ApDR - 14. PŘEDNÁŠKA

MINULÉ: šíření nervového impulsu
PDR ... ∂_{xx} ... difúze

V. DALŠÍ MODELY VYUŽÍVAJÍCÍ PDR

• Populační model

$$\partial_t p = r p (K - p) + \partial_{xx} p$$

populace $p(t,x)$ ↪ stěhování z hustěji obydlených míst do řidčeji obydlených

• SIR_x ... epidemiologický model se závislostí na prostorové souřadnici

$$S' = -\beta S I \qquad S \text{ ... náchylní}$$
$$I' = \beta S I - g I \qquad I \text{ ... infekční}$$
$$R' = g I \quad \leftarrow \text{nezajímavá, dopočtena}$$

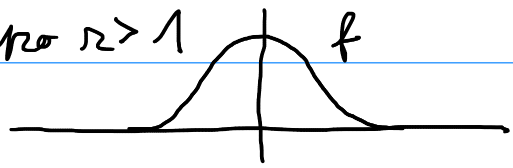
- přidána prostorová proměnná $S(t,x)$ $x \in \mathbb{R}^n$
$I(t,x)$

$$\partial_t S(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^n} F(x,x') I(t,x') \, dx' \, S(t,x)$$

$$\partial_t I(t,x) = -\partial_t S(t,x) - g(t,x) I(t,x)$$

Velice obecný model

Speciální případ
- v $\mathbb{R}^1$ ... $x \in \mathbb{R}$ ... $\int_{-\infty}^{\infty}$
- g konstantní > 0
- $F(x,x') = f(|x-x'|)$; $f(r) = 0$ pro $r > 1$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,x')\, I(t,x')\, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,x+u)\, I(t,x+u)\, du =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(|u|)\, I(t,x+u)\, du$$

$$I(t,x+u) \sim I(t,x) + \partial_x I(t,x)\cdot u + \tfrac{1}{2}\partial_{xx} I(t,x)\, u^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x,x')\, I(t,x')\, dx' \sim \underbrace{\int_{-1}^{1} f(|u|)\, du}_{\vartheta}\; I(t,x) + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(|u|)\, u\, du}_{=0\ \text{(lichá funkce)}}\; \partial_x I$$

$$+ \underbrace{\int_{-1}^{1} f(|u|)\, u^2\, du}_{\phi}\; \partial_{xx} I(t,x)$$

$$= \vartheta\, I(t,x) + \phi\, \partial_{xx} I(t,x)$$

Model

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t S &= (-\vartheta I - \phi\, \partial_{xx} I)\, S \quad \leftarrow \text{difúze} \\ \partial_t I &= -\partial_t S - g I \end{aligned}}$$

<u>Existuje řešení ve tvaru cestující vlny</u> ?

$$S(t,x) = S_1(x-ct), \quad I(t,x) = I_1(x-ct)$$

← rychlost $c>0$

$I(\xi)$

ξ

Dosadíme: $\boxed{\begin{aligned} -c\cdot S_1' &= (-\vartheta I_1 - \phi I_1'')\, S_1 \\ -c\, I_1' &= c\, S_1' - g I_1 \end{aligned}}$

systém obyčejných diferenciálních rovnic 3. řádu

1. rovnici $: S_1 \quad \int_A^t d\xi$

$$-c\left[\ln S_1(t) - \ln S_1(A)\right] = -\vartheta \int_A^t I_1 - \phi\left[I_1'(t) - I_1'(A)\right]$$

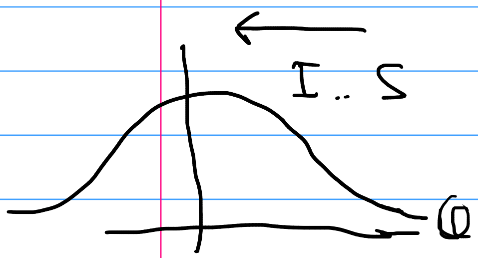
2. rovnici $\int_A^t d\xi$

$$-c\left[I_1(t)-I_1(A)\right]=c\left[S_1(t)-S_1(A)\right]-q\int_A^t I_1$$

$1.\cdot(-q)+2.\cdot\vartheta$:

$$qc\cdot\ln\frac{S_1(t)}{S_1(A)}-c\vartheta\left[I_1(t)-\cancel{I_1(A)}\right]=q\phi\left[I_1'(t)-\cancel{I_1'(A)}\right]+\vartheta c\left[S_1(t)-S_1(A)\right]$$

$A\to\infty$



$t\to+\infty$

$A\to\infty$ .... $S_1(A), I_1(A)$.... počáteční stavy: $S_1(A)\to S_1(\infty)$... počáteční počet náchylných S_0

$I_1(A)\to 0$ počáteční počet infekčních

$I_1'(A)\to 0$ vlna začíná pozvolna

$$qc\ln\frac{S_1}{S_0}-c\vartheta I_1=q\phi I_1'+\vartheta c\left[S_1-S_0\right]$$

$$\boxed{I_1'=\frac{1}{q\phi}\left[qc\ln\frac{S_1}{S_0}-c\vartheta I_1-c\vartheta(S_1-S_0)\right]}$$

$$cS_1'=-cI_1'+qI_1=-\frac{c}{q\phi}\left[\quad\right]+qI_1$$

$$\boxed{S_1'=-\frac{c}{\phi}\ln\frac{S_1}{S_0}+\frac{c\vartheta}{q\phi}\left(S_1-S_0-I_1\right)+\frac{q}{c}I_1}$$

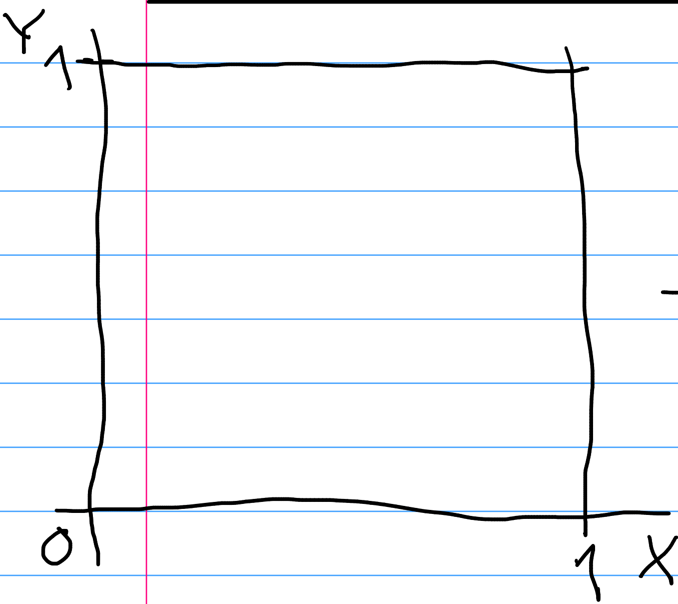
ještě upravíme: $X=\frac{S_1}{S_0}$, $Y=\frac{I_1}{S_0}$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{X'}{\alpha}&=-\ln X+\beta(X-1)+(\beta+\gamma)Y\\ \frac{Y'}{\alpha}&=+\ln X-\beta(X-1)-\beta Y\end{aligned}}$$

$X\in[0,1]$
$Y\in[0,1]$

$\alpha=\frac{c}{\phi}S_0$, $\beta=\frac{\vartheta}{q}S_0$, $\gamma=\frac{q}{c}\frac{\phi}{c}S_0$ $\qquad \alpha,\beta,\gamma>0$

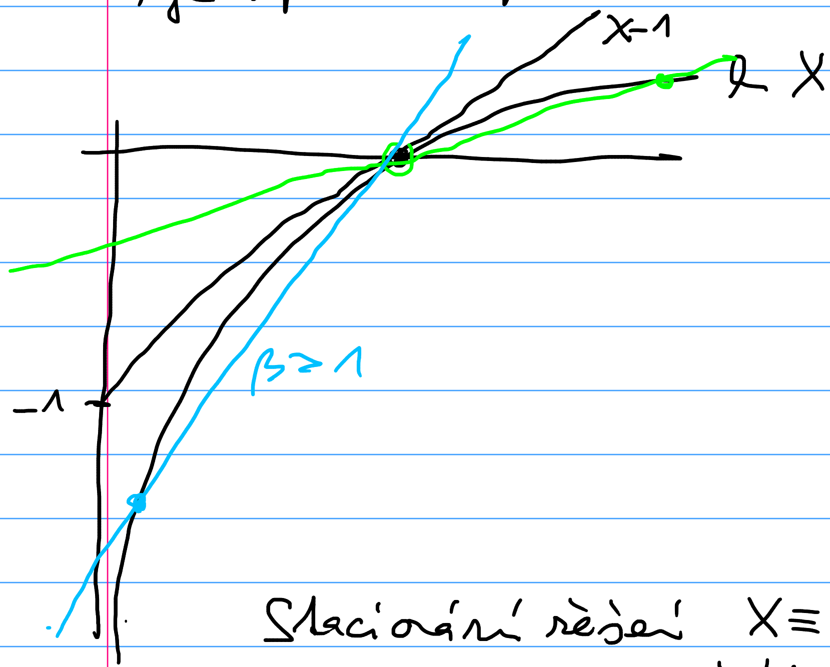
Kvalitativní analýza



Stacionární body

$$\ell X - \beta(X-1) + (\beta+\gamma)Y = 0$$
$$-\ell X + \beta(X-1) - \beta Y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\gamma Y = 0 \Rightarrow Y = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(*) \quad \ell X = \beta(X-1)$$

(*) je splněna pro $X = 1$ $\qquad$ $[1,0]$ stac. bod



$\beta = 1 \ldots \exists!\, X,\ X = 1$

$\beta < 1$
$\exists$ další řešení
$X_2 > 1$
nezajímá

$\beta > 1$ $\quad$ $\exists$ další řešení
$\tilde{X} < 1$

Stacionární řešení $X \equiv 1$ $\qquad$ $S_1(t) = S_0 \ \forall t$

žádná epidemie neproběhne

Další okrajové podmínky $A \to -\infty$

koncový stav ... $S(-\infty), I(-\infty)$

chceme $\quad I(-\infty) = 0,\ I'(-\infty) = 0 \qquad Y' \to 0$

$S(-\infty) \geq 0,\ S'(-\infty) = 0,\ X' \to 0$

$\Rightarrow$ koncový stav by měl být stacionární bod

Jediný stacionární bod $\Rightarrow$ žádná epidemie

$\rightsquigarrow \beta > 1$ nutně

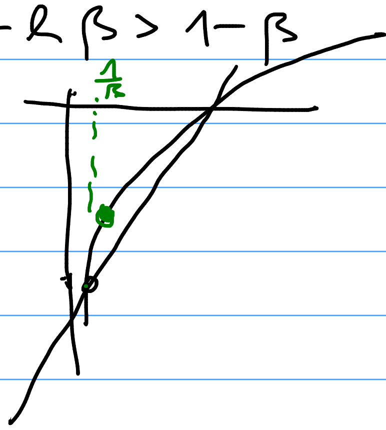
Pro $\beta > 1$ $\exists$ další řešení $\tilde{X}$, stac. bod $[\tilde{X}, 0]$

a navíc $\tilde{X} < \frac{1}{\beta}$

Dosadím-li: $X = \frac{1}{\beta}$ $\quad \ln \frac{1}{\beta} = -\ln \beta$

$$\beta\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = 1 - \beta$$

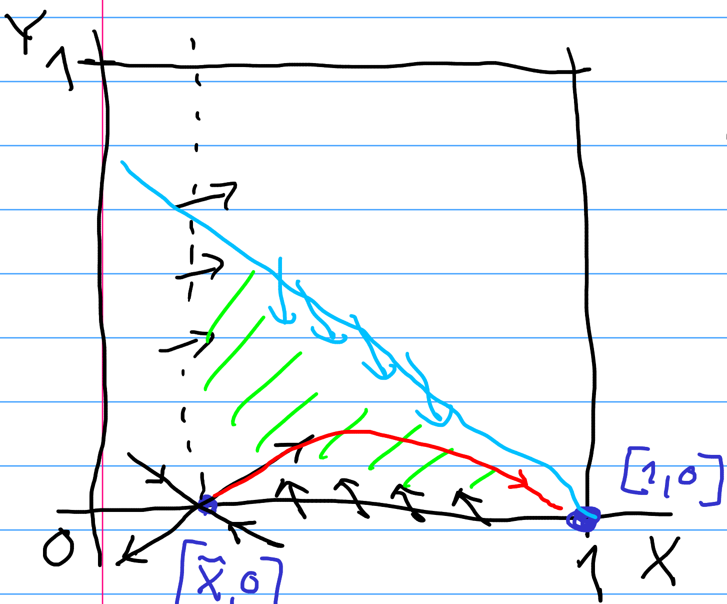
platí $\ln \beta < \beta - 1 \Rightarrow -\ln \beta > 1 - \beta$



v bodě $\frac{1}{\beta}$ je $\ln \frac{1}{\beta} >$

$\Rightarrow$ $\tilde{X}$ nalevo od něj, tj.

$$\boxed{\tilde{X} < \frac{1}{\beta}}$$



Linearizace ve stacionárních bodech:

$$DG = \begin{pmatrix} -\frac{1}{X} + \beta & \beta + \gamma \\ +\frac{1}{X} - \beta & -\beta \end{pmatrix}$$

vlastní čísla

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + \left(\frac{1}{X} - \beta\right) & -\beta - \gamma \\ -\frac{1}{X} + \beta & \lambda + \beta \end{pmatrix} = \left(\lambda + \frac{1}{X} - \beta\right)(\lambda + \beta) + (\beta + \gamma)\left(\beta - \frac{1}{X}\right)$$

$$= \lambda^2 + \frac{1}{X}\lambda + \gamma\left(\beta - \frac{1}{X}\right)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{1}{X} \pm \sqrt{\frac{1}{X^2} - 4\gamma\left(\beta - \frac{1}{X}\right)}}{2}$$

$[\tilde{X}_1, 0]$: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$\lambda_1 > 0$ $\quad \begin{pmatrix} \lambda_1 - (\beta - \frac{1}{X}) & \dots \\ \frac{1}{X} - \beta & \lambda_1 - \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - \\ + & - \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix}$

$\lambda_2 < 0$ $\quad \begin{pmatrix} + & + \\ & \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}$

$[1,0]$ $\mathrm{Re}\, \lambda_1, \lambda_2 < 0$ ... stabilní uzel nebo stabilní vír

chci vyloučit vír ... podmínka typu $\gamma > \dots$

$\rightsquigarrow c > \dots$

odhad na rychlost

lze zjistit

$$Y = \underline{\frac{\frac{1}{2} - \beta}{\beta + \gamma}(X - 1)} \qquad \frac{Y'}{X'} < \frac{\frac{1}{2} - \beta}{\beta + \gamma}$$

zelený trojúhelník je positivně invariantní

Poincaré–Bendixson $\rightsquigarrow$ řešení vycházející z bod $[\tilde{X}, 0]$ konverguje k periodickému řešení, nebo se (aspoň po posloupnost časů) blíží ke stacionárním bodu.

$\Rightarrow$ řešení vycházející z $[\tilde{X}, 0]$ směřuje do $[1, 0]$

a toto řešení je ten profil vlny, který jsme hledali.

$\xi \in (-\infty, \infty)$ $\quad X(\xi)$ $\quad X(-\infty) = \tilde{X}$ $\quad X(\infty) = 1$ ... před vlnou S_0

$\quad Y(\xi)$ $\quad Y(-\infty) = 0$ $\quad Y(\infty) = 0$

$X(\infty) = 1$ .... před vlnou bylo S_0 náchylných

$X(-\infty) = \tilde{X}$ ... po vlně bude $\tilde{X} \cdot S_0$ náchylných.

Předpoklad $\underline{\beta > 1}$ $\quad S_0 > \frac{g}{\vartheta}$

na základě hodnoty $S_0 X(-\infty) = \tilde{X} \cdot S_0 < \frac{g}{\vartheta}$ je vidět, že další vlna nemůže nastat.