Predikovatelný proces

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) = \sigma\left(\{\{0\}\times A,\ A\in\mathcal{F}_0\}\cup\{(s,t]\times A,\ A\in\mathcal{F}_s\}\right)$$

FILTRACE

OTEVŘ. UZAVŘ.

X $\{(s,\omega);\ X_s(\omega)\le a\}\in\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)\ \forall a\in\mathbb{R}$

Jednoduchý predikovatelný proces

$$\xi_0\cdot\mathbb{1}_{\{0\}\times A}+\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\mathbb{1}_{(t_i,t_{i+1}]\times A}$$

ξ_0 je $\mathcal{F}_0$ měřit. n. vel. ξ_i je $\mathcal{F}_{t_i}$ měř. náh. vel.

$A\in\mathcal{F}_0$ $A\in\mathcal{F}_{t_i}$

V čase t_i známe hodnotu jednoduchého predik. procesu pro celý int. $(t_i,t_{i+1}]$

Tvrzení 12: (predikovatelnost a adaptovanost) Buď X $\mathcal{F}_t$-predikovatelný, pak $\forall t \geq 0$ je X_t $\mathcal{F}_{t-}$ měřitelná n. veličina.

Pozn. $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0 \Rightarrow$ $\mathcal{F}_t$-prediktabilní je $\mathcal{F}_{t-}$-adaptovaný

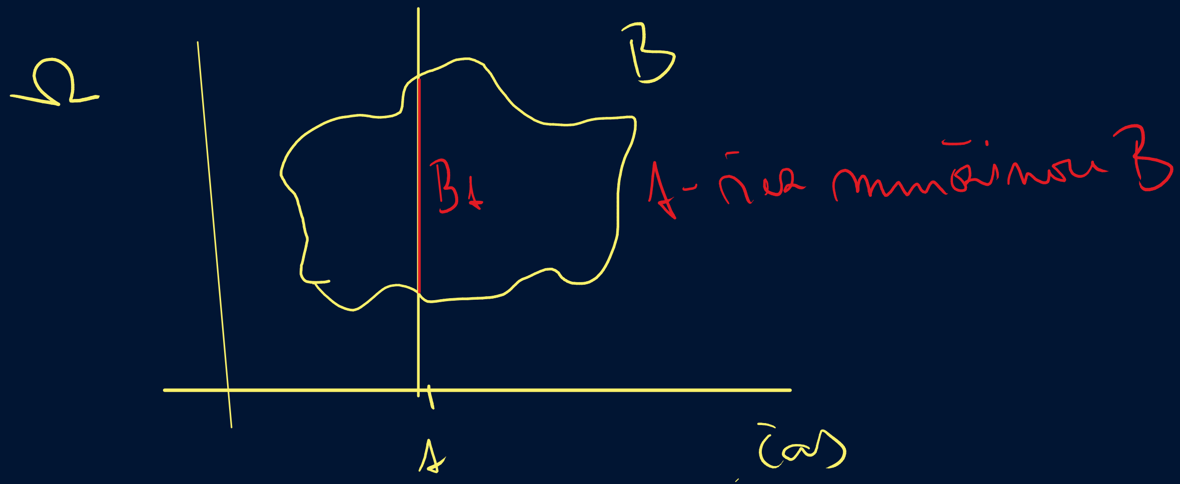
Důkaz: X můžeme zapsat jako limitu vhodných jednoduchých funkcí (vůči $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \mathbb{1}_{B_{i,n}}(t,\omega) = X$$

$$B_{i,n} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t), \quad a_{i,n} \in \mathbb{R}$$

Stačí ukázat, že $\mathbb{1}_B(t,\omega)$ je pro dané t $\mathcal{F}_{t-}$-měřitelné zobrazení, neboli pro pevné t a $B \in \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ chceme ukázat, že $\{\omega;\ \mathbb{1}_B(t,\omega) = 1\} \in \mathcal{F}_{t-}$

$$\{\omega;\ (t,\omega) \in B\} = B_t \text{ řez množinou } B$$



$A = \{B ; B_t \in \mathcal{F}_{t-}\}$ a chceme ukázat, že A obsahuje všechny množiny z $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

1) A je σ-algebra $\mathcal{F}_{t-}$ je σ-algebra a t-řezy množinou zachovávají sjednocení, doplňky, průniky

$B_i \in A$ $(B_i)_t \in \mathcal{F}_{t-}$ $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)_t = \bigcup_{i=1}^{\infty} (B_i)_t \in \mathcal{F}_{t-}$

$\emptyset \in A$, $[0,T] \times \Omega \in A$ zřejmě $((B_i)_t)^C = (B_i^C)_t$

$B_i \in A \Rightarrow B_i^C \in A$

2) množina generátorů $\rho(\mathcal{F}_s) \subset \mathcal{A}$

$\{0\} \times A$ $\quad$ t-řez je $\emptyset$ $(t > 0)$ $\quad \underline{\emptyset \in \mathcal{F}_{t-}\ \forall t}$

je A $\{t = 0\}$ $\quad \underline{A \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{0-}}$

$(s, r] \times A$ $\quad$ t-řez je $\emptyset$ $\quad t \notin (s, r]$

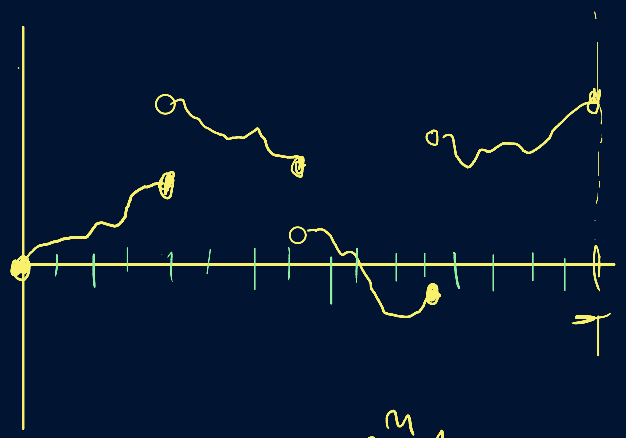
$A \in \mathcal{F}_s$ $\quad$ je A $\quad t \in (s, r]$ $\quad A \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t-}\ \forall t \in (s, r]$

protože $\mathcal{A}$ je σ-algebra obsahující generátory $\rho(\mathcal{F}_t)$, tak $\rho(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{A}$

$\forall B \in \rho(\mathcal{F}_t)$ je t-řez $B_t \in \mathcal{F}_{t-}$.

Tvrzení 13: (prediktabilita a spojitost zleva). Buď X zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces. Pak X je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní.

Důkaz:

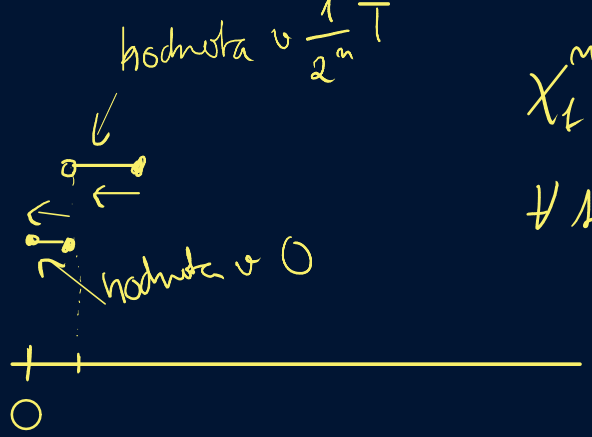


Proces X, který je zleva spojitý můžeme aproximovat jednoduchými procesy adaptovanými na stejnou filtraci.

$$X_t^n = X_0 \cdot \mathbb{1}(t=0) + \sum_{i=0}^{2^n-1} X_{\frac{i}{2^n}T} \cdot \mathbb{1}_{\left(\frac{i}{2^n}T, \frac{i+1}{2^n}T\right]}$$

$\mathcal{F}_0$-měř.

$\mathcal{F}_{\frac{i}{2^n}T}$ měř. n.v.



$X_t^n \to X_t$ $\forall t, \omega$ když $n \to \infty$

X_t^n je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní

Tvrzení 14: (Zleva spojité procesy a $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$)

Proces X je $\mathcal{F}_t$-predikabilní, právě když je měřitelný vůči nejmenší σ-algebře generované zleva spojitými $\mathcal{F}_t$-adaptovanými procesy.

Důkaz: Y zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný, podle T13 je $\mathcal{F}_t$-predikabilní.

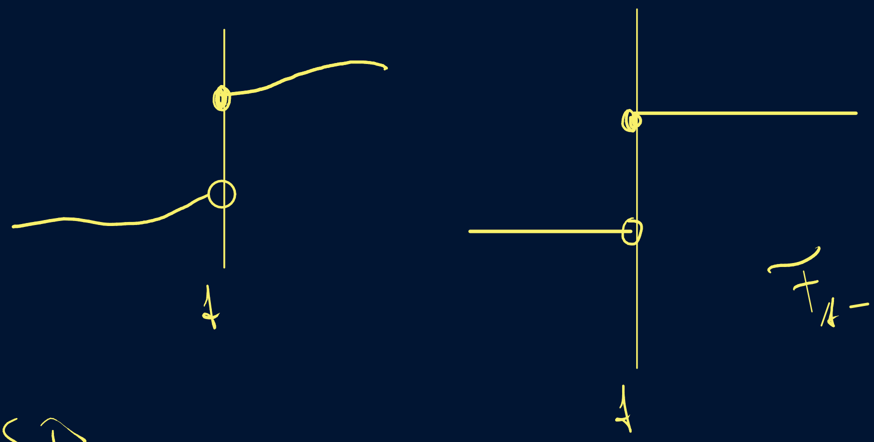
$\mathcal{L}$ nejmenší σ-algebra vůči které jsou zl. spoj. $\mathcal{F}_t$-adaptované procesy měřitelné $\overset{T13}{\Longrightarrow} \mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$

$\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je generována množinami typu $\{0\} \times \overset{\mathcal{F}_0}{\overset{\cup}{A}}$, $(s,t] \times A^{\in \mathcal{F}_s}$

$\mathbb{1}_{\{0\} \times A}$, $\mathbb{1}_{(s,t] \times A}$ je zleva spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces a kombinací těchto indikátorů dostaneme "jednoduché" alespoň spojité $\mathcal{F}_t$-adaptované procesy. Všechny jsou měřitelné vůči $\mathcal{L}$, ale zároveň nejmenší σ-algebra, vůči které jsou měřitelné je $\sigma(\mathcal{F}_t)$

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{L}. \quad \text{Tedy } \sigma(\mathcal{F}_t) = \mathcal{L}.$$

Zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-adaptovaný proces nemusí být $\mathcal{F}_t$-predikabilní



$\mathcal{F}_t$ - nějak nenaznačuje (nemusí naznačovat) blížícím se skokem

$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ s.j.

$E[M_t | \mathcal{F}_{t-}] = M_{t-} \neq M_t$ $\quad M_t$ není $\mathcal{F}_{t-}$-měř. n.v.

Tvrzení 15: (alternativní generátor $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$) Buď $\{\mathcal{F}_t\}$ filtrace. Pak $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ je generována množinami typu

$$\{0\} \times A, \quad A \in \mathcal{F}_0$$

$$[s,t) \times A \quad s > 0,\ t > s \quad A \in \mathcal{F}_{s-}$$

Věta 16: (Doobův-Meyerův rozklad). Buď X zprava spojitý a nezáporný $\mathcal{F}_t$-submartingal.

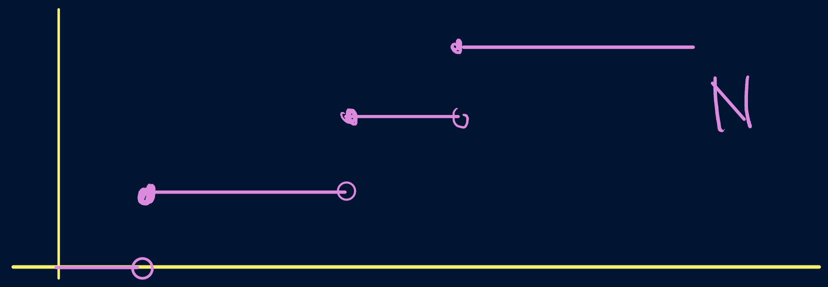
Pak existují zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal M a zprava spojitý, neklesající $\mathcal{F}_t$-prediktabilní proces A splňující

$$\boxed{X_t = M_t + A_t \text{ s.j. } \forall t \in [0,T]}$$

$$EA_t < \infty \quad A_0 = 0$$

a tento rozklad je jednoznačný až na modifikace.

Příklad: Poissonův proces s konstantní intenzitou



?? $N_t = 0 + N_t$ ← zprava spojitý

↑ martingal

ALE! N_t není $\mathcal{F}_t$-prediktabilní!

TOTO NENÍ D-M rozklad N

$EN_t = \lambda t$

$N_t - \lambda t$ → je martingal

$$E[N_t - \lambda t \mid \mathcal{F}_s] = \underbrace{E[N_t - N_s \mid \mathcal{F}_s]}_{= E(N_t - N_s) = \lambda(t-s)} + \underbrace{E[N_s \mid \mathcal{F}_s]}_{\overset{s.j.}{=} N_s} - \lambda t$$

$s < t$

$$= \lambda(t-s) + N_s - \lambda t = N_s - \lambda s$$

$M_t = N_t - \lambda t$ je martingal

$N_t = M_t + \lambda t$

λt je spojitá funkce t $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_t$ - prediktabilní proces

D.-M. rozklad Poissonova procesu

a obecného procesu s proměnnou intenzitou máme D.-M. rozklad

$N_t = M_t - \Lambda(t)$ $\qquad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$

Důsledek 17: Buď $N = \{N_t, t \in [0,T]\}$ čítací proces; N je adaptovaný na filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$, $EN_t < \infty \; \forall t \geq 0$

Pak existuje až na modifikaci jednoznačný rozklad

$N_t = M_t + A_t \qquad A_0 = 0, \; EA_t < \infty,$ A je zprava spoj. $\mathcal{F}_t$-predikovatelný a neklesající

M je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal

Pokud M je zprava spojitý martingal, $EM_t^2 < \infty$, pak M^2 je submartingal (nezáporný) a můžeme použít větu 16.

<u>Důsledek 18</u> (prediktabilní variace) Buď M zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-mart. a $EM_t^2 < \infty$ $\forall t \in [0,T]$. Pak existuje $\mathcal{F}_t$-prediktabilní, neklesající a zprava spojitý proces $\langle M,M\rangle_t$ začínající v 0 $(\langle M,M\rangle_0 = 0)$ a splňující $(M_t^2 - \langle M,M\rangle_t,\ t \in [0,T])$ je zprava spojitý $\mathcal{F}_t$-martingal. Proces $\langle M,M\rangle_t$ je až na modifikaci jediný.