Jméno a příjmení:

1	2	3	4	5	6

4. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 21.7.2021

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Na tento papír můžete rovněž napsat vybraný pseudonym, pod kterým budou uveřejněny vaše výsledky. (Jinak budou s vašimi iniciálami.) Zadání rovněž odevzdejte (bude k dispozici na webu).

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut.**

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítadla, mobily, … (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčíslujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701, $\Phi^{-1}(0.975)$ také nechte nevyčísleno.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, …, 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat dnes osobně nebo zítra přes Zoom. Písemky psané přes Zoom znamenají nutnost ústní části i pro potvrzení známky z písemky.

$x \backslash y$	0	1	2
1	a	1/8	b
0	1/8	3/8	c

1. (10 bodů)
V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

(a) Rozhodněte, zda je možné tabulku doplnit (tj. zvolit a, b, c) tak, aby byly X a Y nezávislé.

(b) Doplňte tabulku tak, aby byla střední hodnota $\mathbb{E}(X)$ co největší.

(c) Doplňte tabulku tak, aby byla střední hodnota $\mathbb{E}(Y)$ co největší.

(d) Doplňte tabulku tak, aby byl rozptyl $\mathrm{var}(X)$ co nejmenší.

2. (10 bodů) Opakovaně házíme spravedlivou mincí. Označme X_k číslo hodu, v němž poprvé padne k-krát po sobě panna. Např. pro posloupnost POPPP je $X_1 = 1$, $X_2 = 4$ a $X_3 = 5$.

(a) Určete $\mathbb{E}(X_1)$.

(b) Určete $\mathbb{E}(X_2)$. K tomu účelu určete $\mathbb{E}(X_2 \mid \text{první hod byl O})$ pomocí $\mathbb{E}(X_2)$. A také $\mathbb{E}(X_2 \mid \text{první dva hody byly PO})$ pomocí $\mathbb{E}(X_2)$.

(c) Určete $\mathbb{E}(X_3)$.

3. (10 bodů) Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

(b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(c) Spočtěte distribuční funkci, F_X.

(d) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?

(e) Určete hustotu náhodné veličiny Y. Pojmenujte jejjí rozdělení.

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem distribuční funkce náhodné veličiny. Definujte, co znamená, že nějaký jev platí skoro jistě.

Rozhodněte zda některá z následujících implikací platí pro libovolnou dvojici náhodných veličin X, Y:

1. $X \leq Y$ s.j. $\Rightarrow F_X(t) \leq F_Y(t)$
2. $X \leq Y$ s.j. $\Rightarrow F_Y(t) \leq F_X(t)$
3. $F_X(t) \geq F_Y(t) \Rightarrow X \leq Y$ s.j.

(b) Definujte pojem rozptyl náhodné veličiny. Kdy je rozptyl roven 0?

5. (10 bodů) Popište metody, jak generovat náhodnou veličinu s danou distribuční funkcí. Zejména základní metodu (inverse transformation), případně též zamítací metodu (rejection sampling).

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součinu nezávislých náhodných veličin. (Stačí varianta pro diskrétní náhodné veličiny.)