

3. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 30.6.2021

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je: $137 \cdot 173$ je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701, $\Phi^{-1}(0.975)$ také nechte nevyčísleno.

Podrobně zdůvodněte všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

Po opravení písemky bude všem navržena známka 1, ..., 5. Tuto si můžete při ústní části vylepšit o jeden stupeň – tj. 4 lze zlepšit na 3, ale 5 znamená neúspěch u tohoto termínu zkoušky. Ústní část zkoušky může probíhat dnes osobně nebo zítra přes Zoom. Písemky psané přes Zoom znamenají nutnost ústní části i pro potvrzení známky z písemky.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda existují náhodné veličiny X, Y na tomtéž pravděpodobnostním prostoru, takové, že
 - (a) $X \sim Pois(1/10)$, $Y \sim Bin(100, 1/10)$ a přitom $P(X \leq Y) = 1$.
 - (b) $X \sim Pois(1/10)$, $Y \sim Bin(100, 1/10)$ a přitom $P(X \geq Y) = 1$.
 - (c) $X \sim Bin(100, 1/2)$, $Y \sim Bin(100, 1/10)$ a přitom $P(X \geq Y) = 1$.
 - (d) $X \sim Bin(100, 1/2)$, $Y \sim Bin(100, 1/10)$ a přitom $P(X \leq Y) = 1$.
2. (10 bodů) Nechť $X \sim N(0, 1)$ a $Y = |X|$.
 - (a) Jaká je distribuční funkce Y ?
 - (b) Jaká je hustota Y ?
 - (c) Spočtěte $\mathbb{E}(Y)$.
 - (d) Určete medián Y .
3. (10 bodů) Petr má (šestistěnnou) kostku, na které padá šestka s pravděpodobností p . Čísła 1, ..., 5 padají všechna se stejnou pravděpodobností.
 - (a) V závislosti na p určete, jaká je střední hodnota čísla, které Petrovi padne.
 - (b) Najděte odhad \hat{p} momentovou metodou. Jaké \hat{p} stanovíte, pokud padla čísla 2, 6, 3?
 - (c) Určete odhad \hat{p} pomocí metody maximální věrohodnosti. Opět určete výsledek pro čísla 2, 6, 3.

(Zadání pokračuje na druhé straně.)

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem korelace (dvou) náhodných veličin. Jaká je korelace $\rho(X, X)$ pro $X \sim U(0, 1)$?

(b) Definujte pojem nezávislé náhodné veličiny (spojitý případ, dvě veličiny). Uveďte obě ekvivalentní formulace. Rozhodněte, zda existují nezávislé X, Y takové, že $X \sim U(0, 1)$ a $Y \sim U(0, 1)$?

5. (10 bodů) Vysvětlete, jak se provádí test dobré shody.

6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o úplné střední hodnotě (neboli, o výpočtu střední hodnoty rozbořením případů). Stačí varianta pro diskrétní náhodné veličiny.