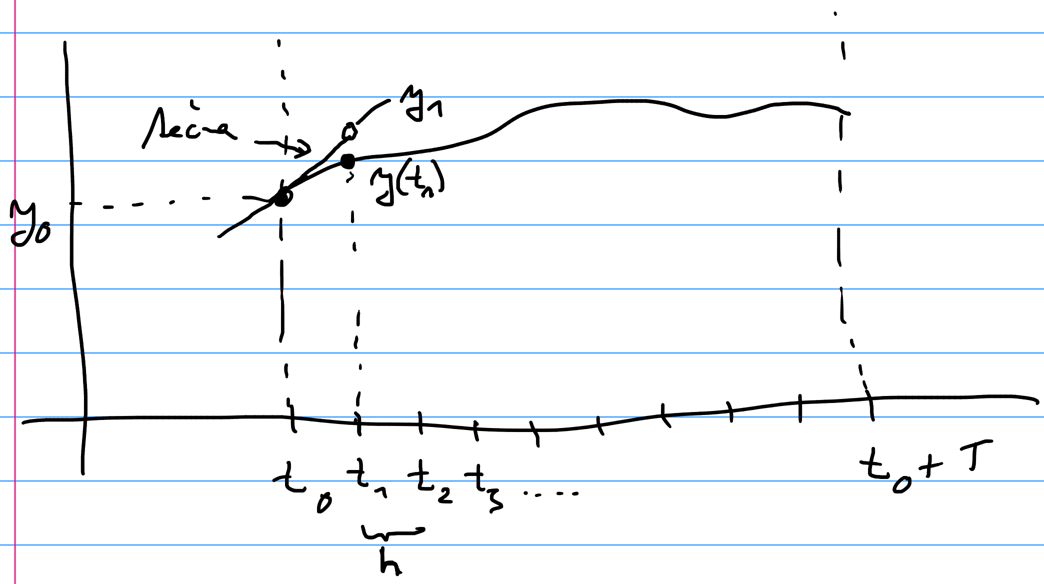
NUMERICKÉ METODY
ŘEŠENÍ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

$y'(t) = f(t, y(t))$ $\qquad y : [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$

$y(t_0) = y_0$ $\qquad$ chceme řešit na $[t_0, t_0+T]$



$y(t_0)$ známe ... $\quad ? \; y(t_1) = y(t_0+h)$

aproximaci $y(t_k)$ označíme y_k

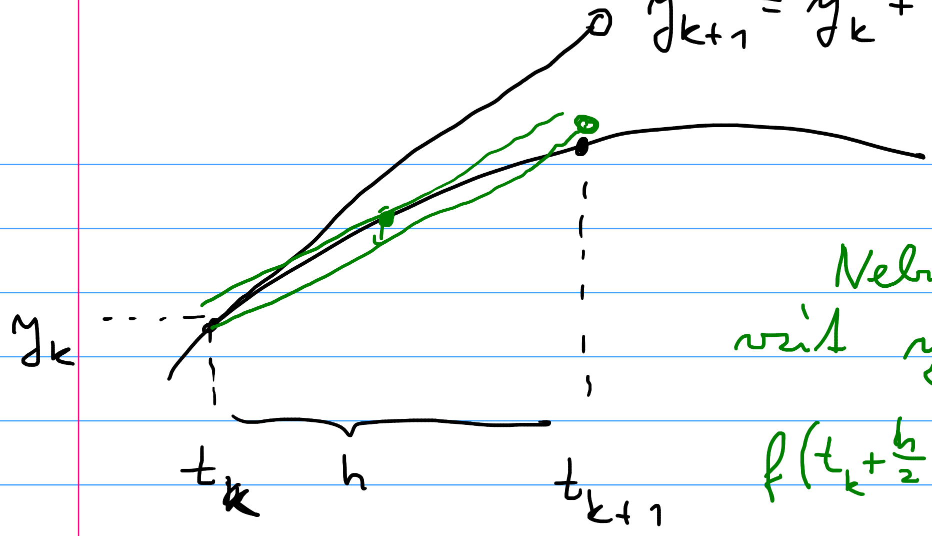
$$y(t_1) = y(t_0) + y'(t_0)\cdot\underbrace{(t_1 - t_0)}_{h} + \underbrace{\mathcal{O}(h^2)}_{\text{chyba}}$$

aproximaci y_1 můžeme získat:

$$y_1 = y_0 + \underbrace{f(t_0, y_0)}_{\approx y'(t_0)}\cdot\underbrace{h}_{\sim t_1 - t_0}$$

obecně $\quad \boxed{y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k)\cdot h}$ $\quad$ Eulerova metoda

při výpočtu y_2 nevycházím z $y(t_1)$... tu neznám, ale z nepřesné hodnoty y_1 $\rightsquigarrow$ akumulace chyby



$y_{k+1} = y_k + h\cdot y'(t_k)$

Nebude lepší vzít $y'(t_k+\frac{h}{2})$?

$\approx f\left(t_k+\frac{h}{2},\, y(t_k+\frac{h}{2})\right)$

$\approx y(t_k)+\frac{h}{2}\cdot y'(t_k)$

$\approx f(t_k, y_k)$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f\left(t_k+\frac{h}{2},\, y_k+\frac{h}{2} f(t_k,y_k)\right)\cdot h}$$

Druhá metoda

Je lepší? Jak porovnávat metody?

- 3. způsob … derivace na konci intervalu

$y_{k+1} = y_k + y'(t_{k+1})\cdot h$

$\approx f(t_{k+1}, y_{k+1})$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f(t_{k+1}, y_{k+1})\cdot h}$$

Zpětná Eulerova metoda

Implicitní … y_{k+1} na pravé straně rovnice

⇝ stabilnější

⇝ ale těžší na výpočet

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f\left(t_k+h,\, y_k+h\cdot f(t_k,y_k)\right)\cdot h}$$

Jiná metoda

Explicitní metody 1. řádu

Obecněji:

$$y_{k+1} = y_k + \Psi(t_k, y_k, h) \cdot h$$

V případě Eulerovy metody: $\Psi(t, y, h) = f(t_k, y_k)$

Definujme Diskretizační chyba

$$\tau(t, h) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} - \Psi(t, y, h)$$

V případě Eulerovy metody $\tau(t, h) = \mathcal{O}(h)$

Je-li $\tau(t, h) = \mathcal{O}(h^p)$, pak se jedná o metodu řádu p.

Eulerova ... řád 1
Druhá metoda ... řád 2.

Konzistence: $\Psi(t, y, h) \to f(t, y)$ pro $h \to 0$

Konvergence: „Globální chyba jde k nule"

$$G_h = \max_k |y_k - y(t_k)| \longrightarrow 0 \quad \text{když } h \to 0$$

Rádi bychom měli odhad chyby G_h.

Všechny zmíněné metody jsou konzistentní i konvergentní!

VĚTA: Je-li $|\Psi(t, y, h) - \Psi(t, \tilde{y}, h)| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$
a $|\tau(t, h)| \leq C \cdot h^p$, pak

$$G_h \leq C \cdot h^p \, \frac{e^{LT} - 1}{L}$$

dk: $y_{k+1} = y_k + \Psi(t_k, y_k, h)h$

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + \Psi(t_k, y(t_k), h)\cdot h + \tau(t_k, h)$$

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq |y(t_k) - y_k| + |\Psi(t_k, y(t_k), h) - \Psi(t_k, y_k, h)|\cdot h + |\tau(t_k, h)|\cdot h$$

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq C\cdot h^{p+1} + (1+L\cdot h)|y(t_k) - y_k|$$

$$\leq C\cdot h^{p+1} + (1+Lh)\left[Ch^{p+1} + (1+Lh)|y(t_{k-1}) - y_{k-1}|\right]$$

$$\leq \dots$$

$$\dots \quad |y(t_0) - y_0| = 0$$

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq Ch^{p+1}\left(1 + (1+Lh) + (1+Lh)^2 + \dots + (1+Lh)^{k-1}\right)$$

$$= Ch^{p+1}\frac{(1+Lh)^k - 1}{1+Lh-1} = \frac{Ch^p}{L}\left[(1+Lh)^k - 1\right]$$

maximální $k = \frac{T}{h}$ $\qquad (1+Lh)^{\frac{T}{h}} = \left[\underbrace{\left(1 + \frac{L}{1/h}\right)^{1/h}}_{\xrightarrow[h\to 0,\ 1/h\to\infty]{} e^L}\right]^T \to e^{LT}$

$$|y(t_{k+1}) - y_{k+1}| \leq Ch^p\frac{e^{LT} - 1}{L} \qquad \square$$

Vícekrokové metody ... k nalezení y_{k+1} využijí nejen y_k, ale více předchozích hodnot.

Př $\quad y(t_{k+1}) = y(t_k) + h\cdot y'(t_k) + \frac{1}{2}h^2 y''(t_k) + O(h^3)$

$\quad\quad y(t_{k+2}) = y(t_k) + 2h y'(t_k) + 2h^2 y''(t_k) + O(h^3)$

II. − 4·I.

$$y(t_{k+2}) - 4y(t_{k+1}) = -3y(t_k) - 2h\,y'(t_k) + O(h^3)$$

$$\rightsquigarrow \boxed{y_{k+2} = 4y_{k+1} - 3y_k - 2h \cdot f(t_k, y_k)}$$

dvoukroková metoda 2. řádu.