jsou reálná čísla. Pak zápisem  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$  rozumíme hodnotu řetězového zlomku

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

Souvislost mezi řetězovými zlomky a dobrými aproximacemi je dána následujícím tvrzením.

*Tvrzení.* Nechť

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 0, & q_{-1} &= 1, \\ p_0 &= 1, & q_0 &= 0. \end{aligned}$$

a  $p_i, q_i$ ,  $i \geq 1$  jsou dána předpisem ( $\heartsuit$ ), kde  $a_i$ ,  $i \geq 0$  jsou reálná čísla a  $a_1 \neq 0$  pro  $i \geq 0$ . Pak pro  $i \geq 0$  platí

a)

$$\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}} = [a_0, a_1, \dots, a_i],$$

b)

$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i = (-1)^i.$$

*Důkaz.* a) Postupujeme indukci. Pro  $i = 0$  dostáváme  $p_1 = a_0$ ,  $q_1 = 1$  a tvrzení platí. Nechť platí pro všechna  $j = 0, 1, 2, \dots, i - 1$ . Zřejmě platí

$$[a_0, a_1, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i] = [a_0, a_1, \dots, a_{i-2}, a'_{i-1}], \quad \text{kde } a'_{i-1} = a_{i-1} + \frac{1}{a_i}.$$

Z indukčního předpokladu dostáváme

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{i-2}, a'_{i-1}] &= \frac{p_{i-1} a'_{i-1} + p_{i-2}}{q_{i-1} a'_{i-1} + q_{i-2}} = \frac{p_{i-1} a_{i-1} + p_{i-1}/a_i + p_{i-2}}{q_{i-1} a_{i-1} + q_{i-1}/a_i + q_{i-2}} = \\ &= \frac{p_i + p_{i-1}/a_i}{q_i + q_{i-1}/a_i} = \frac{p_i a_i + p_{i-1}}{q_i a_i + q_{i-1}} = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \end{aligned}$$

tedy

$$[a_0, a_1, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}, a_i] = \frac{p_{i+1}}{q_{i+1}},$$

což jsme chtěli ukázat. b) Pro důkaz druhé části využijeme pozorování, že

$$p_i q_{i+1} - p_{i+1} q_i$$

je determinant matice

$$M_i = \begin{pmatrix} q_{i+1} & q_i \\ p_{i+1} & p_i \end{pmatrix}.$$

Přitom platí, že  $|M_{-1}| = -1$  a

$$M_{i+1} = M_i \cdot \begin{pmatrix} a_{i+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tvrzení tedy plyne z pravidla o determinantu součinu.  $\square$

**Dobré aproximace, řetězové zlomky a Eukleidův algoritmus.** Řekneme, že řetězový zlomek  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  je *čistý*, pokud  $a_0$  je celé číslo a  $a_i$ ,  $i \geq 1$  jsou kladná celá čísla. V případě, že je čistý řetězový zlomek konečný (v tom smyslu, že posloupnost  $(a_i)$  je konečná), požadujeme ještě, aby poslední člen byl větší než jedna. Tento poslední požadavek plyne z rovnosti

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_i, 1] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_i + 1].$$

Jinak řečeno, výraz

$$a_i + \frac{1}{1}$$

na konci řetězového zlomku zakážeme. Zlomky získané nějakým prefixem řetězového zlomku se nazývají jeho *konvergenty*. Protože posloupnost konvergentů odpovídá posloupnosti dobrých aproximací, má každé číslo zjevně jediné vyjádření pomocí čistého řetězového zlomku. To je ovšem vidět i přímo. Předpokládejme, že

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots] = [a'_0, a'_1, a'_2, \dots],$$

a necht'  $a_i \neq a'_i$  je první číslo, ve kterém se zlomky liší. Označme

$$\varepsilon = [a_i, a_{i+1}, \dots] = a_i + \frac{1}{[a_{i+1}, a_{i+2}, \dots]},$$

$$\varepsilon' = [a'_i, a'_{i+1}, \dots] = a'_i + \frac{1}{[a'_{i+1}, a'_{i+2}, \dots]}.$$

Pak  $\alpha$  můžeme vyjádřit pomocí dvou nečistých zlomků jako

$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \varepsilon] = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, \varepsilon'].$$

Je snadno vidět, že tato rovnost implikuje  $\varepsilon = \varepsilon'$ . To ale neplatí, protože číslo  $a_i$  se liší od  $a'_i$  alespoň o jedničku, zatímco  $1/[a_{i+1}, a_{i+2}, \dots]$  a  $1/[a'_{i+1}, a'_{i+2}, \dots]$  jsou dvě kladná čísla ostře menší než jedna. Ostrost nerovnosti v předchozí větě je podmíněna zákazem, že řetězový zlomek nesmí končit jedničkou - bez něj by existovala výše uvedená dvojnásobnost.

Mějme nyní nějaké číslo  $\alpha$ , např. číslo  $\pi$  jako v úvodu. Viděli jsme, že jeho dobré aproximace jsou dány posloupností čísel  $a_0$ , přičemž tato čísla současně umožňují zapsat  $\alpha$  jako řetězový zlomek. Jak ale tuto posloupnost  $a_i$  rychle najít? Číslo  $a_i$  se objevila jako

$$\left| \frac{q_{i+1} - q_{i-1}}{q_i} \right|,$$

můžeme je tedy odvodit ze znalosti dobrých aproximací. To je ale nešikovné. Čekali bychom spíše, že dobré aproximace najdeme pomocí znalosti posloupnosti  $a_i$ . Efektivní algoritmus pro konstrukci této posloupnosti poskytují právě řetězové zlomky. Označme

$$\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \dots],$$

tedy  $\alpha = \alpha_0$ . Pak máme

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}},$$

kde  $1/\alpha_{i+1}$  je ostře menší než jedna. To znamená, že platí

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \quad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\langle \alpha_i \rangle},$$

což je hledaný algoritmus.

Jedná se vlastně o Eukleidův algoritmus, ve kterém hledáme „největšího společného dělitele“ dvou reálných čísel. To odpovídá antickému problému souměřitelnosti, nebo nesouměřitelnosti dvou veličin, např. délek dvou úseček, ve kterém mají řetězové zlomky svůj původ. V případě  $\pi$  nás např. zajímá poměr obvodu kruhu, označme ho  $S$ , a průměru  $D$ . Zjistíme, že se průměr do obvodu vejde třikrát a ještě zbude délka  $Z$ . To je dělení se zbytkem z Eukleidova algoritmu:

$$S = 3D + Z.$$

V řeči poměru obou délek dostáváme naše

$$\pi = \frac{S}{D} = \left[ \frac{S}{D} \right] + \frac{Z}{D}.$$

Dále je třeba zjistit, jaká část  $D$  zbylé  $Z$  je, tedy vyjádřit  $D/Z$ , a algoritmus pokračuje.

Začátek řetězového zlomku pro  $\pi$  je  $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, \dots]$ . Číslo 292 na pátém místě indikuje na začátku zmíněnou výbornou aproximaci zlomkem  $[3, 7, 15, 1] = \frac{355}{113}$ . Napišeme-li totiž

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \varepsilon}}}$$

je zaokrouhlovací chyba  $\varepsilon$ , které se dopouštíme v odhadu  $[3, 7, 15, 1]$ , menší než  $\frac{1}{292}$ .

Algoritmus dělení intervalů se zbytkem je také dobře vidět v hledání dobrých aproximací jako rekordů hodnot  $\|q \cdot \alpha\|$ . Máme-li dva po sobě jdoucí rekordy  $\|q_i \cdot \alpha\|$  a  $\|q_{i+1} \cdot \alpha\|$ , můžeme najít další rekord jako zbytek při dělení délky  $\|q_i \cdot \alpha\|$  délkou  $\|q_{i+1} \cdot \alpha\|$ . Položíme-li tedy

$$a_{i+1} = \left\lfloor \frac{\|q_i \cdot \alpha\|}{\|q_{i+1} \cdot \alpha\|} \right\rfloor,$$

můžeme nalézt lepší aproximaci jako

$$\|q_{i+2} \cdot \alpha\| = \|q_i \cdot \alpha\| - a_{i+1} \|q_{i+1} \cdot \alpha\|.$$

Vzhledem ke střídání znamének odhadů dostáváme

$$p_{i+2} - q_{i+2} \cdot \alpha = p_i - q_i \cdot \alpha + a_{i+1}(p_{i+1} - q_{i+1} \cdot \alpha),$$

což je jiný způsob, jak názorně nahlédnout vztah

$$a_{i+1} = \frac{q_{i+2} - q_i}{q_{i+1}} = \frac{p_{i+2} - p_i}{p_{i+1}}.$$

**Aplikace.** Řetězové zlomky jsou, jak jsme viděli, účinným nástrojem pro racionální aproximaci iracionálních čísel. Důležité jsou ale i pro aproximaci čísel racionálních. Předpokládejme, že máme nepřesnou hodnotu nějakého zlomku, vzniklou např. zaokrouhlením nebo nepřesností měření. Příkladem takové situace je Shorův kvantový algoritmus pro faktorizaci. Chceme-li původní zlomek odhalit, použijeme řetězový rozvoj nepřesné hodnoty.

*Příklad.* Máme hodnotu  $h = 0.15328$ , o které víme, že je zaokrouhlením (s přesností na stotisíciny) nějakého podílu nejvýše osmibitových čísel. Řetězový rozvoj  $h$  je  $[0, 6, 1, 1, 9, 1, 10]$  s konvergenty:

$$\left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{13}, \frac{19}{124}, \frac{21}{137}, \frac{229}{1494}, \frac{479}{3125}\right).$$

Ze zlomků se jmenovatelem i čitatelem nejvýše osmibitovými je pouze  $\frac{21}{137}$  zaokrouhleno na stotisíciny rovno  $h$ .

zlomek	zaokrouhlení
$\frac{1}{6}$	0.16667
$\frac{1}{7}$	0.14286
$\frac{2}{13}$	0.15385
$\frac{19}{124}$	0.15323
$\frac{21}{137}$	0.15328

Vzniká samozřejmě otázka, jestli jsme nějaký zlomek se stejným zaokrouhlením v řetězovém rozvoji neminuli. Na to odpovídá následující tvrzení.

*Tvrzení.* Je-li

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q^2},$$

pak je zlomek  $p/q$  konvergentem  $\alpha$ .

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $q$  je nesoudělné s  $p$ . Chceme ukázat, že je  $q$  dobrým jmenovatelem. Necht' to není pravda. Pak existuje nějaké  $q' < q$  takové, že  $\|q' \cdot \alpha\| \leq \|q \cdot \alpha\|$ . Tedy pro nějaké  $p'$  platí

$$\left| \frac{p'}{q'} - \alpha \right| \leq \frac{q}{q'} \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2qq'},$$

odkud dostáváme

$$\left| \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right| \leq \left| \frac{p'}{q'} - \alpha \right| + \left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \leq \frac{1}{2qq'} + \frac{1}{2q^2} < \frac{1}{qq'}.$$

To je spor, protože

$$\left| \frac{p'}{q'} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|p'q - pq'|}{qq'} \geq \frac{1}{q'q}.$$

Ukázali jsme, že  $q$  je dobrým jmenovatelem. Protože  $|p - q\alpha| \leq 1/2$ , je  $p$  zaokrouhlením  $q\alpha$ , a tedy  $(p, q)$  je dobrá aproximace a  $p/q$  je konvergent  $\alpha$ .  $\square$

V uvedeném příkladu je jmenovatel menší než 256 a zaokrouhlovací chyba je nejvýše  $5 \cdot 10^{-6}$ . Protože

$$5 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2 \cdot 256^2},$$

vidíme, že hledaný zlomek je skutečně jedním z konvergentů.



<p style="text-align: center;">Eukleidův algoritmus</p> <hr/> $ \begin{array}{lll} p_{-1} = 0 & q_{-1} = 1 & \beta_{-1} = c \\ p_0 = 1 & q_0 = 1 & \beta_0 = d \end{array} $ $\beta_{i-1} = a_i \beta_i + \beta_{i+1}$	<p style="text-align: center;">Řetězové zlomky</p> <hr/> $ \begin{array}{lll} p_{-1} = 0 & q_{-1} = 1 & \beta_{-1} = \alpha \\ p_0 = 0 & q_0 = 1 & \beta_0 = 1 \\ & \alpha_i = \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} \\ \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} = a_i + \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \iff \alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \end{array} $
<p style="text-align: center;">Eukleidův algoritmus</p> <hr/> $ \begin{array}{lll} \tilde{p}_{-1} = 0 & \tilde{q}_{-1} = 1 & \beta_{-1} = c \\ \tilde{p}_0 = 1 & \tilde{q}_0 = 0 & \beta_0 = d \end{array} $ $\beta_{i-1} = a_i \beta_i + \beta_{i+1}$	<p style="text-align: center;">Řetězové zlomky</p> <hr/> $ \begin{array}{lll} p_{-1} = 0 & q_{-1} = 1 & \beta_{-1} = \alpha \\ p_0 = 1 & q_0 = 0 & \beta_0 = 1 \\ & \alpha_i = \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} \\ \frac{\beta_{i-1}}{\beta_i} = a_i + \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} \iff \alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}} \end{array} $
<p style="text-align: center;">Eukleidův algoritmus</p> $ \begin{array}{lll} p_{-1} = 0 & q_{-1} = 1 & \beta_{-1} = \alpha \\ p_0 = 0 & q_0 = 1 & \beta_0 = 1 \end{array} $	<p style="text-align: center;">Řetězové zlomky</p>