5. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – řešení – 29.7.2021

1.

$x \backslash y$	1	2	3
1	1/4	1/6	1/12
2	1/6	1/4	1/12

V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

(a) Určete $P(X = 2 \mid Y = 1)$ a $P(Y = 1 \mid X = 2)$.
(b) Rozhodněte, zda marginální rozdělení X je uniformní na $\{1, 2\}$.
(c) Rozhodněte, zda marginální rozdělení Y je uniformní na $\{1, 2, 3\}$.
(d) Jsou X a Y nezávislé?
(e) Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
(f) Určete $\mathbb{E}(XY)$.
(g) Určete $\mathrm{cov}(X, Y)$.

Řešení: Napřed určíme marginální rozdělení X: jde o určení řádkových součtů. Neboli $P(X = 1) = 1/4 + 1/6 + 1/12 = 1/2$, $P(X = 2) = 1/6 + 1/4 + 1/12 = 1/2$.

Dále marginální rozdělení Y: $P(Y = 1) = 1/4 + 1/6 = 5/12 = P(Y = 2)$, $P(Y = 3) = 1/12 + 1/12 = 1/6$.

(a) $P(X = 2 \mid Y = 1) = P(X = 2 \,\&\, Y = 1)/P(Y = 1) = (1/6)/(5/12) = 2/5$
$P(Y = 1 \mid X = 2) = P(X = 2 \,\&\, Y = 1)/P(X = 2) = (1/6)/(1/2) = 1/3$

(b) Dle úvodního výpočtu je rozdělení X uniformní na množině $\{1, 2\}$.

(c) Dle úvodního výpočtu není rozdělení Y uniformní na $\{1, 2, 3\}$.

(d) Veličiny nejsou nezávislé. Na příklad $P(X = 1 \,\&\, Y = 2) = 1/6 \neq 1/2 \cdot 5/12$.

(e) Z uniformity X plyne, že $\mathbb{E}(X) = (1 + 2)/2 = 3/2$. Dále podle úvodního výpočtu

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot 5/12 + 2 \cdot 5/12 + 3 \cdot 1/6 = 7/4.$$

Dohromady tedy $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 3/2 + 7/4 = 13/4$.

(f)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) =& 1 \cdot 1 \cdot P(X = 1 \,\&\, Y = 1) + 1 \cdot 2 \cdot P(X = 1 \,\&\, Y = 2) + 1 \cdot 3 \cdot P(X = 1 \,\&\, Y = 3) \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot P(X = 2 \,\&\, Y = 1) + 2 \cdot 2 \cdot P(X = 2 \,\&\, Y = 2) + 2 \cdot 3 \cdot P(X = 2 \,\&\, Y = 3) \\ =& 1 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/12 + 2 \cdot 1/6 + 4 \cdot 1/4 + 6 \cdot 1/12 \\ =& 8/3\end{aligned}$$

(g) $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 8/3 - 3/2 \cdot 7/4 = 8/3 - 21/8 = 1/24$

2. Král Ludvík chce mít mužského potomka, aby ho mohl opět pojmenovat Ludvík. V každém roce mu jeho manželka porodí právě jedno dítě, které je stejně pravděpodobně chlapec i děvče, nezávisle na předchozích pokusech. Všechny narozené děti přežijí. Pokud se narodí chlapec, tak další potomky už Ludvík mít nebude. Označme S počet narozených synů a D počet narozených dcer.

(a) Určete $\mathbb{E}(S)$.

(b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

Řešení:

(a) Král bude mít jednoho syna s pravděpodobností $1/2 + 1/4 + \cdots = 1$. S pravděpodobností nula se mu narodí nekonečně mnoho dcer a bude mít tedy nula synů. Je tedy $\mathbb{E}(S) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$.

(b) Celkový počet potomků, tj. veličina $S + D$ má geometrické rozdělení $Geom(1/2)$. Je tedy $\mathbb{E}(S + D) = 1/(1/2) = 2$. Podle linearity střední hodnoty a části (a) je tedy $\mathbb{E}(D) = 1$.

3. Nechť $X, Y \sim U(0, 1)$ a X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $A = \min(X, Y)$ a $B = \max(X, Y)$.

(a) Určete distribuční funkci B.

(b) Určete hustotu B.

(c) Vypočtěte $\mathbb{E}(B)$.

(d) Určete $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathbb{E}(A)$.

(e) Spočtěte $\mathrm{cov}(A, B)$.

Řešení:

(a) Pro $b < 0$ je jistě $F_B(b) = 0$ a pro $b > 1$ je $F_B(b) = 1$. Pro $b \in [0, 1]$ máme

$$F_B(b) = P(B \leq b) = P(X \leq b \,\&\, Y \leq b) = P(X \leq b) \cdot P(Y \leq b) = b \cdot b = b^2.$$

(b) Z předchozí části, $f_B(b) = F_B(b)' = (b^2)' = 2b$ pro $b \in [0, 1]$, a $f_B(b) = 0$ jinak.

(c) Podle definice střední hodnoty pro spojité náhodné veličiny,

$$\mathbb{E}(B) = \int_{-\infty}^{\infty} b \cdot f_B(b) db = \int_0^1 b \cdot 2b db = [\tfrac{2}{3} b^3]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(d) Podle vlastností uniformního rozdělení je $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 1/2$. Je tedy $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1/2 + 1/2 = 1$. Jistě je pravda $X + Y = A + B$, a tedy také $\mathbb{E}(A + B) = \mathbb{E}(X + Y) = 1$. Podle linearity střední hodnoty a předchozí části je $\mathbb{E}(A) = 1/3$.

(e) Spočteme napřed $\mathbb{E}(AB)$. Protože je $AB = XY$, je $\mathbb{E}(AB) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ (využíváme nezávislost X a Y). Platí tedy

$$\mathrm{cov}(A, B) = \mathbb{E}(AB) - \mathbb{E}(A)\mathbb{E}(B) = 1/4 - 1/3 \cdot 2/3 = 1/4 - 2/9 = 1/36.$$

(Veličiny tedy nejsou nezávislé.)

4. (a) Definujte pojem sdružená hustota dvou náhodných veličin. Jak se pomocí sdružené hustoty pozná marginální hustota jednotlivých složek?

(b) Definujte pojem nezávislost několika jevů. Mohou existovat tři jevy, které nejsou nezávislé, ale každé dva z nich nezávislé jsou?

Řešení:

(a)

- Pokud můžeme sdruženou distribuční funkci psát jako integrál pomocí nezáporné funkce $f_{X,Y}$
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(x,y) dx dy,$$
- pak nazýváme n.v. X, Y sdruženě spojité. Funkce $f_{X,Y}$ je jejich *sdružená hustota.*
- Stejně jako u jednorozměrného případu můžeme pak pomocí hustoty vyjádřit i další pravděpodobnosti:
$$P((X,Y) \in S) = \int_S f_{X,Y}(x,y) dx dy.$$
- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$
- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$

(b) Říkáme, že jevy A_i, $i \in I$ jsou nezávislé, pokud pro každou konečnou množinu $S \subseteq I$ platí
$$P(\bigcap_{i \in S} A_i) = \prod_{i \in S} P(A_i).$$
Popsaná situace může nastat. Např. volme $A_i = \{0, i\}$ pro $i = 1, 2, 3$, v prostoru $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$. Pak $P(A_i) = 2/4 = 1/2$, $P(A_i \cap A_j = 1/4$ (pro $i \neq j$), ale $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq 1/8$.

5. Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí.

Řešení: Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou stejně rozdělené náhodné veličiny se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Označme
$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}.$$
Pak Y_n konvergují v distribuci k $N(0,1)$, neboli pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí
$$\lim_{n \to \infty} P(Y_n \leq x) = \Phi(x).$$

Význam věty je v tom, že nám umožňuje aproximovat součet mnoha náhodných veličin pomocí jednoho, dobře známého rozdělení. Takové součty se často vyskytují – na příklad

$Bin(n, p)$ je součet n veličin $Ber(p)$, ve statistice takové součty často potkáme a mnoho fyzikálních jevů je (přibližně) popsáno jako součet nezávislých náhodných veličin. To vysvětluje proč binomická čísla, stejně jako mnoho v praxi se vyskytujících veličin, mají přibližně normální rozdělení.

---

6. Vyslovte a dokažte Bayesovu větu (základní verze, pro jevy).

Řešení:

Věta:

Pokud $B_1, B_2, \dots$ je rozklad Ω, $A \in \mathcal{F}$ a $P(A), P(B_j) > 0$, tak

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)}.$$

(sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0).

Důkaz: Podle definice podmíněné pravděpodobnosti je $P(B_j \mid A) = P(B_j \cap A)/P(A) = P(A \mid B_j)P(B_j)/P(A)$. Podle věty o úplné pravděpodobnosti je $P(A) = \sum_i P(A \mid B_i)P(B_i)$.