Algebrou proti koronaviru XII – naposledy!

(cvičení cihlovou barvou jsme udělali na cvičení, a tak je můžete vynechat)

Minimální polynomy a tělesová rozšíření

1. Nalezněte minimální polynomy $m_{a,T}$ následujících prvků $a \in S$ nad T a příslušné stupně tělesových rozšíření $T(a) \geq T$:

a	S	T	$m_{a,T}$	$[T(a) \geq T]$
$\sqrt[4]{6}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$[x^4 - 6]$	[4]
$-1 + i$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}$	$[x^2 + 2x + 2]$	[2]
$\sqrt{2}i$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}(i)$	$[x^2 + 2]$	[2]
$\sqrt[4]{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$[x^2 - \sqrt{2}]$	[2]
$\sqrt{2} + \sqrt{5}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$[x^4 - 14x^2 + 9]$	[4]
$\sqrt{2} + \sqrt{5}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$[(x - \sqrt{2})^2 - 5 =$ $x^2 - 2\sqrt{2}x - 3]$	[2]
$\sqrt{2} + \sqrt{5}$	$\mathbb{R}$	$T = \mathbb{R}$	$[x - \sqrt{2} - \sqrt{5}]$	[1]

2. Nalezněte nějaké báze $T(a)$ nad T v předchozím příkladě pro $a = -1 + i$, resp. $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ [vždy lze využít první řádek důkazu Tvrzení 22.3]

3. Určete stupeň rozšíření $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}]$ a nalezněte nějakou bázi $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3})$ nad $\mathbb{Q}$. [$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 3$, báze např, $\{1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}\}$]

4. Víte-li, že $m_{\sqrt{2}+i,\mathbb{Q}} = x^4 - 2x^2 + 9$, nalezněte $m_{\sqrt{2}+i+1,\mathbb{Q}}$ (a rozmyslete si, že je to skutečně on)! [$(x - 1)^4 - 2(x-1)^2 + 9 = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8$]

5. Kterému známému okruhu je izomorfní faktorokruh $\mathbb{Q}[x]/(x^2 + a)$, pro
   (a) $a = 2$ [$\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}i)$]
   (b) $a = -4$? [$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$]

6. Nechť $a \in S$ je algebraický nad T (kde $T \leq S$) a nechť $b \in S$ splňuje $m_{a,T}(b) = 0$. Rozmyslete si, že pak $m_{a,T} = m_{b,T}$.

7. Nechť $T \leq S$ jsou tělesa taková, že $[S : T]$ je prvočíslo. Dokažte, že pak $S = T(a)$ pro *libovolný* prvek $a \in S \setminus T$.

A pro odvážné několik zábavných a zcela dobrovolných příkladů navíc.

8. Nalezněte minimální polynomy $m_{a,T}$ následujících prvků $a \in S$ nad T:

   (a)* $a = \sqrt{2}$, $S = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$, [$x - \sqrt{2}$]

   (b)* $a = t^3$, $S = \mathbb{Z}_2(t)$, $T = \mathbb{Z}_2(t + t^2)$ (podtěleso $\mathbb{Z}_2(t)$). [$x^2 + (t^2 + t + 1)x + (t^2 + t)^3$]

   (c)* Najděte minimální polynom čísla $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ nad racionálními čísly.

9.* Nechť T je těleso a a algebraický prvek nad T takový, že $[T(a) : T]$ je lichý. Dokažte, že $\Bbbk(a) = \Bbbk(a^2)$.

10.* Nechť a, b jsou algebraické prvky nad T takové, že jejich minimální polynomy $m_{a,T}$, $m_{b,T}$ mají nesoudělné stupně. Dokažte, že pak $m_{a,T} = m_{a,T(b)}$ a $m_{b,T} = m_{b,T(a)}$.

11.* Dokažte, že $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.

12.* Není těžké ukázat, že zobrazení

$$f\colon \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \to \left\{ \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}; \qquad a + b\sqrt{3} \mapsto \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix}$$

je isomorfismus okruhů (a dokonce těles). Vymyslete, jak si vypomoct f k výpočtu minimálních polynomů prvků $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nad $\mathbb{Q}$.

13.* Užitím 2. věty o isomorfismu pro okruhy dokažte, že pro prvočíslo p platí $\mathbb{Z}_p[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{Z}[i]/(p)$. Na základě toho identifikujte, která prvočísla jsou ireducibilními prvky v $\mathbb{Z}[i]$. Nakonec pro p, jež ireducibilní nejsou, ukažte, že existují $a, b \in \mathbb{Z}$ splňující $a^2 + b^2 = p$.