

Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

5. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 29.7.2021

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701, $\Phi^{-1}(0.975)$ také nechte nevyčísleno.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat dnes osobně nebo zítra přes Zoom. Písemky psané přes Zoom znamenají nutnost ústní části i pro potvrzení známky z písemky.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty!

1. (10 bodů)

V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y . Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

$x \backslash y$	1	2	3
1	1/4	1/6	1/12
2	1/6	1/4	1/12

- Určete $P(X = 2 | Y = 1)$ a $P(Y = 1 | X = 2)$.
- Rozhodněte, zda marginální rozdělení X je uniformní na $\{1, 2\}$.
- Rozhodněte, zda marginální rozdělení Y je uniformní na $\{1, 2, 3\}$.
- Jsou X a Y nezávislé?
- Určete $\mathbb{E}(X + Y)$.
- Určete $\mathbb{E}(XY)$.
- Určete $\text{cov}(X, Y)$.

2. (10 bodů) Král Ludvík chce mít mužského potomka, aby ho mohl opět pojmenovat Ludvík. V každém roce mu jeho manželka porodí právě jedno dítě, které je stejně pravděpodobně chlapec i děvče, nezávisle na předchozích pokusech. Všechny narozené děti přežijí. Pokud se narodí chlapec, tak další potomky už Ludvík mít nebude. Označme S počet narozených synů a D počet narozených dcer.

- Určete $\mathbb{E}(S)$.
- Určete $\mathbb{E}(D)$.

3. (10 bodů) Nechť $X, Y \sim U(0, 1)$ a X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $A = \min(X, Y)$ a $B = \max(X, Y)$.

- Určete distribuční funkci B .
- Určete hustotu B .
- Vypočtěte $\mathbb{E}(B)$.
- Určete $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ a $\mathbb{E}(A)$.
- Spočtěte $\text{cov}(A, B)$.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružená hustota dvou náhodných veličin. Jak se pomocí sdružené hustoty pozná marginální hustota jednotlivých složek?

(b) Definujte pojem nezávislost několika jevů. Mohou existovat tři jevy, které nejsou nezávislé, ale každé dva z nich nezávislé jsou?

5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte Bayesovu větu (základní verze, pro jevy).