τ čas do selhání $\in [0,T]$ $\qquad X = \tau \wedge U$ čas do události

U čas do cenzorování $\qquad \delta = 1[\tau \le U]$

$N_t = 1[X \le t]\,\delta \qquad N_t^U = 1[X \le t](1-\delta)$

$N_t - A_t \quad , \quad A_t = \Lambda(t \wedge X) \qquad \Lambda(t) = \int_0^t \frac{dF(s)}{1-F(s-)}$ $\quad F$ distr. fce τ

Uvažujeme nezávislé cenzorování

$N_t - A_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal $\qquad \mathcal{F}_t = \sigma(N_s, N_s^U ; s \le t)$

A je $\mathcal{F}_t$-prediktabilní

$M_t = N_t - A_t$ A je spojité (je, je-li Λ spojitá)

$$\langle M, M \rangle_t = A_t$$

$(\tau_1, U_1), \ldots, (\tau_n, U_n)$ i.i.d.

$M_{i,t} = N_{i,t} - A_{i,t}$ $i = 1, \ldots, n$

A spojité

$$A_{i,t} = \langle M_i, M_i \rangle_t$$

$$0 = \langle M_i, M_j \rangle_t \quad i \neq j$$

A má skoky

$$\langle M_i, M_i \rangle_t = A_{i,t} - \sum_{s \le t} (\Delta A_{i,s})^2$$

$$\langle M_i, M_j \rangle_t = - \sum_{s \le t} \Delta A_{i,s} \Delta A_{j,s} \quad i \neq j$$

Pokud je τ spojité n. v., pak skoky procesů $N_1, \dots, N_n$ nejsou s pravdp. 1 ve stejných okamžicích.

$$U_t^n = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t H_i \, dM_i$$

H_i omezené $\mathcal{F}_t$-predikabilní

U_t^n je martingal

<u>co se děje, pokud $n \to \infty$?</u>

momenty U_t^n

$$E U_t^n = 0 \qquad \forall n, \forall t$$

$$\operatorname{var} U^n_t = E(U^n_t)^2 = E\left(\sum_{i=1}^n \int_0^t H_i\, dM_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n E\left(\int_0^1 H_i\, dM_i\right)^2 + \sum_{i\neq j}\sum E\left(\int_0^1 H_i\, dM_i \int_0^1 H_j\, dM_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^n E\int_0^t H_i^2\, d\langle M_i, M_i\rangle + \sum_{i\neq j}\sum E\int_0^1 H_i H_j\, d\langle M_i, M_j\rangle$$

tj. pro A_i spojité

$$\sum_{i=1}^n E\int_0^t H_i^2\, dA_i = \sum_{i=1}^n E\int_0^t H_i^2\, 1[X_i \geq s]\, d\Lambda(s) = \boxed{\sum_{i=1}^n \int_0^t E H_i^2\, 1[X_i \geq s]\, d\Lambda(s)}$$

$\searrow \Lambda_s 1[X_i \geq s]$

$$\Lambda(t) = \int_0^t \frac{dF(s)}{1-F(s-)}$$

$$\operatorname{var} U^{m}_{t} = \sum_{i=1}^{(m)} \int_0^{(t)} \underbrace{E\left(H_i^2 \, 1[X_i \geq s]\right)}_{O\left(\frac{1}{m}\right)} \frac{dF(s)}{1-F(s-)}$$

F je d.f. τ

$U^{(m)} \ldots \qquad \{t_j^{(m)}, \, j = 0, 1, \ldots, k_{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$

$X_{(m)j} = U^{m}_{t_j^{(m)}} - U^{m}_{t_{j-1}^{(m)}}$ $\qquad X_{m,j} \quad \begin{matrix} m = 1, 2, \ldots \\ j = 1, 2, \ldots k_m \end{matrix} \Big\}$ schéma mart. diferencí

---

martingal $\qquad M$

$X_{m,j} = M_{t_j^m} - M_{t_{j-1}^m}$ $\quad$ sch mart. dif.

$W_t^{(m)} = \sum_{j=1}^{r_m(t)} X_{m,j}$ $\qquad r_m(t) = \lfloor k_m \cdot t \rfloor \qquad t \in [0, 1]$

za mnoha podmínek

$W_t^m \xrightarrow{d}$ Gaussovský proces

$$\sum_{j=1}^{n_m(t)} X_{m,j}^2 \longrightarrow \alpha(t) = \int_0^t f^2(s)\,ds \quad \text{pro } f \in L_2[0,T] \qquad \int_0^T f^2(s)\,ds < \infty$$

Věta: $N^1, N^2, \dots$ nezávislé čítací procesy, $A^1, A^2, \dots$ spojité kompenzátory

$M^i = N^i - A^i$ je martingal (zprava spojitý, limity zleva, konečné úplné variace ...)

H^i omezené predikovatelné procesy (stačí $E\int_0^T (H^i)^2\, dA^i < \infty \ \forall i$)

$U_t^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t H^i\, dM^i$, $\quad U_t^{(m)}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{m} \int_0^t H_s^i \mathbb{1}(|H_s^i| \geq \varepsilon)\, dM_s^i \qquad \varepsilon > 0$

Pokud $\langle U^{(m)}, U^{(m)} \rangle_t \xrightarrow{P} \int_0^t f^2(s)\,ds$ pro nějakou $f \in L_2[0,T]$

a dále

$$\langle U^{(n)}(\varepsilon), U^{(n)}(\varepsilon) \rangle_t \xrightarrow{P} 0 \qquad \forall t \ \forall \varepsilon > 0$$

tak

$$U^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \int f\, dW \qquad W \text{ standardní Wienerův proces na } [0,T]$$

na prostoru $D[0,T]$

$$\sum_{j=1}^{n} \int_0^t (H^j)_s^2 \, dA_s^j \xrightarrow[n\to\infty]{P} \int_0^t f^2(s)\, ds$$

nejjednodušší volba $H^j = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$A_t^j = \int_0^t 1[X^j \geq s]\, d\Lambda(s) =$$

$$= \int_0^t 1[X^j \geq s] \frac{dF(s)}{1 - F(s-)}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 dA_s^j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 1[X^j \geq s]\, d\Lambda(s) = \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} 1[X^j \geq s]\, d\Lambda(s)$$

$$\xrightarrow{a.s.} \int_0^1 P[X_j \geq s]\, d\Lambda(s)$$