Diracovo značení: přehled

- Prvek u unitárního prostoru V značíme $|u\rangle$.
- Každému vektoru $u \in V$ odpovídá prvek duálního prostoru $V^\dagger$, který značíme $\langle u|$. Je to lineární forma $f_u : V \to \mathbb{C}$, definovaná předpisem
$$f_u(v) := u \odot v \,,$$
kde $u, v \in V$. Základní motivací pro Diracovo značení je možnost psát $\langle u|v\rangle$, namísto $f_u(v)$, což odpovídá používanému alternativnímu zápisu skalárního součinu $\odot$. Přísně vzato je tedy zápis $\langle u|v\rangle$ zkratkou pro $\langle u|(|v\rangle)$, přičemž rovnost $\langle u|(|v\rangle) = \langle u|v\rangle$ lze chápat jako definici zobrazení $\langle u|$ (neboli f_u).
- Je-li A lineární zobrazení $V \to V$, je zápis $\langle u|A|v\rangle$ zkratkou pro $f_u(A(v))$. Zápis Av (v Diracově zápisu $A|v\rangle$), který je zkratkou pro $A(v)$ (tj. $A(|v\rangle)$), je ostatně běžně používán. Jedná se vlastně o identifikaci zobrazení A a jeho matice (vzhledem k dané bázi). Zápisem $\langle u|A$ rozumíme lineární zobrazení definované vztahem
$$(\langle u|A)(v) := \langle u|A|v\rangle = \langle u|(A|v\rangle)\,.$$
Zápis $\langle u|A|v\rangle$ lze tedy chápat v dvojím uzávorkování beze změny výsledku. To opět přesně odpovídá asociativitě maticového násobení (tj. asociativitě skládání zobrazení).
- Zápisem $|u\rangle\langle v|$ rozumíme lineární zobrazení definované předpisem
$$(|u\rangle\langle v|)(w) := u(v \odot w) = (v \odot w)u.$$
Zápis $|u\rangle\langle v|w\rangle$ lze tedy opět uzávorkovat dvěma způsoby:
$$|u\rangle\langle v|w\rangle = (|u\rangle\langle v|)|w\rangle = |u\rangle(\langle v|w\rangle).$$
- Kombinací předchozích bodů dostáváme

$$
\begin{aligned}
&\langle z|u\rangle\langle v|w\rangle = \\
&= \big(\langle z|(|u\rangle\langle v|)\big)(|w\rangle) && \text{operátor } \langle z|(|u\rangle\langle v|) \text{ aplikovaný na } w,\\
&= \langle z|\big((|u\rangle\langle v|)(|w\rangle)\big) && \text{lineární forma } f_z \text{ aplikovaná na } (|u\rangle\langle v|)(w),\\
&= \langle z|\big(|u\rangle(\langle v|w\rangle)\big) && \text{lineární forma } f_z \text{ aplikovaná na } f_v(w)u,\\
&= \big((\langle z|u\rangle)\langle v|\big)(|w\rangle) && \text{lineární forma } f_{f_z(u)v} \text{ aplikovaná na } w,\\
&= (\langle z|u\rangle)(\langle v|w\rangle) && \text{součin komplexních čísel } f_z(u) \text{ a } f_v(w).
\end{aligned}
$$

Poznámka: Největší nepohodlí při používání Diracova značení může vzniknout při snaze zapsat např. skalární součin u a $v + w$. Měli bychom to psát takto?
$$\big\langle u\big||v\rangle + |w\rangle\big\rangle$$
Nebo snad dokonce takto?
$$\big\langle |u\rangle\big||v\rangle + |w\rangle\big\rangle$$
Co znamenají hrozivě vyhlížející symboly $\big\langle |u\rangle\big|$ nebo $\big||v\rangle\big\rangle$?

Nebudeme-li ale používat značení mechanicky a uvědomíme si, že takový skalární součin je aplikací formy f_u na vektor $v + w$, nabízí se elegantní zápis
$$\langle u|(|v\rangle + |w\rangle).$$