Výpočet SVD obecné matice $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ (1)

z definice: σ_i = vl. čísla matic A^TA, AA^T (nenulová)

$A = U\Sigma V^T$ $\quad v_i, u_i$ = vl. vekt. matic —||—

⊖ numericky nevhodné, neboť „mocnění" matice ztrácí přesnost spočtených čísel

přímý přístup: 2 fáze

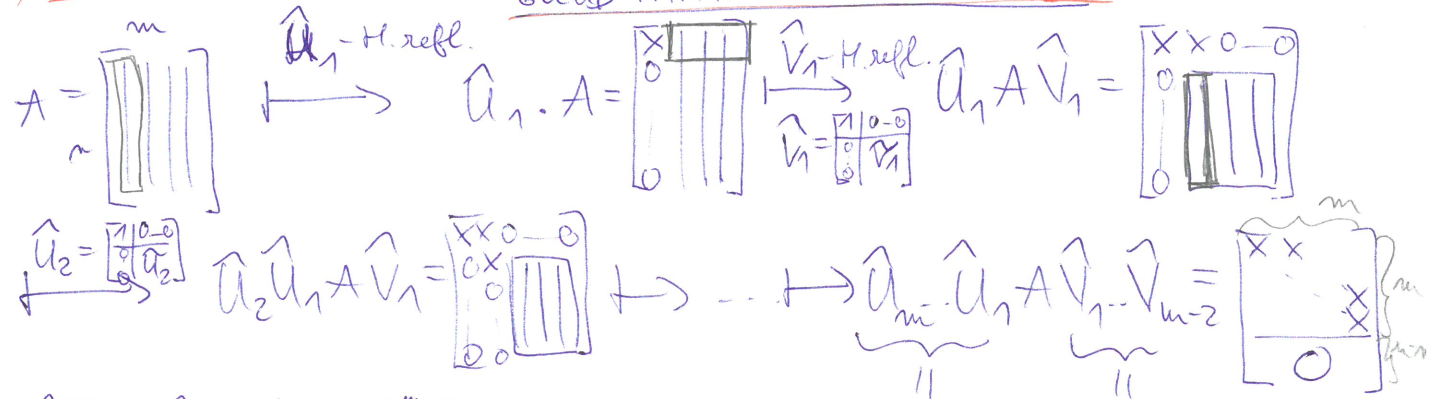
1, transformace A na jednodušší tvar

2, výpočet SVD pro redukovanou matici

chci $A = U\Sigma V^T$ => mohu A zleva/zprava upravit lib. unit. transformacemi zleva / zprava → nejjednodušší tvar, který lze získat unit. transf. (Giv. rot., Hous. refl.) je bidiagon.

1, bidiagonální redukce: BÚNO $n \ge m$

GOLUB-KAHANOVA PŘÍMÁ BIDIAG.



$$\hat U^T A \hat V = \hat B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

cena: cca 2x složitější QR rozklad ... $O(n^3)$

pozn: je-li $n \gg m$, pak se vyplatí redukce ve dvou krocích

a, $A = QR = [Q_1\ Q_2]\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ ... H. refl. pouze zleva ($m\times$)

b, $\tilde R = \tilde U \tilde B \tilde V^T$ ... bid. redukce pro malou matici

$$\Longrightarrow A = \underbrace{[Q_1 Q_2]\begin{bmatrix}\tilde{U} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}}_{=:\hat{U}^*} \underbrace{\begin{bmatrix}\tilde{B}\\ 0\end{bmatrix}}_{=\hat{B}} \underbrace{\tilde{V}^T}_{=\hat{V}^T}$$

2) **výpočet SVD pro** $\tilde{B} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{n-1} & \gamma_{n-1}\\ & & & \beta_n\end{bmatrix} \overset{?}{=} U \Sigma V^T$

BÚNO: $\beta_i \neq 0, \gamma_i \neq 0 \ \forall i$

jinak: $\tilde{B} = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & 0\\ \hline 0 & B_2\end{array}\right]$ a lze počítat zvlášť SVD pro B_1 a B_2

Golub-Reinschův alg. = modifikace Francisova alg. pro výpočet SVD pro horní bidiag. mat.

idea: $C := \begin{bmatrix}0 & B^T\\ B & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}V & 0\\ 0 & U\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \Sigma\\ \Sigma & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V & 0\\ 0 & U\end{bmatrix}^T$ .. symetr. mce

platí: $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ .. sing. č. B, jak
u_i, v_i .. sing. vekt. B
$sp(C) \overset{(*)}{=} \{\sigma_1, \dots, \sigma_n, -\sigma_1, \dots, -\sigma_n\}$ a příslušné vl. vekt. jsou $\begin{pmatrix}v_1\\ u_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}v_n\\ u_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}v_1\\ -u_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}v_n\\ -u_n\end{pmatrix}$.

D(ců č.): $\begin{bmatrix}0 & B^T\\ B & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}v_i\\ u_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B^T u_i\\ B v_i\end{pmatrix} = \sigma_i \begin{pmatrix}v_i\\ u_i\end{pmatrix}$

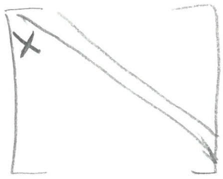
$\begin{bmatrix}0 & B^T\\ B & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_i\\ -u_i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-B^T u_i\\ B v_i\end{pmatrix} = -\sigma_i \begin{pmatrix}v_i\\ -u_i\end{pmatrix}$ $\square$

$\Rightarrow$ aplikujeme Franc. alg. na sym. mci $\tilde{C}$, kde provedeme permutaci $P = [e_1 e_{n+1} e_2 e_{n+2} \dots e_{2n}, e_{2n}]$

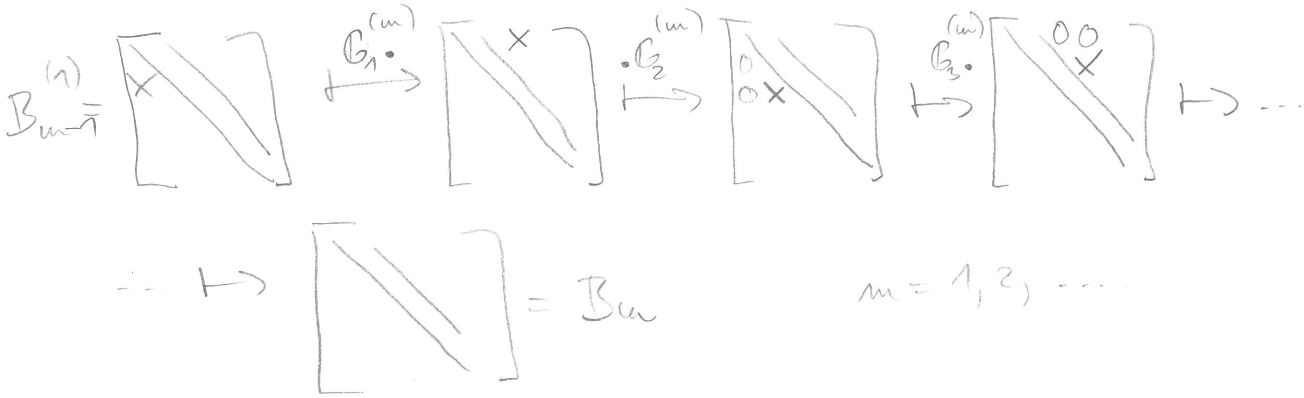
$$P^T C P = \begin{bmatrix}0 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & 0 & \gamma_1 & & \\ & \gamma_1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & & \beta_n\\ & & & \beta_n & 0\end{bmatrix} =: \tilde{C}$$

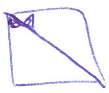
$\rightarrow$ protože platí (*), provádíme double shift vždy s $\pm \rho_n$

implementace:

⇒ nekonstruujeme C ani $\tilde{C}$! – alg. lze přepsat přímo pro matici B, kde provedeme vždy 1. create bulge  $= B_{m-1}^{(1)}$

2. chasing … aplikací Giv. rot. střídavě zleva a zprava



⇒ $B_m \xmapsto{m\to\infty} \Sigma =$  a U, V lze získat akumulací všech Giv. rot. konstruovaných během výpočtu