

# 1. zkoušková písemka NMAI059 Pravd. a Stat. 1 – 16.6.2021

Na každý papír napište číslo příkladu a svoje příjmení.

Nepište více příkladů na stejný papír!

Na vypracování máte **150 minut**.

Při práci nejsou povoleny žádné kalkulačky, počítač, mobily, ... (Mobilům prosím předem vypněte zvonění.)

Pokud by se ve výsledku vyskytovaly výrazy, které se bez kalkulačky špatně počítají, nevyčísľujte je:  $137 \cdot 173$  je stejně dobrá, ne-li lepší odpověď, než 23701,  $\Phi^{-1}(0.975)$  také nechte nevyčísleno.

**Podrobně zdůvodněte** všechny výpočty.

Můžete využívat jeden (vlastnoručně napsaný) tahák o formátu A4.

---

---

**1.** (10 bodů) (Obrázky jsou na zvláštním papíru.) (a) Rozhodněte, který z obrázků popisuje distribuční funkci nějaké náhodné veličiny. Další dvě části provádějte jen u těch obrázků, které distribuční funkci popisují.

(b) Odhadněte střední hodnotu.

(c) Seřadte podle hodnoty rozptylu.

**2.** (10 bodů) (a) Dva hráči, Adam a Božena, opakovaně hází kostkou, v pořadí ABABAB... Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne první Adamovi?

(b) Do hry se přidá ještě Cecil, hází v pořadí ABCABCABC... Pravděpodobnost, že šestka padne napřed Adamovi, pak Boženě, a nakonec Cecilovi je  $216/1001$ . Zdůvodněte. (Pokud padne Adamovi šestka vícekrát, a až pak Boženě, tak je to také v pořádku, jde nám jen o pořadí časů, kdy poprvé hodí šestku.)

**3.** (10 bodů) Paretovo rozdělení s parametrem  $\alpha > 1$  má hustotu  $f(x) = \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$  pro  $x \in [1, \infty)$  (a nula jinde).

(a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

(b) Z tohoto rozdělení jsme nasamplovali hodnoty 5, 2, 3. Odvoďte odhad  $\hat{\alpha}$  pomocí metody maximální věrohodnosti.

(c) Nechť  $X$  má výše popsané Paretovo rozdělení, tj.  $f_X = f$ . Spočítejte  $\mathbb{E}(X)$ .

(d) Najděte odhad  $\hat{\alpha}$  metodou momentů.

(Zadání pokračuje na druhé straně.)

4. (10 bodů) (a) Definujte pojem sdružená distribuční funkce.  
(b) Popište, jak se spočítá empirická distribuční funkce.
5. (10 bodů) Vyslovte Centrální limitní větu. Vysvětlete, k čemu se hodí.
6. (10 bodů) Vyslovte a dokažte větu o střední hodnotě součtu náhodných veličin (důkaz stačí pro diskrétní náhodné veličiny).

